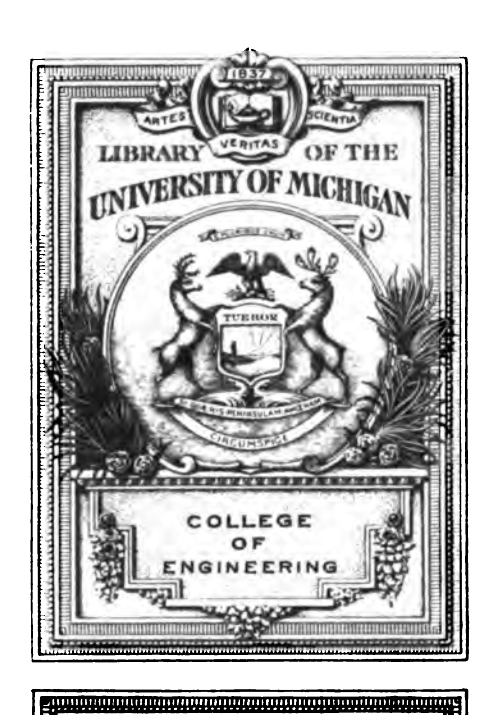
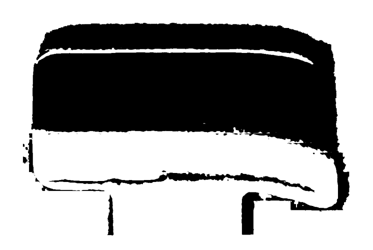

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
COLLEGE
OF
ENGINEERING





Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

Katalog

mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.

Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen

herausgegeben

im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung

von

Walther Dyck,

Professor an der technischen Hochschule München.

München.

K. Hof- u. Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

1892.

EINLEITUNG.

Auf der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Halle war beschlossen worden, bei Gelegenheit der für den Herbst 1892 in Nürnberg geplanten Zusammenkunft eine Ausstellung mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente zu veranstalten.

Schon einmal hat — im Jahre 1876 in London — eine solche Ausstellung in grösserem Umfange stattgefunden und reiche Anregung geboten. Gerade in den letzten Jahrzehnten nun ist diesen Gebieten wissenschaftlicher Bethätigung ein erhöhtes Interesse zugewendet worden: Den praktischen Bedürfnissen entsprechend haben sich die Hilfsmittel, Instrumente und Methoden, numerischer wie graphischer Rechnung ganz wesentlich vervollkommnet und vermehrt. Der geometrische Unterricht verfügt heute über reiche Sammlungen von Modellen räumlicher Gebilde, welche die Lagen- und Maassverhältnisse derselben, sei es nach ihren totalen, sei es nach ihren differentiellen Beziehungen zur Anschauung bringen. Hier wie in den auf Mechanik und mathematische Physik bezüglichen Modellen und Apparaten kommen neben den Zwecken des Unterrichtes die der Forschung zum Ausdruck. Insbesondere für die Betrachtung physikalischer Vorgänge haben die Hilfsmittel mechanischer Versinnlichung in neuster Zeit eine besondere, principielle Bedeutung gewonnen. Und ebenso ist, seit man begonnen hat, die mannigfaltigen Gestalten algebraischer Gebilde systematisch zu discutiren, seit die Theorie der Flächenkrümmung direct anschauungsmässige und sozusagen dem

Experimente zugängliche Sätze geliefert, das Interesse für die gestaltlichen Eigenschaften räumlicher Gebilde und für deren unmittelbare Realisirung gewachsen.

So erschien es naturgemäss, die Gelegenheit der diesjährigen Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, die gleichzeitig mit der Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte in Nürnberg tagen sollte, zu benützen, um ein zusammenhängendes Bild dieser Entwickelung vorzuführen.

Das Vorhaben, dessen Durchführung vom Vorstande der Deutschen Mathematiker-Vereinigung dem Herausgeber dieses Katalogs übertragen worden war, erfreute sich vom Anfange an der entgegenkommenden Förderung von Seiten des königlich bayerischen Staatsministeriums des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten, wie des persönlichen Interesses Seiner Excellenz des Herrn Staatsministers von Müller. Durch die namhafte materielle Beihilfe von Seiten des genannten kgl. Staatsministeriums ebenso wie durch die weiteren Geldmittel, welche das Reichsamt des Innern, in liberaler Weise gewährt hat, war das Unternehmen gesichert.

Die Beteiligung an dem Vorhaben entsprach dem glücklichen Beginne. Ein grosser Teil der mathematischen, physikalischen, mechanisch-technischen und geodätischen Institute unserer wie ausserdeutscher Hochschulen hatte die in den Instituten selbst hergestellten Modelle ebenso wie historisch wertvolle Objecte ihrer Sammlungen zur Verfügung gestellt. Von Museen, privaten Sammlungen, von einzelnen Gelehrten im In- und Auslande waren Anmeldungen eingetroffen. Es haben neben Deutschland Amerika, Frankreich, Italien, die Niederlande, Norwegen, Österreich-Ungarn, Russland, die Schweiz sich beteiligt und insbesondere bildete sich in Grossbritannien ein Comité, mit den Professoren Lord Kelvin, Greenhill, Henrici an der Spitze, um die Ausstellung mit den hervorragendsten Gegenständen aus Staats- wie aus Privatsammlungen zu beschicken. Wohl alle bedeutenderen mechanischen Werkstätten, welche sich speciell mit der Herstellung mathematischer Apparate und Instrumente befassen, sowie die in Betracht kommenden Verlagsfirmen hatten ihre Beteiligung zugesagt.

Das Zusammenwirken zahlreicher Fachgenossen hat die Absicht durchführen lassen, einen ausführlichen Katalog der Ausstellung

mit der genauen Beschreibung und zahlreichen Abbildungen der einzelnen Objecte vorzubereiten und demselben eine Reihe von Aufsätzen zusammenfassenden Inhaltes voranzustellen. Allen die hier Teil genommen, weiss sich der Herausgeber des Kataloges zu besonderem Danke verpflichtet; er möchte im speciellen noch der wichtigen Beihilfe gedenken, welche die Herren Boltzmann in München und Mehmke in Darmstadt den auf mathematische Physik und auf Arithmetik bezüglichen Abteilungen gewidmet haben.

Die Drucklegung des Kataloges musste innerhalb der letzten fünf Wochen vor dem Termin der Ausstellung bewerkstelligt werden; der Unterzeichnete spricht der Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. Wolf u. Sohn in München für ihr bereitwilliges Entgegenkommen, Herrn stud. math. Daunderer für seine Unterstützung bei Correctur und Anfertigung der Register Dank und Anerkennung aus.

In Nürnberg selbst fand die geplante Ausstellung bereitwilligste Unterstützung und gastliche Aufnahme bei den Geschäftsführern der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte, den Herren Medicinalrat Dr. Merkel und Rector Füchtbauer, wie bei dem einführenden Comité der Abteilung für Mathematik und Astronomie der genannten Gesellschaft, den Herren Professor Rudel und Gymnasiallehrer Dr. Sievert. Herr Director von Kramer des bayerischen Gewerbemuseums stellte ebenso wie die Geschäftsleitung der Naturforscherversammlung zweckentsprechende Räumlichkeiten in entgegenkommendster Weise zur Verfügung.

Das k. Staatsministerium des königlichen Hauses und des Äussern hat durch seine wichtige Vermittelung und Befürwortung bei den deutschen Eisenbahnverwaltungen den kostenfreien Rücktransport der Ausstellungsgegenstände erwirkt und weiter waren von Seiten der Generaldirection der Zölle und indirecten Steuern in dankenswertester Weise Vereinfachungen für die zollamtlichen Revisionen gewährt worden.

So waren alle einleitenden Schritte und Vorbereitungen getroffen.

Die gesundheitlichen Verhältnisse in Deutschland veranlassten am 29. August die Absage der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte und sie hatten auch am 1. September die Absage der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

im Gefolge. — So kann die Gegenleistung für das Entgegenkommen und die Beihilfe, welche von Seiten hoher Behörden Bayerns und des Reiches, von den Fachgenossen, den technischen Instituten, Werkstätten und Verlagshandlungen dem Unternehmen zu Teil geworden ist, zunächst nicht in der wirklichen Durchführung desselben, die Anregung und Förderung in weiten Kreisen geben sollte, zum Ausdruck gelangen und es muss sich der Unterzeichnete darauf beschränken, mit der Veröffentlichung dieses Kataloges Rechenschaft und Dank niederzulegen.

Im kommenden Jahre aber sei mit frischem Mute an die Durchführung des Vorhabens gegangen! In München dem für die nächstjährige Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ausersehenen Ort, werden, wie bereits in dankenswerter Weise zugesichert ist, die ausgedehnten Räume der technischen Hochschule zur Verfügung stehen. Dem Umfange, den die Ausstellung bisher gewonnen, soll dann eine verlängerte Dauer derselben entsprechen. Es ist der 1.—30. September 1893 in Aussicht genommen, während die Tage der Mathematiker-Versammlung den für die Naturforscher-Versammlung in Nürnberg festzusetzenden unmittelbar voraus gehen werden.

Der für die diesjährige Ausstellung fertig gestellte Katalog aber mag schon jetzt zur Ausgabe gelangen; nicht mit dem Anspruch, ein vollständiges Bild der vielen hierhergehörigen Gebiete zu geben, sondern mit der Absicht, Plan und begonnene Durchführung des Unternehmens zu zeigen, und dabei auch die Lücken erkennen zu lassen, welche nunmehr noch auszufüllen sind.

Möge Interesse und Mitwirkung Aller, die in diesem Jahre unser Vorhaben gefördert haben, uns dabei nicht fehlen, mögen insbesondere die Fachgenossen mit Rat und That den Zweck des ganzen Unternehmens durchführen helfen, ein vollständiges Bild zu geben, all' der mannigfachen Hilfsmittel, wie sie heute in Gestalt von Modellen, Apparaten und Instrumenten dem Unterricht und der Forschung in der reinen und angewandten Mathematik dienen!

München, im Oktober 1892.

Walther Dyck.

Inhalt.

Einleitung.

Verzeichnis der Aussteller.

Verzeichnis der Mitarbeiter am Katalog.

Verzeichnis der Aussteller, Verlagshandlungen etc., welche Clichés zur Verfügung gestellt haben.

Erster Teil.

Zweiter Teil.

I. Abteilung.

Arithmetik; Algebra, Functionentheorie; Integralrechnung.

Erster Abschnitt. *Arithmetik.*

Zweiter Abschnitt. *Algebra, Functionentheorie.*

Dritter Abschnitt. *Integralrechnung.*

II. Abteilung.

Geometrie.

III. Abteilung.

Angewandte Mathematik.

Erster Abschnitt. *Mechanik.*

Zweiter Abschnitt. *Mathematische Physik.*

Dritter Abschnitt. *Verschiedene technische Anwendungen.*

Verzeichnis der Aussteller.*)

*) Die beigesetzten Zahlen sind Katalognummern.

Verzeichnis der Mitarbeiter am Katalog.

Es haben Aufsätze bezw. Referate geliefert die Herren:

Adami, F. R., Gymnasiallehrer, Bayreuth.
Amsler, A., Schaffhausen.
Barrell, M. A., B. Sc., University College Bristol.
Bauschinger, J., Professor, technische Hochschule München.
Bjerknes, C. A., Professor, Universität Christiania.
Björling, Professor, Universität Lund.
Blanc, F., Ingenieur, Hamburg.
Blümcke, A., Gymnasiallehrer, Nürnberg.
Böklen, O., Rector, Reutlingen.
Boltzmann, L., Professor, Universität München.
Boys, C. V., Royal College of science London.
Braun, C. S. J., Mariaschein (Böhmen).
Braunmühl, A. v., Professor, technische Hochschule München.
Brill, A., Professor, Universität Tübingen.
Brunn, H., Privatdocent, Universität München.
Buka, F., Professor, technische Hochschule Berlin-Charlottenburg.
Burmester, L., Professor, technische Hochschule München.
Diem, G., Assistent, technische Hochschule München.
Dyck, W, Professor, technische Hochschule München.
Erhard, Ingenieur, Nürnberg.
Everett, J. D., Professor, Belfast.
Finsterwalder, S., Professor, technische Hochschule München.
Fischer, O., Reallehrer, Leipzig.
Füchtbauer, Rector, Industrieschule Nürnberg.
Galton, F., F. R. S., London.
Goldhammer, D. A., Professor, Universität Kasan.
Greenhill, A. G., Professor, Artillery College Woolwich.
Groth, P., Professor, Universität München.
Grübler, Professor, technische Hochschule Riga.
Hasselblatt, A, Professor, St. Petersburg.
Hauck, G., Professor, technische Hochschule Berlin.
Henrici, O., Professor, City and Guilds of London Institute, London.
Hermes, Hauptmann, Berlin.
Hess, E., Professor, Universität Marburg.
Keller, J., Privatdocent, technische Hochschule Zürich.
Kempe, A. B., F. R. S., London.
Kerschensteiner, G., Gymnasiallehrer, Schweinfurt.
Kleiber, J., Assistent, technische Hochschule München.
Klein, F., Professor, Universität Göttingen.

Kloth, M., Osnabrück.
Korteweg, D. J., Professor, Universität Amsterdam.
Kuen, Th., Reallehrer, München, (Katalog. Brill).
Lichtenfels, Professor, technische Hochschule Graz.
Lodge, O., Professor, Universität Liverpool.
Mayer, K. A., Ingenieur, Einbeck.
Mayer, M., München.
Mehmke, R., Professor, technische Hochschule Darmstadt.
Meyer, O. E., Professor, Universität Breslau.
Miller, R. v. Hauenfels, A., Professor, Graz.
Möller, M., Professor, technische Hochschule Braunschweig.
Neesen, Professor, Artillerie- und Ingenieurschule Berlin.
Ocagne, M. d', Ingenieur, Paris.
Ott, M., Mechaniker, München.
Reuleaux, Professor, technische Hochschule Berlin-Charlottenburg.
Riecke, Professor, Universität Göttingen.
Rittershaus, T, Professor, technische Hochschule Dresden.
Rodenberg, C., Professor, technische Hochschule Hannover.
Rohn, K., Professor, technische Hochschule Dresden.
Scherer, Steuerrat, Cassel.
Schmidt, M., Professor, technische Hochschule München.
Schönflies, A., Professor, Universität Göttingen.
Schütz, J., stud. phys., München.
Smith, F. J, Professor, Universität Oxford.
Sohncke, L., Professor, technische Hochschule München.
Sommerfeld, A., Königsberg.
Spott, M., Reallehrer, Neustadt a. H.
Steinheil, C. A., Optiker, München.
Tichy, A., Ingenieur, Wien.
Tötössy, B. v., Professor, technische Hochschule Budapest.
Veltmann, Professor, landwirtschaftl. Akademie Bonn-Poppelsdorf.
Voigt, W., Professor, Universität Göttingen.
Voss, A., Professor, Universität Würzburg.
Wiener, Chr., Professor, technische Hochschule Karlsruhe.
Wiener, H., Privatdocent, Universität Halle a. S.

Ausserdem standen für die im II. Teil enthaltenen Berichte die Prospecte und Kataloge der einzelnen Firmen und Verlagshandlungen zur Verfügung. Es seien dabei insbesondere die wissenschaftlichen Referate des Kataloges der Verlagsbuchhandlung von L. Brill, Darmstadt, zum grossen Teil verfasst von Reallehrer Th. Kuen, erwähnt, die in Gegenwärtigem ausführlich benutzt worden sind.

Zur Illustration des Kataloges

haben die folgenden Aussteller, Redactionen von Zeitschriften und Verlagsbuchhandlungen in dankenswertester Weise Holzschnitte bezw. Clichés (im Ganzen 129) zur Verfügung gestellt*):

Amsler-Laffon, J. & Sohn, Schaffhausen. 189, 190, 202.
Barthelmes, A., Mechaniker, München. 147.
Beyerlen, A., Ingenieur, Stuttgart. 143.
Brill, L., Verlagsbuchhandlung, Darmstadt. 177, 178, 245, 251, 254, 258—260, 264—267, 269, 275, 283, 286, 287, 292—296, 298, 378.
Brückner, W., Dresden. 151.
Burkhardt, A., Ingenieur, Glashütte i. S. 150.
Coradi, G., Mathematisch-mechanisches Institut, Zürich. 180, 193, 195, 196. 199, 200, 232.
Edmondson, J., Halifax, England. 151
Friedmann, J., Bayreuth. 225.
Grimme, Natalis &. Co., Braunschweig. 152.
Günther, O., Mechaniker an der technischen Hochschule Braunschweig. 229.
Hauck, G., Professor, technische Hochschule Berlin-Charlottenburg. 42, 45, 46, 47, 51, 235—240.
Macmillan Co, Verlagsbuchhandlung, London. 316—318.
Ott, A., Mathematisch-technisches Institut, Kempten. 413, 415.
Ott, M., Mechanische Werkstätte, München. 153.
Physikalisch-ökonomische Gesellschaft der Universität Königsberg. 214, 216, 218, 220.
Reports of the Meteorological Comittee of the Royal Society, London. Verlag von G. Eyre & W. Spottiswoode. 164, 166, 232. 233.
Reuleaux, F., Professor, technische Hochschule Berlin-Charlottenburg. 341, 342.
Tesdorpf, L., Stuttgart. 181.
Teubner, B. G., Verlag, Leipzig. 252.
Winckelmann & Söhne, Verlagsbuchhandlung, Berlin. 277.
Zeitschrift für Instrumentenkunde. Redaction: A. Westphal, Verlag von J. Springer, Berlin. 105, 123, 160, 313.
Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Redaction: Th. Peters, Verlag von J. Springer, Berlin. 235, 238, 239, 240, 336, 337, 338.

Die übrigen (176) Figuren des Textes sind nach den Angaben der Aussteller in der lithographischen Anstalt von H. Köhler in München hergestellt worden.

*) Die beigesetzten Zahlen sind Seitenzahlen des Kataloges.

Erster Teil.

Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von F. Klein in Göttingen.

Sylvester und *Kronecker* haben bereits in den 60er Jahren bei der Discussion der Wurzelrealität algebraischer Gleichungen geometrische Constructionen in der Weise herangezogen, dass sie die Coëfficienten der Gleichung oder sonstige Grössen, von denen man die Gleichung abhängig denken mag, als Coordinaten eines Raumpunktes interpretirten, — wobei natürlich ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit wegen diejenigen Fälle besondere Berücksichtigung fanden, bei denen man mit Räumen von 2 oder 3 Dimensionen ausreicht*). Es handelt sich da insbesondere um den Verlauf derjenigen Mannigfaltigkeit, welche durch Nullsetzen der Discriminante der vorgelegten Gleichung vorgestellt wird — die Discriminantenmannigfaltigkeit —, und um die durch diese Mannigfaltigkeit vermittelte Zerlegung des Gesamtraumes in verschiedene Gebiete. — Ich möchte im Nachstehenden an den bezeichneten Ansatz in der Weise anknüpfen, dass ich die elementaren, für Gleichungen beliebigen Grades giltigen Kriterien in Betracht ziehe, durch welche man die Anzahl der reellen Wurzeln *abzuzählen* vermag, die gegebenen Falles vorhanden sein mögen. Bei der geometrischen Interpretation dieser Kriterien entsteht, wie von selbst, eine Auffassung derselben, vermöge deren die etwas stereotypen Darstellungen der Lehre von der Wurzelrealität, wie sie sich in unsern Lehrbüchern finden, der Neubelebung und Weiterent-

*) *Sylvester* in den „Philosophical Transactions" von 1864 (On the real and imaginary roots of equations), *Kronecker* in Vorlesungen.

wickelung zugänglich werden*). Der Zweck der vorliegenden kurzen Mitteilung wird erreicht sein, wenn es mir gelingen sollte, in dieser Richtung einen Anstoss zu geben. Um so lieber will ich mich im Folgenden auf die allerelementarsten Fälle, nämlich auf Gleichungen zweiten und dritten Grades, beschränken: ich hoffe da allgemein verständlich zu sein und kann doch schon alles Wesentliche, was ich zu sagen habe, hervortreten lassen.

Zunächst der allgemeine Ansatz. Sei

$$\text{(1)} \qquad f(z) = z^n + nAz^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{2} Bz^{n-2} + \ldots N = o$$

eine vorgelegte Gleichung n^{ten} Grades (wo die Binomialcoëfficienten hinzugesetzt sind, weil dadurch die später zu gebenden Formeln einfacher werden). So interpretire man einfach A, B, . . . N als Punktcoordinaten in einem n dimensionalen Raume R_n. Gleichung (1) repräsentirt dann, sofern man das z als gegebene Grösse und die A, B, . . . als Veränderliche ansehen will, einen in diesem R_n enthaltenen (n—1)fach ausgedehnten Raum, R_{n-1}, und die ganze Reihenfolge von R_{n-1}, welche man so für wechselnde Werte von z erhält, umhüllt in ihrer Aufeinanderfolge eben jene *Discriminantenmannigfaltigkeit,* von welcher bereits soeben die Rede war; kann man doch die Discriminante als Resultante von $f(z) = o$ und $\frac{df(z)}{dz} = o$ berechnen. — In nächster Beziehung zu diesem R_{n-1} und damit zur Discriminantenmannigfaltigkeit steht nun diejenige rationale „Curve", die den Gleichungen (1) mit nfacher Wurzel entspricht:

$$(z-\lambda)^n = o,$$

d. h. diejenige Curve, deren Punkte sich mit Hilfe eines Parameters λ so darstellen lassen:

*) Ich werde weiter unten noch hervorheben, dass die bez. Darstellungen der Lehrbücher vielfach auch unvollständig sind. Aber der wesentliche Mangel liegt wohl darin, dass die Lehrbücher durchgängig an der Auffassung festhalten, als handele es sich bei den hier in Betracht kommenden Fragen um *numerische* Gleichungen, also um Verfahrungsweisen, welche keinen allgemeinen Charakter haben, sondern sich jeweils nach dem besonderen vorgelegten Falle richten. Im Gegensatze dazu lässt die geometrische Interpretation die Coëfficienten der zu untersuchenden Gleichungen notwendig als frei veränderliche reelle Grössen ansehen.

(2) $A = -\lambda,\ B = \lambda^2, \ldots \quad N = (-1)^n \lambda^n.$

Möge dieselbe, entsprechend der Ausdrucksweise der neueren Geometer, hier schlechtweg als *Normcurve* benannt werden*); den einzelnen durch (2) gegebenen Punkt der Curve werde ich als den Punkt λ derselben bezeichnen. Da ist denn unmittelbar ersichtlich, dass die sämtlichen n Schnittpunkte, welche der durch (1) gegebene R_{n-1} mit der Normcurve gemein hat, in den einen Punkt $\lambda = z$ coïncidiren: unsere R_{n-1} sind *Schmiegungsräume* der Normcurve und eben dadurch unter allen anderen (n—1)fach ausgedehnten linearen Räumen unseres R_n charakterisirt. Die Wurzeln z_i aber, welche die Gleichung $f(z) = o$ besitzt, werden auf der Normcurve durch die n Punkte $\lambda = z_i$ vorgestellt sein, nämlich durch diejenigen Punkte der Normcurve, in welchen die von dem Raumpunkte (A, B, . . . N) an die Curve laufenden Schmiegungsräume (n—1)^{ter} Dimension dieselbe berühren. *Insbesondere werden von diesen Wurzeln genau so viele reell sein, als von unserem Raumpunkte aus reelle Schmiegungsräume an die Curve gehen.*

Specificiren wir diesen Ansatz zunächst für $n = 2$, so haben wir in der Gleichung zweiten Grades

(3) $$z^2 + 2Az + B = o$$

die A, B als Punktcoordinaten (etwa geradezu als rechtwinkelige Punktcoordinaten) der Ebene zu interpretiren. Wir haben dann als Definition der Normcurve

(4) $$A = -\lambda,\ B = \lambda^2$$

zu Grunde zu legen, was eine *Parabel* mit der Gleichung $A^2 - B = o$ ergibt, wie sie durch die nebenstehende Figur versinnlicht wird; man beachte, dass auf dieser Parabel die Punkte mit positivem λ linker Hand, die mit negativem λ rechter Hand liegen. Gleichung (3) wird 2 reelle oder 2 imaginäre Wurzeln haben, je nachdem von dem repräsentirenden Punkte (A, B) aus zwei reelle oder zwei

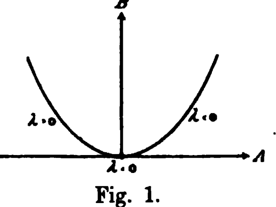


Fig. 1.

*) Vgl. z. B. *Franz Meyer*, Apolarität und rationale Curven, Tübingen 1883.

imaginäre Tangenten an die Parabel gehen. Augenscheinlich zerfällt mit Rücksicht hierauf die Ebene in zwei durch die Parabel getrennte Teile; ich habe dieselben in der nebenstehenden Figur durch die Ziffern 2 und 0 unterschieden. Die durch die Parabel vorgestellte Normcurve ist hier eben selbst die Discriminantenmannigfaltigkeit, und unsere Figur also ein Gegenbild dafür, dass die quadratische Gleichung (3) zwei oder null reelle Wurzeln hat, jenachdem die Discriminante A^2-B positiv oder negativ ist.

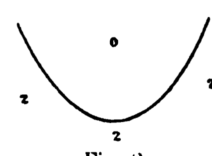


Fig. 2.

Wir gehen zur cubischen Gleichung

$$z^3 + 3\,Az^2 + 3\,Bz + C = 0. \tag{5}$$

Die Raumconstructionen, welche hier auszuführen sind, lassen sich nicht mehr kurz durch ebene Figuren erläutern, und ich muss den Leser bitten, falls anders er die Angaben, die ich fernerhin über cubische Gleichungen zu machen habe, völlig in sich aufnehmen will, sich selbst geeignete räumliche Modelle zu verfertigen. Wir haben da erstlich als Normcurve die *Raumcurve dritter Ordnung*

$$A = -\lambda,\ B = \lambda^2,\ C = -\lambda^3, \tag{6}$$

dann als Discriminantenmannigfaltigkeit die zu dieser Raumcurve gehörige developpable Fläche. Durch selbige wird der Raum in 2 Gebiete zerlegt, entsprechend der Möglichkeit, dass die Gleichung (5) drei oder eine reelle Wurzel für z ergeben kann. Wir werden diese Gebiete dementsprechend mit den Ziffern 3 und 1 bezeichnen. Von den Punkten des Gebietes 3 aus laufen immer drei reelle Osculationsebenen an die Curve, von den Punkten des Gebietes 1 aus nur eine.

Ich wende mich nun gleich zu den Kriterien für die Abzählung der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung. Dabei werde ich gelegentlich etwas ausholen müssen, insofern diese Kriterien in der Mehrzahl der Lehrbücher, wie ich schon andeutete, nur unvollständig mitgeteilt werden. Ich unterscheide in erster Linie zwischen solchen Kriterien, welche die *Gesamtzahl* der reellen Wurzeln betreffen, und den anderen, die sich auf die reellen Wurzeln in einem gegebenen *Intervalle* beziehen. Andererseits trenne ich zwischen *genauen* Kriterien und solchen, welche

nur eine Grenze der Wurzelanzahl geben *(approximirende* Kriterien).

Um hiernach mit den genauen Kriterien zu beginnen, durch welche man die Gesamtzahl der reellen Wurzeln bestimmt, so habe ich gleich hier von der üblichen Darstellung der Lehrbücher abzuweichen. Man findet in den letzteren übereinstimmend das Verfahren von *Sturm* und einen mehr oder minder ausführlichen Excurs über diejenigen Methoden, welche sich an das *Trägheitsprincip* der quadratischen Formen schliessen. Dagegen fehlt zumeist jeder Hinweis auf die bestimmte Ausgestaltung, welche letztere Methoden durch *Hermite* und *Sylvester* vermöge Aufstellung jener quadratischen Form von (n—1) Veränderlichen gefunden haben, welche Sylvester als *Bezoutiante* bezeichnet*). Und doch zweifle ich nicht, dass erst mit der Bezoutiante der Kernpunkt der ganzen Fragestellung getroffen ist.

Sei wieder $f(z) = o$ die vorgelegte Gleichung. Wir machen der Bequemlichkeit halber homogen, indem wir z durch z_1/z_2 ersetzen und mit z_2^n heraufmultipliciren. Solcherweise entstehe $f(z_1, z_2) = o$, wo wir nun die linke Seite kurzweg mit f bezeichnen werden. Entsprechend werde f' abkürzender Weise für $f(z'_1, z'_2)$ geschrieben, unter z'_1, z'_2 eine zweite Variabelnreihe verstanden. Man bilde sich jetzt die „Combinante“:

$$(7) \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_1}\cdot\dfrac{\partial f'}{\partial z'_2} - \dfrac{\partial f}{\partial z_2}\cdot\dfrac{\partial f'}{\partial z'_1}}{(z_1\, z'_2 - z_2\, z'_1)}.$$

Dieselbe ist linear und homogen einerseits in

$$z_1^{n-2},\ z_1^{n-3}\,z_2,\ \ldots\ldots\ z_2^{n-2},$$

andererseits in

$$z'^{\,n-2}_1,\ z'^{\,n-3}_1\,z'_2,\ \ldots\ldots\ z'^{\,n-2}_2.$$

Die Bezoutiante

$$(8) \qquad B\,(t_1,\ t_2,\ \ldots\ t_{n-1})$$

entsteht nun einfach aus (7), *indem man die genannten aufeinanderfolgenden Verbindungen der* z_1, z_2 *wie der* z'_1, z'_2 *beide bez. durch die* (n—1) *Unbestimmten* $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ *ersetzt.* Und nun

*) Vgl. *Sylvester* in den „Philosophical Transactions“ von 1853: On the syzygetic relations etc., *Hermite* in Bd. 52 von „Crelle's Journal“, 1856. Vgl. übrigens auch *Baltzer's* Determinanten.

handelt es sich nur noch darum, die „Trägheit“ der so gewonnenen quadratischen Form von (n—1) Veränderlichen zu constatiren, d. h. zuzusehen, wie viele positive bez. negative Vorzeichen hervortreten, wenn man es unternimmt, die Form B durch reelle lineare Substitution der $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ in ein Aggregat blosser Quadrate zu verwandeln. Die Regel wird kurzweg die, *dass* $f = 0$ *genau so viele Paare imaginärer Wurzeln besitzt, als bei der genannten Reduction von B negative Quadrate auftreten.* Die principielle Einfachheit dieser Aussage aber ruht darin, dass B nicht nur von den t, sondern auch von den Coëfficienten von f in quadratischer Weise abhängt (so dass also bei unserer geometrischen Interpretation $B = 0$ eine von den Parametern $t_1, \ldots t_{n-1}$ abhängige Schaar von Flächen zweiten Grades gibt).

Für die quadratische Gleichung (3) liefert die so formulirte Regel natürlich nichts Neues. Gehen wir also gleich zur cubischen Gleichung (5). Hier wird die Bezoutiante:

(9) $$(A^2-B)\,t_1^2 + (AB-C)\,t_1\,t_2 + (B^2-AC)\,t_2^2,$$

ist also (wie man erwarten konnte), von einem negativen Zahlenfaktor abgesehen, mit der sog. *Hesse*'schen Form von $f(z_1, z_2)$ identisch. Wir werden wünschen, uns im geometrischen Bilde darüber klar zu werden, weshalb die „Trägheit“ von (9) in der angegebenen Weise mit der Realität der Wurzeln von $f = 0$ zusammenhängt, oder wenigstens, *weshalb* $f = 0$ *drei oder eine reelle Wurzel liefert, jenachdem die Gleichung*

(10) $$(A^2-B)\,t_1^2 + (AB-C)\,t_1\,t_2 + (B^2-AC)\,t_2^2 = 0$$

für $t_1 : t_2$ *null oder zwei reelle Wurzeln ergibt.* Zu dem Zwecke fragen wir nach der geometrischen Bedeutung der Gleichung (10) bei stehenden t_1, t_2 und finden, dass dieselbe den Kegel zweiten Grades vorstellt, der sich von dem Punkte $\lambda = t_1/t_2$ der Normcurve nach den anderen Punkten der Normcurve hin erstreckt. Unsere cubische Gleichung soll also 3 oder 1 reelle Wurzel haben, jenachdem durch den Raumpunkt (A, B, C), 0 oder 2 reelle Projectionskegel dieser Art hindurchgehen. Nun haben zwei Kegel (10) ausser der Normcurve dritter Ordnung selbst immer noch die Verbindungsgerade ihrer Spitzen gemein. Sind die Kegel reell, so ist diese Gerade ebenfalls reell und damit eine *eigentliche* Secante der Normcurve, im Gegensatz zu den gleichfalls reellen

aber uneigentlichen Secanten, welche unsere Normcurve je in zwei conjugirt imaginären Punkten treffen (und die der Schnitt zweier conjugirt imaginärer Kegel (10) sind). Daher lässt sich der an Gleichung (10) anknüpfende Satz dahin aussprechen:

dass die Gleichung f = o *eine oder drei reelle Wurzeln haben wird, jenachdem durch den Raumpunkt* (A, B, C) *eine eigentliche oder eine uneigentliche Secante der Normcurve dritter Ordnung geht.*

Und in dieser Form ist der Satz den Geometern ohne weiteres einleuchtend. Denn die Normcurve dritter Ordnung projicirt sich vom Punkte (A, B, C) aus im ersteren Falle als ebene Curve dritter Ordnung mit eigentlichem Doppelpunkte, im zweiten Falle als solche mit isolirtem Punkte, und es ist wohlbekannt, dass eine Curve der ersteren Art nur einen, eine Curve der zweiten Art drei reelle Wendepunkte besitzt.

Ich habe diese Betrachtung über die Kegel zweiten Grades, welche von den Punkten der Normcurve dritter Ordnung auslaufen, um so lieber gegeben, als ihre Besprechung ohnehin unerlässlich ist, wenn man die Zahl der reellen Wurzeln von f = o durch die sogenannte *Newton*'sche Regel abschätzen will. Ich denke dabei an jenes approximirende Kriterium, welches ursprünglich in Newton's Arithmetica universalis gegeben worden ist, aber erst 1865 von *Sylvester* bewiesen und zugleich nach verschiedenen Richtungen erweitert wurde*). In ihrer einfachsten Gestalt, die wir hier allein in Betracht ziehen, lautet diese Regel dahin:

dass unsere Gleichung (1) *mindestens so viele imaginäre Wurzeln besitzt, als die Reihe der quadratischen Ausdrücke*

(11) $$1,\ A^2-B,\ B^2-AC,\ .\ .\ .\ .\ .\ N^2$$

Zeichenwechsel darbietet.

Im Falle der Gleichungen dritten Grades (5) haben wir also sicher zwei imaginäre Wurzeln, wenn von den beiden Ausdrücken

$$A^2-B,\quad B^2-AC$$

*) Vgl. insbesondere Transactions of the R. Dublin Academy, t. 24, sowie Philosophical Magazine, 4. ser., t. 31. — Auch diese Regel fehlt in vielen Lehrbüchern; Ausführlicheres darüber gibt u. a. *Petersen* in seiner „Theorie der algebraischen Gleichungen".

auch nur einer negativ ist. Hier bemerke man nun, dass nach Gleichung (10)

(12) $$A^2 - B = 0, \quad B^2 - AC = 0$$

die Gleichungen der beiden Projectionskegel sind, die von den Punkten

$$\lambda = \infty, \text{ bez. } \lambda = 0$$

der Normcurve dritter Ordnung nach dieser Curve hinlaufen. Der geometrische Sinn des Newton'schen Kriteriums ist dementsprechend der, *dass bei der Gleichung dritten Grades sicher zwei imaginäre Wurzeln vorhanden sind, sobald der Raumpunkt* (A, B, C) *im Innern auch nur eines der beiden genannten Kegel liegt.* Die geometrische Anschauung bestätigt nicht nur, sondern vervollständigt diese Regel und bringt sie dadurch mit dem aus der Bezoutiante abgeleiteten Kriterium in klaren Zusammenhang. Wir wissen bereits, dass keiner der Kegel (10) in das Raumstück eindringt, welches den cubischen Gleichungen mit 3 reellen Wurzeln entspricht; wir fügen jetzt hinzu, was uns ein Blick auf die Gestalt der Curve dritter Ordnung lehrt, dass dieses Raumstück *ausserhalb* der sämtlichen Kegel (10) liegt. Wir wissen andererseits, dass das Raumstück, welches den cubischen Gleichungen mit nur einer reellen Wurzel entspricht von den reellen Kegeln (10) durchweg zwiefach ausgefüllt wird, und hierin liegt, dass jeder Punkt (A, B, C) im Innern dieses Raumstückes jedenfalls auch im Innern einer unendlichen Zahl von Kegeln (10) liegt. Wir werden also folgenden genauen Satz aufstellen: *dass die cubische Gleichung dann und nur dann zwei imaginäre Wurzeln besitzt, wenn die Bezoutiante* (10) *für irgendwelche reelle Werte von* t_1, t_2 *negativ wird.* Und von diesem Satze ist dann die Newton'sche Regel ein blosses Corollar.

So viel über die allgemeine Abzählung der reellen Wurzeln. Wir wenden uns jetzt zur *Abzählung der Wurzeln in einem Intervalle von* x *bis* y ($x < y$). Auch hier werde ich mich auf die elementarsten Erläuterungen beschränken. Insbesondere will ich der Kürze halber die exacten Abzählungsmethoden ganz bei Seite lassen und unter den approximirenden Kriterien nur diejenigen betrachten, bei denen *lineare* Functionen der Coëfficienten zu Grunde liegen, also den *Cartesischen* Satz, das Theorem von

Budan-Fourier etc. Auch mögen jetzt vor allen Dingen die *quadratischen Gleichungen* (3) herangezogen werden, insofern bereits bei ihnen alles Wesentliche hervortritt; über die cubischen Gleichungen gebe ich nur noch eine kurze Schlussbemerkung.

Wir hatten bei den Gleichungen zweiten Grades als Normcurve die Parabel der Figur 1. Markiren wir auf ihr die beiden Punkte $\lambda = x$ und $\lambda = y$ (wobei für $x < y$ der Punkt x rechts von y liegt) und unterscheiden dann drei Gebiete der Ebene, jenachdem sich vom einzelnen Punkte (A, B) aus an das zwischen x und y verlaufende Parabelstück 2 oder 1 oder 0 Tangenten legen lassen, so entsteht offenbar die nebenstehende Figur, welche ich kurzweg als die „richtige" Figur (x, y) bezeichnen werde: — die Grenzen der dreierlei bei ihr zu unterscheidenden Gebiete werden teils von dem genannten Parabelstücke selbst, teils von den beiden, zu den Punkten x und y gehörigen Parabeltangenten gebildet.

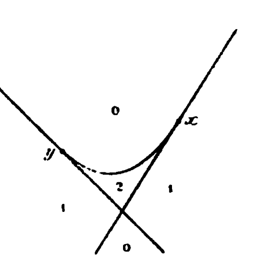


Fig. 3.

— Lassen wir hier y insbesondere ins Unendliche rücken, so entschwindet für die Anschauung die ganze zu y gehörige Tangente und wir haben als zugehörige Gebietseinteilung den in Figur 4 vorgestellten Fall: wir benennen diese Figur als die „richtige" Figur (x, ∞).

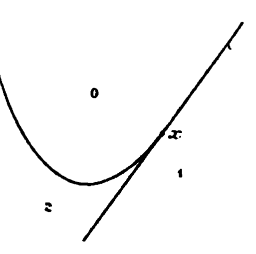


Fig. 4.

Aufgabe der zu discutirenden linearen Kriterien wird es nun sein, diese richtigen Figuren mit möglichster Annäherung durch solche zu ersetzen, bei welchen nur gerade Linien zur Felderabgrenzung gebraucht werden.

Von dieser Auffassung ausgehend, betrachten wir zunächst die Cartesische Zeichenregel. Wir wollen dieselbe gleich in die verallgemeinerte Form setzen, in der sie die reellen Wurzeln von $f(z) = o$ abzuschätzen gestattet, die grösser als ein beliebiges vorgegebenes x sind. Es handelt sich da um die Functionsreihe:

(13) $$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x)$$

und die Regel behauptet, *dass* $f(z) = o$ *höchstens so viele reelle*

Wurzeln $>$ x *besitzt, als Zeichenwechsel in dieser Functionsreihe vorhanden sind, und dass die richtige Zahl der Wurzeln von der durch die Zeichenwechsel gegebenen Zahl immer nur um ein Multiplum von 2 verschieden sein kann.* Zwecks Übersetzung der Regel in die geometrische Anschauung werden wir vor allen Dingen die drei geraden Linien construiren, welche in der Ebene (A, B) durch Nullsetzen der drei Ausdrücke f(x), f'(x), f''(x) vorgestellt werden. Hier gibt f''(x) = o die unendlich ferne Gerade und kommt also für die Zeichnung in Wegfall. f'(x) = o gibt die verticale Linie A = — x, d. h. den durch den Punkt x der Parabel laufenden Durchmesser derselben. Endlich f(x) = o, wie wir von früher wissen, die zum Punkte x gehörige Parabeltangente. Ein jedes der von den genannten Geraden umgrenzten Gebiete der Ebene bietet bestimmte Vorzeichen von f(x), f'(x), f''(x) dar. Nun kommt es uns aber nicht auf diese Vorzeichen, sondern nur auf die Zahl der *Zeichenwechsel* an, welche die Reihe f(x), f'(x), f''(x) darbietet. Wir markiren dieselbe für die verschiedenen Teile der Ebene und erhalten so schliesslich die folgende Figur, welche ich die *Cartesische* Figur (x, ∞) nennen darf:

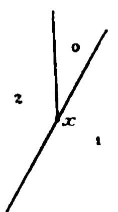


Fig. 5.

Wir verstehen die Cartesische Regel in geometrischer Form, indem wir diese neue Figur mit Fig. 4 (der „richtigen" Figur [x, ∞]) vergleichen. Und dabei bestätigen wir nicht nur die Cartesische Regel, sondern erkennen auch ihre Vorzüglichkeit. In der That sieht man, *dass man die „richtige" Figur vermöge einer geradlinigen Feldereinteilung, an der (unter Einrechnung der unendlich fernen Geraden) drei gerade Linien participiren, in der durch den Cartesischen Satz vorgesehenen Weise unmöglich besser approximiren kann, als dies durch die Cartesische Figur geschieht.*

Wir erläutern ferner, in gleichem Sinne, den Budan-Fourier'schen Satz. Es handelt sich bei demselben allgemein um die Zahl der reellen Wurzeln von f (z) = o, welche zwischen zwei beliebig vorgegebenen Grenzen, x und y ($x < y$) liegen. Man bildet die beiden Functionsreihen:

$$(14) \qquad \begin{cases} f(x), & f'(x), & f''(x) \text{ und} \\ f(y), & f'(y), & f''(y), \end{cases}$$

bestimmt zuerst die Zahl V(x) der Zeichenwechsel, welche die erstere Reihe darbietet, ferner die Zahl V(y) der Zeichenwechsel der zweiten Reihe, und *hat dann in* V (x) — V (y) *eine Zahl, welche von der Zahl der zwischen* x *und* y *gelegenen reellen Wurzeln von* f (z) = o *höchstens um ein positives Vielfaches von* 2 *abweicht.* Wieder übersetzen wir diese Regel in eine geometrische Figur. Indem wir ganz ähnlich verfahren, wie vorhin, ergibt sich die folgende Feldereinteilung:

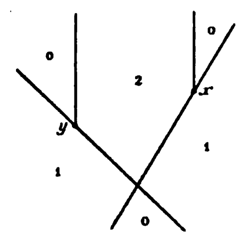


Fig. 6.

Ein Vergleich mit Fig. 3 bestätigt darauf die Richtigkeit des Budan-Fourier'schen Satzes: überall da, wo Fig. 3 und Fig. 6 den Punkten der Ebene verschiedene Zahlen beilegen, ist die Zahl der Fig. 6 um ein positives Vielfaches von 2 grösser. Aber wir fragen angesichts unserer Figuren nicht nur nach der Richtigkeit, sondern auch nach der Zweckmässigkeit des Budan-Fourier'schen Satzes. Und da kommen wir zu einem Resultate, welches bei einem so elementaren Gegenstande überraschen muss und eben darum geeignet sein dürfte, die geometrische Betrachtungsweise, für die wir hier eintreten, nicht nur als eine beiläufige Erläuterung, sondern als eine notwendige Ergänzung der gewöhnlich gegebenen Entwickelungen erscheinen zu lassen: ***Figur*** (6) ***mit ihren, vier verschiedenen geraden Linien angehörigen Begrenzungs-***

stücken ist als Annäherung an Figur (3) *keineswegs besonders zweckmässig gewählt, man kann der Figur* (3) *mit einer nur aus drei geraden Linien gebildeten Figur viel näher kommen.* Man hat einfach eine Figur zu zeichnen, welche man als projektive Verallgemeinerung der Cartesischen Figur betrachten kann (sofern man bei letzterer die unendlich ferne Gerade mitzählen will), d. h. die nachstehende Figur, welche neben den Tangenten der beiden Parabelpunkte x, y das geradlinige Verbindungsstück xy enthält:

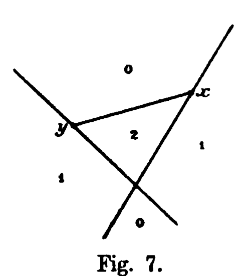


Fig. 7.

Will man das analytische Kriterium aufstellen, welches dieser Figur entspricht, so ist es bequem, wieder homogen zu machen, also statt f(z) die binäre Form $f(z_1, z_2)$ und statt x und y die Variabelnpaare x_1, x_2 und y_1, y_2 einzuführen. Ich setze ausserdem symbolisch $f(z_1, z_2) = a_z^2$. *Bei Figur* (7) *handelt es sich dann einfach um die Zeichenwechsel der Functionsreihe:*

(15) $$a_x^2, \quad a_x a_y, \quad a_y^2.$$

Es ist kaum nötig, dass ich beim Beweise dieser Behauptung oder der damit aufgestellten Regel für die Abzählung der Wurzeln im Intervall x—y verweile. Es handelt sich einfach darum, in die Gleichung $f(z_1, z_2) = 0$ für z_1 $x_1 + \lambda y_1$, für z_2 $x_2 + \lambda y_2$ zu substituiren und nun für die so entstehende Gleichung in λ die Zahl der positiven Wurzeln durch das Cartesische Theorem festzulegen, resp. zu umgrenzen. Das ist so einfach, dass es Wunder nehmen müsste, wenn dieser Ansatz nicht schon in früherer Zeit bemerkt sein sollte. Und in der That findet sich derselbe beispielsweise bei *Jacobi* in Crelle's Journal Bd. 13, 1835 (Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes). Nur fügt Jacobi merkwürdigerweise hinzu: regula a clarissimo Fourier proposita multis nominibus praestat.

Es erübrigt nur noch, dass ich angebe, wie man bei der Normcurve dritten Grades diejenige räumliche Figur construirt, welche man als Verallgemeinerung der ebenen Figur (7) zu betrachten hat. Bezeichnet man die gegebene cubische Gleichung symbolisch mit $a_x^3 = o$, so handelt es sich zumal um die geometrische Definition der Ebenen

$$(16) \quad a_x^3 = o, \quad a_x^2 a_y = o, \quad a_x a_y^2 = o, \quad a_y^3 = o.$$

Diese ist natürlich äusserst einfach. Die drei Schnittpunkte, welche die einzelne dieser Ebenen mit der Normcurve gemein hat, fallen alle nach x oder y; die folgende Tabelle gibt die Multiplicitäten, mit der x und y als Schnittpunkte zählen, genauer an:

	x	y
a_x^3	3	0
$a_x^2 a_y$	2	1
$a_x a_y^2$	1	2
a_y^3	0	3

In dieser Tabelle tritt das einfache Gesetz, welches für $n = 2$ in Fig. 7 befolgt ist, in einer für alle n erkennbaren Form hervor. — Wir sollten jetzt ferner eine genaue Beschreibung der verschiedenen Stücke geben, in welche der Raum entsprechend der Zahl der bei den Functionen (16) auftretenden Zeichenwechsel durch unsere Ebenen zerlegt wird. Daran würde sich dann der Vergleich mit denjenigen Raumeinteilungen schliessen, die als Analoga der ebenen Figuren (3), (4), (5), (6) anzusehen sind. Hier ist offenbar ohne geeignete Modelle nicht durchzukommen. Es wird sehr dankenswert sein, wenn jemand die Herstellung solcher Modelle in die Hand nehmen wollte.

Göttingen, den 9. Juni 1892.

Über äquidistante Curvensysteme auf krummen Flächen.

Von A. Voss in Würzburg.

In der Arbeit „Über ein neues Princip der Abbildung krummer Flächen", Math. Ann. Bd. 19, S. 1, 1881, hatte ich, wie ich glaubte, zuerst auf diejenigen Curvensysteme hingewiesen, für die das Längenelement auf einer Fläche die Form

$$1) \qquad ds^2 = du^2 + dv^2 + 2f\,du\,dv$$

annimmt. Dieselben lassen sich praktisch dadurch sehr leicht herstellen, dass man ein aus parallelogrammatischen Maschen bestehendes Netz von an den Kreuzungsstellen unter sich verknüpften unausdehnsamen und vollkommen biegsamen Fäden auf der Fläche ausbreitet. Inzwischen habe ich aus einer Bemerkung des Herrn *Darboux* im dritten noch nicht vollendeten Buche seiner Théorie générale des surfaces entnommen, dass Herr *Tchébycheff**) bereits im Jahre 1878 auf diese *äquidistanten Curvensysteme,* wie ich sie nenne, aufmerksam gemacht hat. Herr *Darboux* giebt auch die Form der partiellen Differentialgleichung,**) von der ein solches „habillement" der Fläche abhängt, in der allgemeinsten Gestalt, ohne indess etwas weiteres hinzuzufügen. Bei der Schwierigkeit, die es hat, den so leicht praktisch zu realisirenden Process der Flächenbekleidung analytisch zu verfolgen, werden vielleicht einige Angaben hierüber nicht ungeeignet er-

*) *Tchébycheff*, Sur la coupe des vêtements, Assoc. franç. pour l'avancement des Sc. Congrès de Paris, p. 154, 1878. Diese Arbeit ist mir bisher nicht zugänglich gewesen.

**) *Darboux*, Théorie générale, Tom. III, S. 133 und 206.

scheinen, welche die in meiner früheren Arbeit gegebenen Resultate teils recapituliren, teils erweitern.*)

§ I. Allgemeine Eigenschaften äquidistanter Curvensysteme.

I. Bringt man das Längenelement 1) auf die Form

$$ds^2 = (du + dv)^2 \frac{(1 + f)}{2} + (du - dv)^2 \frac{(1 - f)}{2}$$

oder, wenn $f = \cos z$, $u + v = u'$, $u - v = v'$ gesetzt wird

$$ds^2 = \cos^2 \frac{z}{2} du'^2 + \sin^2 \frac{z}{2} dv'^2, \tag{2}$$

so erkennt man sofort**): *Die Diagonalcurven eines äquidistanten Systems bilden ein Orthogonalsystem, in Bezug auf welches das Längenelement von der Form* 2) *ist.* Umgekehrt ist jedes Orthogonalsystem, für das

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2, \quad e + g = 1$$

ist, Diagonalsystem eines äquidistanten Systemes.

II. Aus dem Ausdrucke für das Krümmungsmass:

$$K = -\frac{z_{uv}}{\sin z}$$

ergiebt sich für die Curvatura integra eines von zwei Paaren der Curven u, v gebildeten Vierseites, dessen innere Winkel A, B, C, D sind:

$$\Gamma = \int K \sin z \, du \, dv = 2\pi - (A + B + C + D);$$

das heisst: *Die Curvatura integra ist gleich dem negativ genommenen Excess der Winkel des Vierseits.****)

III. *Zu einer beliebigen Schar von Curven gehört im Allgemeinen entweder gar keine zweite, die mit ihr ein äquidistantes System bildet, oder nur eine einzige.* Nur auf den *Developpabeln*

---

*) Bereits in meiner früheren Arbeit enthaltene Sätze werde ich unter A mit Hinzufügung der Seitenzahl citiren.

**) A. S. 3.

***) A. S. 3.

kann eine Curvenschar mit *mehreren* Curvenscharen äquidistante Systeme liefern, und dies auch nur dann, *wenn die gegebene Schar aus geodätischen Linien besteht, die bei der Abwickelung in ein System von parallelen Geraden übergehen.* Auch kann nur bei Developpabeln die eine Schar der Curven eines äquidistanten Systems von geodätischen Linien gebildet werden.

IV. Ein äquidistantes Netz, das z. B. die Gestalt eines Rechteckes mit den Seiten AB, AC hat, *kann im Allgemeinen auf einer Fläche so ausgebreitet werden, dass die beiden Seiten* AB, AC *mit zwei beliebig auf der Fläche von einem Punkte* A' *aus gezogenen Curven* A'B', A'C' *zusammenfallen.* Der *Bereich* aber, in welchem eine solche Ausbreitung möglich ist, findet dabei im Allgemeinen bald eine *Grenze*, da der Coordinatenwinkel z von o und π verschieden bleiben muss. Trägt man nämlich von den Punkten einer Curve C auf der Fläche gleich lange unendlich kleine Strecken δs in der Tangentenebene auf, deren Richtung den Winkel φ mit der von C bildet, und denkt man sich das Bogenelement in der Form

$$e^2 du^2 + g^2 dv^2$$

gegeben, aber so, dass $e = 1$ für die gewählte Curve $v = v_0$ ist, so ergiebt sich

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{u} \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_{v_0} \frac{du}{g}$$

falls die Endpunkte der Strecken δs eine Curve C' bilden sollen, die eine auf C unmittelbar folgende eines äquidistanten Systems liefert. Ist daher $\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_{v_0}$ von constantem Vorzeichen, so wird φ im allgemeinen sehr bald die zulässigen Grenzen überschreiten; vorausgesetzt ist dabei natürlich, dass g nicht verschwindet.

Ist die Curve C eine *geodätische* Linie, so ist $\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_{v_0} = 0$ und φ *constant.* Eine geodätische Linie ändert also ihre Länge nur um eine Grösse zweiter Ordnung, wenn ihre Punkte unter constantem Winkel mit ihrer Tangente um eine infinitesimale Strecke δs auf der Fläche verschoben werden. Zieht man jetzt auf der Fläche

zwei geodätische Linien AB, AC, die sich unter dem Winkel α schneiden, und bezeichnet man den vierten Winkel eines Vierseits äquidistanter Linien, von dem zwei anstossende Seiten aus AB, AC gebildet sind, durch β, *so ist der Winkelexcess gleich* $\beta - \alpha$. Bei constanter positiver Krümmung $+1$ ist z. B.

$$\alpha - \beta = F$$

wenn F den Inhalt des Vierseits bedeutet, d. h. β nähert sich mit wachsendem F der Null; bei constanter negativer Krümmung -1 ist dagegen

$$\beta - \alpha = F$$

d. h. β wächst beständig. Beides lässt sich sehr leicht an einer Kugel oder Pseudosphäre zur Anschauung bringen.

V. *Die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien* u, v. Bezeichnet man die geodätischen Krümmungsradien der Curven $v = \text{const}$ $(u = \text{const})$ durch γ, (γ_1) so ist

$$-\frac{1}{\gamma} = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad -\frac{1}{\gamma_1} = \frac{\partial z}{\partial v}$$

Man hat also für die Curvatura integra die Formel

$$\Gamma = \int \frac{\partial \frac{1}{\gamma}}{\partial v}\, du\, dv = \int \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right) du$$

Das liefert den Satz:

Der Excess der Winkelsumme eines von zwei Paaren äquidistanter Curven gebildeten Vierseits ist gleich der Differenz der geodätischen Krümmungen jedes Paares der gegenüberliegenden Seiten.

VI. *Die partielle Differentialgleichung äquidistanter Systeme.**) Legt man ein isometrisches Orthogonalsystem zu Grunde, so dass

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2)$$

ist, so muss nach I

$$\lambda\,(du^2 + dv^2) = e\,du'^2 + g\,dv'^2, \qquad e + g = 1$$

*) A. S. 16.

werden. Daraus ergiebt sich, wenn

$$\mu^2 = \frac{\lambda}{\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - \lambda}$$

gesetzt wird

$$3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial u} &= \mu \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial v} &= - \mu \frac{\partial u'}{\partial u} \end{aligned}$$

sodass die partielle Differentialgleichung für u' wird

$$4) \quad \begin{aligned} &- \lambda \{u'_{uu} + u'_{vv}\} + u'^2_v u'_{uu} + 2u'_u u'_v u'_{uv} + u'^2_u u'_{vv} \\ &+ \left(\frac{u'^2_u + u'^2_v}{2\lambda}\right) (\lambda_u u'_u + \lambda_v u'_v) = 0. \end{aligned}$$

§ II. Bestimmung äquidistanter Systeme auf einzelnen Flächengattungen.

1. Bei jeder Biegung einer Fläche geht ein äquidistantes System wieder in ein solches über; die partielle Differentialgleichung 4) hängt daher auch nur von λ ab. Sie kann auf den *Developpabeln* leicht allgemein integrirt werden. Denn hier geht durch Abwickelung auf die Ebene das Netz über in ein solches mit parallelogrammatischen Maschen, und ein solches entsteht immer durch Translation einer beliebigen Curve.*)

2. Bei den auf eine *Rotationsfläche abwickelbaren Flächen* ist λ eine Function von u allein. Versucht man nun die Gleichung 4) durch die Annahme

$$u' = U + V$$

wo U (V) Function von u (v) allein ist, zu lösen, so folgt

$$V'' + pV' + q = 0$$

wo p und q nur von u abhängen.

*) A. S 18.

Hieraus ergiebt sich, wenn $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$ nicht verschwinden,

$$V' = \text{const.}$$

Setzt man demgemäss $u' = U + av$, so folgt

$$U = k \int \sqrt{\frac{a^2 - \lambda}{\lambda - k^2}} du$$

oder wenn man das Längenelement der Fläche in der gewöhnlichen Form

$$ds^2 = (1 + f'^2) du^2 + u^2 dv^2$$

voraussetzt,

$$5) \quad \begin{aligned} v' &= a \int \frac{du}{u} \sqrt{\frac{u^2 - k^2}{a^2 - u^2}(1 + f'^2)} - kv \\ u' &= k \int \frac{du}{u} \sqrt{\frac{a^2 - u^2}{u^2 - k^2}(1 + f'^2)} + av \end{aligned}$$

Den willkürlichen Constanten a *und* k *entsprechend, erhält man so zweifach unendlich viele Systeme äquidistanter Curven,* wenn man

$$\begin{aligned} u' + v' &= u'' = \text{const} \\ u' - v' &= v'' = \text{const} \end{aligned}$$

setzt. Da aus jeder äquidistanten Teilung der Kugel durch Quadratur eine Fläche negativer constanter Krümmung hergeleitet werden kann, so liefern die Gleichungen 5) zugleich eine von zwei Constanten abhängige Schar von Flächen constanter negativer Krümmung.

Auf gewissen Flächen, bei denen $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial u}$ zum Verschwinden gebracht werden können, lässt sich noch ein *singuläres Netz* äquidistanter Curven angeben, in welches eine Constante nicht eingeht.

3. Ist das Längenelement von der Form

$$\frac{du^2 + dv^2}{U + V}$$

so setze man

$$u' = \int \frac{du}{\sqrt{U - c}}$$

$$v' = \int \frac{dv}{\sqrt{V + c}}$$

wo c eine willkürliche Constante.

4. Bei den *Translationsflächen* endlich liefern die Translationscurven ein äquidistantes System.*) Zur Darstellung an Modellen eignen sich besonders solche Flächen, welche wie z. B. das Paraboloid

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cu^2 + dv^2$$

oder auch die Schraubenfläche

$$z = au, \quad x = b\rho \cos u, \quad y = c\rho \sin u,$$

deren Gleichungen durch die Substitution

$$\rho = kv \cos u, \quad u + v = U, \quad u - v = V$$

die Form

$$2\,z = a(U + V)$$
$$2\,x = bk\,(\cos U + \cos V)$$
$$2\,y = ck\,(\sin U + \sin V)$$

annehmen, unendlich viele reelle Systeme von Translationscurven enthalten.

§ III. **Processe, durch welche aus einer äquidistant geteilten Fläche andere ebenso geteilte Flächen hergeleitet werden.**

Von dem schon erwähnten Process der Biegung abgesehen, scheinen nur wenige verhältnismässig einfach zu realisirende Methoden angebbar zu sein, durch die aus einer Fläche andere abgeleitet werden können, auf denen wieder ein System von Äquidistanten bekannt ist.

Auf den Flächen *negativer constanter Krümmung* und *nur auf diesen* bilden die *Haupttangentencurven* ein äquidistantes

*) A. S. 14.

System.*) Trägt man ferner auf der Normale einer solchen Fläche eine *constante* Strecke auf, so erzeugen die Endpunkte eine *Parallelfläche* der Fläche negativer constanter Krümmung, welche durch die den Haupttangentencurven entsprechenden Curven *wieder äquidistant geteilt ist.*

Wichtiger scheint indessen die ebenfalls leicht zu beweisende Bemerkung, dass *wenn man* — unter u und v die Argumente der Haupttangentencurven verstanden — *auf der Normale die variable Strecke*

$$\lambda = \frac{k}{c} \sin c(u \pm v)$$

aufträgt, wieder zwei einfach unendliche Scharen äquidistant geteilter Flächen entstehen. Unter $-c^2$ ist dabei das Krümmungsmass, unter k eine willkürliche Constante zu verstehen.

Eine allgemeine Untersuchung zeigt, dass aus einem äquidistanten System durch Auftragung einer Strecke auf der Normale nur dann eine durch die Endpunkte dieser Normalen äquidistant geteilte Fläche hervorgehen kann, wenn die Originalfläche entweder eine *Fläche negativer constanter Krümmung*, oder eine *Rotationsfläche,* oder eine *Cylinderfläche*, oder endlich eine *Ebene* ist. In dem ganz speciellen letzteren Falle ergeben sich die schon in III besprochenen Translationsflächen. Durch diesen Satz gewinnt die oben gegebene Construction eine allgemeinere Bedeutung; sie ist, abgesehen von den genannten trivialen Fällen, *nur* bei den Flächen constanter negativer Krümmung möglich.

§ IV. Flächen, welche die Diagonalcurven eines äquidistanten Systems zu Krümmungslinien haben.

Vermöge der leicht zu erweisenden Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{g x_u - f x_v}{\sqrt{H}}\right) = p\left(\frac{gE - fF}{\sqrt{H}}\right) + \frac{x_u g_u - e_v x_v}{2\sqrt{H}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e x_v - f x_u}{\sqrt{H}}\right) = p\left(\frac{eG - fF}{\sqrt{H}}\right) + \frac{e_v x_v - x_u g_u}{2\sqrt{H}}$$

*) A. S. 7. Derselbe Satz findet sich auch schon in der Arbeit von Hrn. *Hazzidakis*, Journ. v. Borchardt, Bd. 88, S. 68, 1878; die Priorität gebührt indessen Hrn. *Dini* (Teorica delle superficie, Ann. di Matematica Ser. II Tom. 4.)

in denen e, f, g; E, F, G die Fundamentalgrössen, $H = eg - f^2$, und x (y, z); p (q, r) die Coordinaten sowie die Richtungscosinus der Normale bedeuten, folgt für

$$e = g = 1, \quad E = G$$

die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u - x_v f}{\sqrt{1 - f^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(x_v - x_u f)}{\sqrt{1 - f^2}}\right)$$

Man kann daher

$$\frac{x_u - x_v f}{\sqrt{1 - f^2}} = X_v$$

$$\frac{x_v - x_u f}{\sqrt{1 - f^2}} = X_u.$$

setzen, wo X, Y, Z die Coordinaten eines Punktes einer neuen Fläche bedeuten, welche durch Quadratur aus der ersten abgeleitet wird, und deren Normale in dem Punkte X, Y, Z mit der Normalen in x, y, z parallel läuft.

Die Voraussetzung E = G bedingt, *dass die Diagonalcurven des äquidistanten Netzes die Krümmungslinien sind.* Auf sie bezogen, nimmt nach § I das Längenelement die Form

$$ds^2 = \cos^2 z \, du^2 + \sin^2 z \, dv^2 \tag{6}$$

an, während es in Bezug auf die Äquidistanten

$$ds^2 = du'^2 + dv'^2 + 2\cos 2z \, du'dv'$$

ist. *Aus jeder dieser Flächen lässt sich durch Quadratur eine Fläche von entgegengesetzt gleichem Krümmungsmass, welche auf die erste äquivalent abgebildet ist, herleiten*, welche wieder auf ihre Krümmungslinien bezogen das Längenelement

$$ds'^2 = du^2 \sin^2 z + dv^2 \cos^2 z$$

besitzt, indem man

$$X_u = x_u \frac{\sin z}{\cos z}, \quad X_v = -x_v \frac{\cos z}{\sin z}$$

setzt. Nimmt man allgemeiner

$$\xi_u = x_u \frac{\cos(z-\alpha)}{\cos z},\ \xi_v = + x_v \frac{\sin(z-\alpha)}{\sin z}$$

wo α eine willkürliche Constante ist, so wird das Längenelement der auf ihre Krümmungslinien bezogenen Fläche ξ, η, ζ

$$ds''^2 = \cos^2(z-\alpha)\, du^2 + \sin^2(z-\alpha)\, dv^2$$

oder auch

$$ds''^2 = du'^2 + dv'^2 + 2\cos 2(z-\alpha)\, du'\, dv'.$$

Aus jeder dieser Flächen kann daher eine einfach unendliche Schar von Flächen hergeleitet werden, deren Krümmungslinien Diagonalcurven eines äquidistanten Netzes sind. Dabei wird der Winkel $2z$, unter dem sich die Curven des Netzes schneiden, den Wert $2(z-\alpha)$ annehmen; zugleich bleiben die geodätischen Krümmungen der äquidistanten Curven ungeändert.

Die Existenz einer ∞^1 Schar wird durch den Umstand bedingt, dass die Bedingungen, denen z genügen muss, nur die Differentialquotienten von z, nicht aber z selbst enthalten.

Die Flächen constanter negativer Krümmung haben in Bezug auf ihre Krümmungslinien das Längenelement 6). Durch die Transformation erhält man indess nur Flächen, welche von den in § III betrachteten Parallelflächen nicht wesentlich verschieden sind. Dabei mag noch erwähnt werden: Eine Fläche, welche ein System von Äquidistanten enthält, längs denen die Normalkrümmungen der Fläche durchweg ein und denselben constanten Wert haben, kann als Parallelfläche einer Fläche negativer constanter Krümmung angesehen werden.

§ V. Flächen, deren Krümmungslinien in mehrfacher Weise die Diagonalcurven äquidistanter Netze bilden.

Eine Fläche, welche in *zweifacher* Weise zu Diagonalcurven eines äquidistanten Systems die Krümmungslinien hat, besitzt in Bezug auf die letzteren das Längenelement

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{U + V}$$

und gestattet demgemäss *eine* ∞^1 *Schar solcher äquidistanter Systeme.* An Stelle derselben kann man auch die Flächen betrachten, welche, wie z. B. die Flächen zweiten Grades das *Liouville*'sche Bogenelement

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$$

besitzen. Auf die weiteren hierher gehörigen Untersurchungen, die eine grosse Anzahl merkwürdiger Beziehungen vermöge des in § IV betrachteten Processes liefern, kann indess an diesem Orte nicht eingegangen werden, da es in bequemer Weise kaum ausführbar scheint, sie durch Modelle der Anschauung näher zu bringen.

Würzburg, den 15. Juli 1892.

Über die Auflösung höherer Singularitäten einer algebraischen Curve in elementare.

Von A. Brill in Tübingen.

Dass durch Zeichnungen und Modelle der Geometrie Gedanken von weittragender Bedeutung erwachsen sind, die dem bloss rechnenden Mathematiker so gut wie dem abstracten Synthetiker verborgen geblieben wären, wird niemand bestreiten, der *Newton's* enumeratio linearum curvarum tertii ordinis oder *Cramer's* Analyse des lignes courbes oder *Plücker's* grundlegende geometrische Werke eingesehen hat. Aber nachdem es der projectiven Geometrie gelungen war, die Theorie der Kegelschnitte von der Vorstellung des einzelnen Falles loszulösen, galt es eine Zeitlang für überflüssig und nicht schicklich, ein geometrisches Werk mit Figuren auszustätten. Man konnte sie leicht entbehren, denn das Interesse jener Zeit beschränkte sich auf solche Eigenschaften der geometrischen Gebilde, die von ihrer reellen Existenz unabhängig waren. Zu neuem Ansehen verhalfen der sinnlichen Darstellung erst wieder die Entdeckungen von *Zeuthen* und *Klein* über die Realitätsverhältnisse der algebraischen Curven, die an die Figur direct anknüpften. Noch heute bieten die Tafeln, die den oben genannten Werken angehängt sind, und denen sich die zu *Zeuthen's* „Systemer af plane Kurver" (Abh. d. Akad. zu Kopenhagen, Bd. 10, 1873) anreihen, eine Fülle von Anschauung, die jeden mit Vorstellungskraft Ausgestatteten aufs lebhafteste anmuten. Lehrreich ist besonders die Darstellung ganzer Systeme von Curven mit veränderlichen Parametern, zumal für das Verständnis von Curven mit besonderen Vorkommnissen, welche zwischen andern einfachen eingeschaltet auftreten. Es hat einen Reiz, zu verfolgen, wie mit der Veränderung der Constanten der Zusammenhang der

Zweige sich ändert, wie Ovale durchs Unendliche sich dehnend auf der gegenüberliegenden Seite der Zeichenebene wieder zum Vorschein kommen, wie Curvenäste durch Bildung neuer Doppelpunkte sich mit anderen vereinigen oder abschnüren, oder wie einfach singuläre Punkte mit andern zu höhern zusammenwachsen.

Solche Beobachtungen an der Zeichnung waren es, die mich veranlassten, das Hilfsmittel der stetigen Deformation von Curven mit gewöhnlichen Singularitäten in solche mit zusammengesetzten „maskirten" in grundsätzlicher Weise für das Verständnis der letzteren zu verwerten, wobei dann später das Bedürfnis einer strengern Begründung gebot, die Anschauung durch algebraische Methoden zu ersetzen.

Die Singularitäten erscheinen zur Zeit — hauptsächlich durch die oben genannten Arbeiten — in den Mittelpunkt der Theorie der algebraischen Curven gerückt. Seit *Puiseux's* Untersuchungen nimmt auch die Theorie der algebraischen Functionen an ihnen ein hervorragendes Interesse, an sie knüpft seit *Riemann* und *Clebsch* der Begriff des Geschlechtes an. Nach beiden Richtungen hin, der geometrischen wie der functionentheoretischen, erweist sich der Satz von Cayley über die Äquivalenz einer höheren Singularität mit einer gewissen Anzahl von elementaren als wichtig. Aber es fehlte lange an einer Begründung und Umgrenzung desselben. *H. J. S. Smith* hat in dieser Absicht die Reihenentwickelungen, die eine Singularität definiren, auf den Einfluss untersucht, den sie auf die Discriminanten der Curvengleichung und der zu ihr reciprocen Gleichung besitzen, und ist zu wichtigen Beziehungen zwischen den zugehörigen Zahlen gelangt. Aber abgesehen davon, dass Smith's Beweis zum Teil auf nicht algebraischer Grundlage beruht und indirect ist, lässt er auch die Frage unerledigt, ob jene Äquivalenz mehr als bloss eine numerische ist, d. h. inwieweit jede höhere Singularität durch wirkliches Zusammenrücken von nur einfachen (elementaren) singulären Punkten *entstehen* kann.

In einer Abhandlung „Über die Singularitäten algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies" (Math. Annalen Bd. 17) habe ich versucht, durch stetige Umwandlung einer Curve, welche mit einer beliebigen, durch vorgegebene Entwickelungen definirten

Singularität behaftet ist, in eine solche von gleicher Ordnung, Classe und gleichem Geschlecht, welche nur die einfachen Vorkommnisse aufweist, die zuletzt aufgeworfene Frage zuerst und damit implicite auch die frühere zu beantworten.

Der vorliegende Anlass legt es nahe, auf den Ausgangspunkt für diese Untersuchung: die *gestaltliche* Deformation, zurückzugreifen. Dies erfordert indess, wenn die Grundlage sicher sein soll, algebraische Entwickelungen, die ich im Anschluss an eine Übersicht über die Ergebnisse jenes Aufsatzes voranzustellen mir erlauben werde.

Die Absicht ist zunächst die, nachzuweisen, dass mit dem Auftreten einer höheren Singularität in die Formeln für das Geschlecht, die Classe der Curve und die Anzahl ihrer Wendepunkte zwei ganze Zahlen linear eintreten, welche zusammen mit noch zwei andern ihnen dualistisch entsprechenden in Hinsicht auf die Plücker'schen Formeln die Singularität vollständig charakterisiren. — Von der Grösse dieser Zahlen, die durch das Verhalten der adjungirten Curven, bezw. der ersten Polare und der Hesse'schen Curve bestimmt ist, sehen wir hier ab.

In jener Abhandlung wird nun gezeigt *), dass jede durch Reihenentwickelungen definirte Singularität vorkommen kann auf einer „rationalen" Curve (einer Curve vom Geschlecht Null, deren Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters darstellbar sind) von übrigens noch besondern Eigenschaften, darunter der, dass Ordnung und Classe gleich und, weil bestimmt durch die Stelle, wo man die Reihenentwickelungen abbricht, noch in gewissen Grenzen willkürlich annehmbare Zahlen sind.

Bekannt ist das Verhalten der ersten Polaren, der Hesse'schen und der adjungirten Curve in den *einfachsten* Singularitäten: Doppelpunkt (mit getrennten Tangenten) und Rückkehrpunkt. Für Curven, die keine vielfachen höhern Punkte enthalten, ist die Anzahl der Wendepunkte linear von der Anzahl jener einfachsten Singularitäten abhängig, ebenso das Geschlecht und die Classe der Curve.

Doppel- und Rückkehrpunkte nebst den ihnen dualistisch entsprechenden Doppeltangenten und Wendetangenten (-punkten)

*) Die Ausführung für einen besondern Fall findet man unten.

mögen *„elementare Singularitäten"* genannt werden. Für die rationalen Curven lassen sich nach Clebsch (Crelle's Journal, Bd. 64) Gleichungen bilden, denen die Werte der Parameter genügen, die den elementaren Singularitäten zugehören. Kommen sie getrennt vor, so sind die Wurzeln verschieden. Der Grad dieser Gleichungen entspricht der Anzahl, bezw. der doppelten Anzahl der betreffenden mit endlichem Parameter versehenen ausgezeichneten Stellen der Curve.

Die vier Gleichungen können mehrfache Wurzeln erhalten, wenn eine höhere Singularität auftritt. Hat man die ihr entsprechende Vielfachheit ermittelt, so fragt es sich, ob diese Zahlen bereits die an der Geschlechtsformel und in den Plücker'schen Gleichungen anzubringende Reduction bestimmen. Ist dies für die rationale Curve gezeigt, so gilt es für jede andere algebraische Curve, weil in der Umgebung der singulären Stelle das Verhalten ihrer Polaren u. s. w. mit dem für die rationale übereinstimmt.

Nun lässt sich die rationale Curve, welche die Singularität besitzt, durch genau definirte kleine Constantenänderungen in eine andere rationale überführen, für welche die Gleichungen, denen die elementaren Singularitäten genügen, an Stelle der mehrfachen Wurzeln lauter verschiedene haben, die von diesen sich beliebig wenig unterscheiden, und deren Anzahl je gleich dem Exponenten des mehrfachen Factors ist. Durch vorgängige passende Wahl des Grades der rationalen Curve kann man ferner bewirken, dass alles Übrige, also namentlich auch die sonstigen im Endlichen gelegenen singulären Punkte und die im Unendlichen gelegene höhere Singularität bei der Variation an Zahl und an Charakter sich nicht ändern. Weil nun auch noch Grad, Classe, Geschlecht der Curve dieselben bleiben, so müssen auch die von der betrachteten Singularität herrührenden Zahlen, die in die Plücker'schen Ausdrücke eingehen, von der Variation unberührt bleiben. Und zwar bezieht sich dies nicht nur auf die beiden ersten Formeln (für Classe und Wendepunkte), sondern, wegen der Unveränderlichkeit der Factorenzahl für alle vier Gleichungen, auch auf die ihnen dualistisch entsprechenden.

Jene Vielfachheitszahlen definiren hiernach nicht bloss die Reductionen an den Formeln für das Geschlecht u. s. w. — dies

hatte schon H. J. S. Smith bewiesen —, sondern es ist auch dargethan, dass die gleichen Factoren durch verschiedene vertreten werden können, d. h. dass in den angegebenen Beziehungen jede höhere Singularität durch eine Anzahl ihr äquivalenter elementarer *ersetzbar* ist.

Jene Curvengattung, der sowohl die mit der höheren Singularität behaftete als die variirte Curve angehört, hat die Eigenschaft, durch die (ihrerseits von einander unabhängigen) Gleichungen, denen die Parameter der Wendepunkte und der Rückkehrpunkte genügen, völlig bestimmt zu sein. Die willkürlichen Veränderungen betreffen daher nur die gleichen Linearfactoren dieser beiden Gleichungen, wodurch dann diejenigen für die Parameter der Doppelpunkte und der Doppeltangenten eindeutig bestimmt sind, und zwar, wenn man gewisse besondere Wertsysteme der Variationen ausschliesst, in der Weise, dass auch sie nur verschiedene Wurzeln besitzen.

Die Ausstellung, die diesen Aufsatz veranlasst hat, enthält einige Blätter mit Zeichnungen, die Übergänge darstellen, bei denen eine höhere Singularität sich in die äquivalenten elementaren auflöst. Sie entsprechen dem besondern Fall, dass dieselbe eine „unicursale“ ist (ein „superlinear branch“ nach Cayley), d. h. dass ihre Entwickelungen einen einzigen Cyklus bilden. Wir stellen hier die algebraischen Hilfsmittel für die Behandlung dieses Falles zusammen.

Die Entwickelungen in einem unicursalen Element (es enthält nur *einen* reellen Curvenzweig, wenn die Entwickelungscoëfficienten reell sind) können zusammenfassend dargestellt werden durch eine Reihe für die Ordinate y, die im Allgemeinen nach gebrochenen Potenzen der Abscisse x aufsteigt:

$$y = a_0 x^{\frac{q}{p}} + a_1 x^{\frac{q_1}{p}} + \dots ,$$

wo die $a_0\, a_1 \dots\dots$ Constante; $p,\ q < q_1 < q_2 < \dots$ ganze positive Zahlen sind, und wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit $q > p$ angenommen werden kann.

Setzt man diese Reihe, die, als dem Element einer algebraischen Function zugehörig, nach Cauchy immer einen Convergenzbereich in der Umgebung von $x = o$, $y = o$ besitzt, fort bis zu dem Glied:

$$a_k x^{\frac{q_k}{p}},$$

für das noch q_k und p teilerfremd sein mögen*), so kann man setzen:

$$x = \lambda^p = x(\lambda);$$
$$y = a_0 \lambda^q + a_1 \lambda^{q_1} + \ldots + a_k \lambda^{q_k} = y(\lambda).$$

Diese Gleichungen stellen nun eine „rational ganze" Curve dar, für welche

1) die Gleichung $\rho(\lambda) = o$ für die Parameter aller im Endlichen vorkommenden Rückkehrpunkte gegeben ist durch:

$$\frac{dx}{d\lambda} = x'(\lambda) = o,$$

also durch:

$$\rho(\lambda) = p\lambda^{p-1} = o \tag{1}$$

2) Die Gleichung $\omega(\lambda) = o$ für die Parameter der Wendepunkte der Curve ist:

$$\omega(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{y'(\lambda)}{x'(\lambda)}\right) = \frac{1}{p}\lambda^{q-p-1}\left(a_0(q-p) + a_1 q_1(q_1-p)\lambda^{q_1-q} + \ldots\right) \ldots \tag{2}$$

3) wo ferner die Parameter λ, λ_1 der zwei in einem Doppelpunkt sich durchsetzenden Zweige den Gleichungen genügen:

$$\frac{x(\lambda_1) - x(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = o \qquad \frac{y(\lambda_1) - y(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = o \tag{3}$$

oder, in λ und $D = \lambda_1 - \lambda$ geschrieben (a. a. O. S. 376, wo einige Zahlencoëfficienten der einen Formel hiernach zu verbessern sind):

$$\text{(3a)} \quad \begin{cases} o = \rho + \rho' \dfrac{D}{2} + \rho'' \dfrac{D^2}{3!} + \ldots \\ o = \dfrac{1}{3!}\left(\rho\omega' + \dfrac{\omega\rho'}{2}\right) + \dfrac{D}{4!}(\rho\omega'' + 3\rho'\omega' + \rho''\omega) \\ \quad + \dfrac{D^2}{5!}\left(\rho\omega''' + 4\rho'\omega'' + 6\rho''\omega' + 3\dfrac{\rho'''\omega}{2}\right) + \ldots \end{cases}$$

*) Bezüglich der Bedeutung dieser Annahme vergl. man a. a. O. § 5 (S. 378) und § 9 (S. 401).

In diesen Formeln sind durch Striche die Ableitungen nach λ bezeichnet, $3! \text{ ist } = 1 . 2 . 3$, u. s. w.

4) Endlich ergeben sich die Parameter der Berührungspunkte der Doppeltangenten aus Gleichungen wie (3), gebildet für die *Liniencoordinaten* u, v, die mit x, y durch die Gleichung zusammenhängen: $ux - y - v = o$; oder kürzer nach Vertauschung von ω mit ρ aus (3a).

Es folgt aus diesen Gleichungen, dass die der singulären Stelle entsprechende Wurzel $\lambda = o$: $(p - 1)$fach in der Gleichung für die Rückkehrpunkte, $(q - p - 1)$fach in der für die Wendepunkte (-tangenten) und, wenn p und q teilerfremd sind*), $\frac{1}{2}(p - 1)(q - 3)$fach bez. $\frac{1}{2}(q - p - 1)(q - 3)$fach in den Gleichungen für die eigentlichen Doppelpunkte (mit getrennten Tangenten) und für die Doppeltangenten auftritt.

Statt auf die obigen Ausdrücke $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ kann man die Definition der Curve auch auf die Annahme der ganzen Functionen $\rho(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ stützen. In der That, es ist:

$$x(\lambda) = \int_0^\lambda \rho(\lambda)\, d\lambda \qquad u(\lambda) = \int_0^\lambda \omega(\lambda)\, d\lambda$$

$$y(\lambda) = \int_0^\lambda \rho(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda \qquad v(\lambda) = ux - y = \int_0^\lambda x(\lambda)\, \omega(\lambda)\, d\lambda$$

Die vollkommene Analogie der so definirten Linien- mit den Punktcoordinaten springt in die Augen.

Der Process der *Constantenvariation* besteht nun darin, dass man an Stelle des Factors von $\rho(\lambda)$ [bezw. von $\omega(\lambda)$], der aus einer Potenz von λ besteht, je eine ganze Function in λ von gleichem Grade setzt, deren Coëfficienten — bis auf den der höchsten Potenz — sehr kleine willkürlich angenommene Grössen sind. Man substituire also für $\rho(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ die ganzen Functionen:

$$\rho_1(\lambda) = p(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \ldots\ldots (\lambda - \alpha_{p-1})$$

$$\omega_1(\lambda) = \frac{1}{p}(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2) \ldots\ldots (\lambda - \beta_{q-p-1})$$

$$\left(a_0(q - p) + a_1 q_1 (q_1 - p) \lambda^{q_1 - q} + \ldots\ldots\right),$$

*) Die Modificationen, die diese Zahlen erfahren, wenn p, q nicht teilerfremd sind, findet man a. a. O. § 9 S. 400 angegeben.

die sich, wenn alle α und β gleich Null sind, auf $\rho(\lambda)$ und $\omega(\lambda)$ reduciren, und bilde nun wieder mit Hilfe von ρ_1 und ω_1 die Ausdrücke für x, y, u, v wie oben. Den willkürlich annehmbaren kleinen Grössen α, β entsprechen dann „penultimate“ Curvenformen, welche diejenigen elementaren Singularitäten *nebeneinander* enthalten, die in der höheren Singularität *vereinigt* sind. In Bezug auf die Wendepunkte (α) und die Rückkehrpunkte (β) verfügt man über Anordnung, Realität u. s. w. durchaus unbeschränkt. Was die Doppelpunkte und -Tangenten angeht, so wird die Forderung, dass sich die in der penultimaten Form auftretenden nicht wieder zu mehrfachen Punkten u. s. w. vereinigen, erfüllt, wenn man vermeidet, die α, β so zu wählen, dass weder die Discriminante der aus (3a) durch Elimination von D entstehenden „Doppelpunktsgleichung“ in λ, noch die für die Doppeltangentengleichung verschwindet, sowie dass die Resultante aus je zweien der vier Gleichungen Null wird.

Aus dem Studium dieser Discriminanten und Resultanten ergab sich ein merkwürdiger Satz, der sich auf den Fall *reeller* Coëfficienten in der Entwicklung und der variirten Parameterausdrücke für x, y bezieht. Bezeichnet man mit r und w die Gesamtzahl der Grössen α bezw. β, d. h. der aus der Singularität hervorgegangenen Rückkehr- und Wendepunkte, mit r' und w' die *reellen* unter diesen, mit d' und t' die isolirten (aus der Singularität hervorgegangenen) Doppelpunkte und Doppeltangenten, so besteht, wie auch die Auflösung erfolgen möge, immer die Beziehung:

$$r' - w' + 2(d' - t') = r - w.$$

Der Betrag der linken Seite dieser Gleichung, der auch im Falle einer mehrelementigen Singularität von der Art der Variation nicht abhängt, ist in den ausgestellten Blättern für jede Singularität als ihr „Realitätsindex“ besonders angeführt.

Die ausgestellten Zeichnungen und die zugehörigen Rechnungen hat im Jahre 1883 Herr *Ch. Schultheiss*, damals Studirender der Mathematik an der technischen Hochschule in

München, ausgeführt. Die Zahlenannahmen sind auf den Blättern selbst bemerkt, die Bezeichnungen die dieser Note. Um die Singularitäten auch für das Auge zu trennen, hat man die Ordinaten teilweise in anderem Masstab wie die Abscissen aufgetragen.

Eine Vorstellung von den Zeichnungen mögen die folgenden Beispiele geben:

1. Beispiel. Entwicklung: $y = x^{\frac{4}{3}} + \ldots$, oder $x = \lambda^3$, $y = \lambda^4$. $\rho(\lambda) = 3\lambda^2 = 0$ ist die Gleichung für die Rückkehrpunkte. Wendepunkte $\left(\omega(\lambda) = \frac{4}{3}\right)$ existiren keine. Setzt man

$$\rho_1(\lambda) = 3(\lambda^2 - \varepsilon), \qquad \omega_1(\lambda) = \omega(\lambda) = \frac{4}{3},$$

so erhält man für die Punkt- und Liniencoordinaten der variirten Curve:

$$x = -3\varepsilon\lambda + \lambda^3 \qquad u = \frac{4}{3}\lambda$$

$$y = -2\varepsilon\lambda^2 + \lambda^4 \qquad v = -2\varepsilon\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^4$$

Für die Doppelpunktsparameter hat man die Gleichungen:

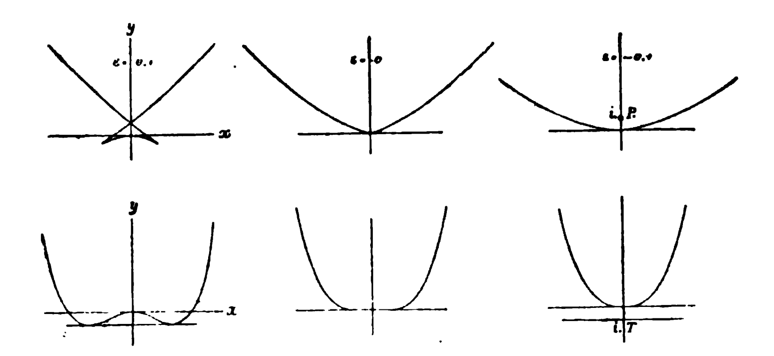
$$0 = 3(\lambda^2 - \varepsilon) + 3\lambda D + D^2$$

$$0 = \lambda + \frac{D}{2},$$

Daher: $\lambda = -\lambda_1 = \sqrt{3\varepsilon}$, oder einen Doppelpunkt in $x = 0$, $y = 3\varepsilon^2$. Doppeltangenten treten (im Endlichen) nicht auf. Die Rückkehrpunkte sind: $x = \pm 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, $y = -\varepsilon^2$. Der Realitätsindex ist $= 1$. Die Gleichung einer der adjungirten Curven $(n-1)$ter (oder von niedrigerer) Ordnung lässt sich in der Form darstellen (a. a. o. § 11 S. 407):

$$x(y + \varepsilon^2) = 0.$$

Im Folgenden sind drei Typen gezeichnet nebst ihren reciprocen Formen, indem einmal x, y, das anderemal $0{,}15\,u$, v als rechtwinklige Coordinaten aufgetragen sind.



2. Beispiel. Entwickelung $y = x^{\frac{5}{3}} + \ldots.$ oder $x = \lambda^3$, $y = \lambda^5$. $\rho(\lambda) = 3\lambda^2 = 0$; $\omega(\lambda) = \frac{10}{3}\lambda = 0$ sind die Gleichungen für die Rückkehr- und Wendepunkte. Man setze für die variirte Curve:

$$\rho_1(\lambda) = 3(\lambda^2 - \varepsilon); \qquad \omega_1(\lambda) = \frac{10}{3}(\lambda - \eta).$$

Dann wird:

$$x = -3\varepsilon\lambda + \lambda^3$$
$$y = 5\varepsilon\eta\lambda^2 - \frac{5}{3}\varepsilon\lambda^3 - \frac{5}{2}\eta\lambda^4 + \lambda^5$$
$$u = -\frac{10}{3}\eta\lambda + \frac{5}{3}\lambda^2$$
$$v = 5\varepsilon\eta\lambda^2 - \frac{10}{3}\varepsilon\lambda^3 - \frac{5}{6}\eta\lambda^4 + \frac{2}{3}\lambda^5$$

Die Coordinaten der Rückkehrpunkte sind:

$$x = \pm 2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}; \qquad y = \varepsilon^2\left(\frac{5}{2}\eta \pm \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Die Gleichung für die Parameter der Doppelpunkte ist:

$$\varkappa^4 + 2\varkappa^3 a + \varkappa^2(4a^2 - 7) + 4\varkappa a + 12a^2 + 16 = 0,$$

wo $a = \frac{5}{4}\frac{\eta}{\sqrt{-\varepsilon}}$ und $\varkappa = \frac{\lambda}{\sqrt{-\varepsilon}}$ ist.

Die Discriminante dieser Gleichung ist:

$$\varepsilon(\eta^2 - \varepsilon)(25\eta^2 - 16\varepsilon)^4,$$

wo der erste Factor dem Zusammenrücken der zwei Spitzen, der zweite dem Auftreten einer Schnabelspitze, der dritte dem Aufrücken einer Spitze auf einen gewöhnlichen Curvenzweig entspricht.

Für $\eta = 0$ erhält man, wenn ε negativ ist, isolirte Doppelpunkte in

$$x = 4\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}\,; \qquad y = \frac{16}{3}\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}.$$

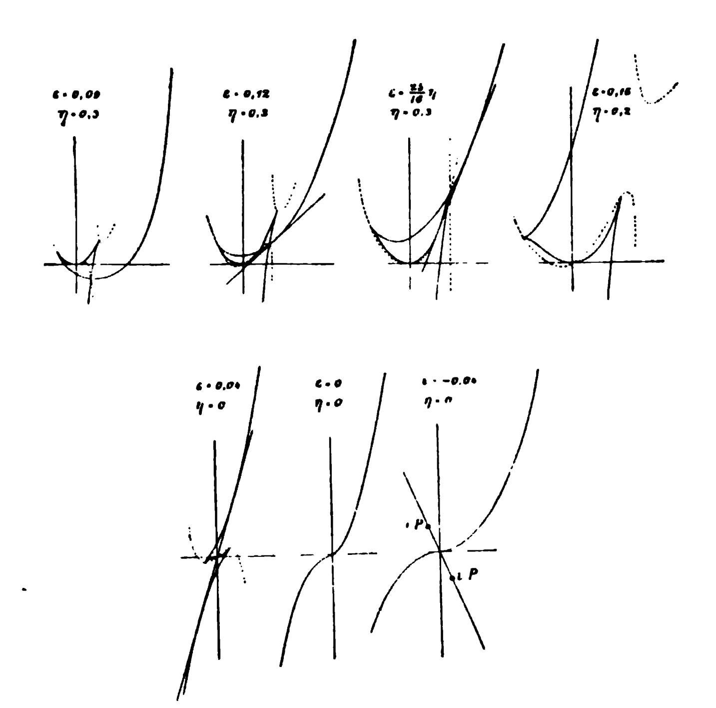
Der Realitätsindex ist $= 1$.

Ich füge noch die Gleichung einer adjungirten Curve dritter Ordnung (s. oben) an, die schematisch (punktirt) eingezeichnet ist:

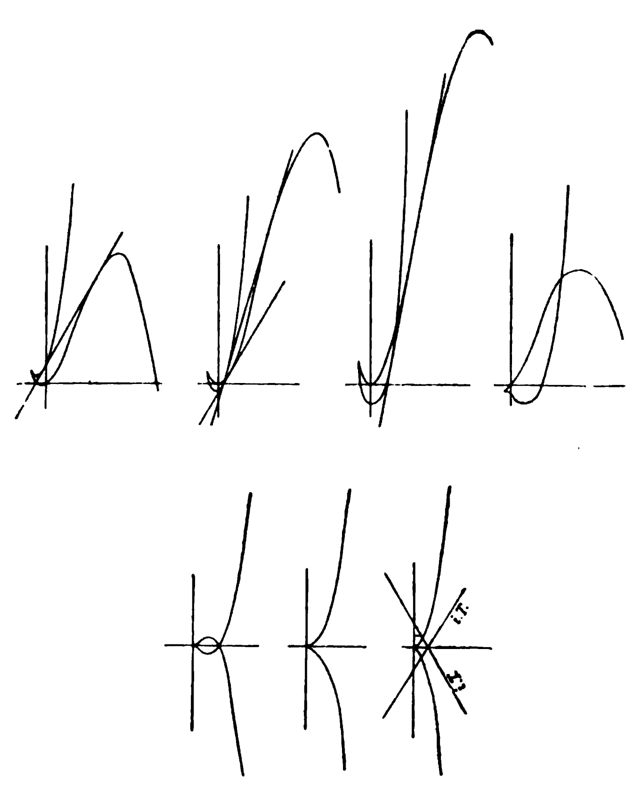
$$(y - \alpha x)(x - \beta) = x(x - \gamma)^2 \delta$$

wo $\alpha = \frac{4}{3}\varepsilon$, $\beta = \frac{8}{5}\frac{\varepsilon^2}{\eta}$, $\gamma = \frac{5}{2}\varepsilon\eta$, $\delta = \frac{2}{5\eta}$

ist, und lasse hier einige Typen folgen (die Ordinaten sind im 10fachen Masstab der Abscissen aufgetragen):



Die entsprechenden reciprocen Formen, die durch Auftragen von $\frac{u}{5}$ und $10\,v$ als rechtwinkligen Coordinaten entstehen, sind:



3 Beispiel (Schnabelspitze): $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}} + \ldots$ oder $x = \lambda^2$, $y = \lambda^4 + \lambda^5$.

Für $\rho_1 = 2\lambda$,

$$\omega_1 = \left(4 + \frac{15}{2}\lambda\right)(\lambda - \varepsilon) = \frac{15}{2}\left(\lambda^2 + \frac{8}{15}\lambda a + \frac{b}{5}\right),$$

wo $a = 1 - \frac{15}{8}\varepsilon$, $b = -\frac{8}{3}\varepsilon$ gesetzt ist, wird:

$$x = \lambda^2 \qquad u = \frac{3}{2}b\lambda + 2a\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda^3$$

$$y = b\lambda^3 + a\lambda^4 + \lambda^5 \qquad v = \frac{b}{2}\lambda^3 + a\lambda^4 + \frac{3}{2}\lambda^5.$$

Die Parameter des Doppelpunktes sind: $\lambda = -\lambda_1 = 2\sqrt{\frac{2\varepsilon}{3}}$.

Die Gleichung für die Berührpunkte der Doppeltangente lautet:

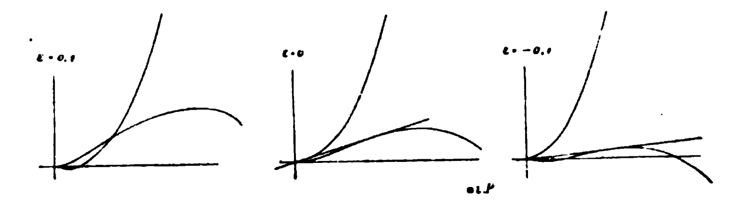
$$o = (\frac{5}{2}\lambda^2 - 2a\lambda - 2b)^2 + (\frac{5}{2}\lambda - a)(5a\lambda^2 + \frac{15}{2}b\lambda + ab).$$

Ihre Discriminante zerfällt wieder in Factoren:

$$b(4a^2 - \frac{45}{4}b)(a^2 + 5b)^4,$$

deren Verschwinden dem Auftreten einer Schnabelspitze, dem Zusammenrücken zweier Wendepunkte und dem Falle, dass eine Wendetangente noch einmal berührt, entsprechen Der Realitätsindex ist = o.

Die folgenden Typen zeigen den Übergang von positiven Werten von ε durch Null zu negativen (die Ordinaten sind in doppeltem Masstab aufgetragen):



Die Zerfällung der Discriminanten der Singularitätengleichungen für die hier betrachteten besonderen rationalen Curven, die inzwischen Herr *F. Meyer* (Math. Ann. Bd. 38) auf allgemeine rationale ausgedehnt hat, besitzt insofern eine weitere Bedeutung, als sie den algebraischen Kern einer bekannten Relation zwischen den reellen Singularitäten einer algebraischen Curve, die Herr *F. Klein* aufgestellt hat (Math. Ann. Bd. 10), wenigstens für rationale Curven blosslegt.

Tübingen, im Juli 1892.

Über die constructiven Postulate der Raumgeometrie in ihrer Beziehung zu den Methoden der Darstellenden Geometrie.

Von G. Hauck in Berlin.

Einleitung.

Für das Arbeitsgebiet der Darstellenden Geometrie sind hauptsächlich zwei Gesichtspunkte massgebend: 1) die Aufgabe, gegebene drei-dimensionale Objecte durch zweidimensionale Gebilde darzustellen oder abzubilden, 2) die Aufgabe, die ideellen räumlichen Constructionen, welche bei der Lösung von geometrischen Problemen zunächst nur in der inneren Vorstellung vollzogen werden, praktisch zu verwirklichen.

Man geht bei dem gewöhnlichen Lehrgang in der Regel von der ersten Aufgabe aus, indem man, anknüpfend an den natürlichen Sehprocess die verschiedenen Abbildungsmethoden entwickelt, und behandelt dann die zweite Aufgabe auf Grund der ersten, indem man die Constructionen, die eigentlich an den Raumobjecten selbst zu vollziehen wären, in deren Abbildungen ausführt. Auch der geschichtliche Entwicklungsgang der Wissenschaft weist auf diesen Weg als den naturgemässen; der Begriff der Projection stand bereits zur Verfügung, als die wissenschaftliche Behandlung der zweiten Aufgabe in Angriff genommen wurde.

Trotzdem bietet der Versuch, den umgekehrten Weg zu gehen, das heisst: die zweite Aufgabe an die Spitze zu stellen und unabhängig von dem Begriff der Abbildung zu behandeln, ein hohes Interesse. Das Bestreben, die ideellen Raumconstructionen zu realisiren, hat an und für sich mit dem Sehprocess nichts zu schaffen. Erst durch die Behandlung dieser Aufgabe

a priori, wie sie im folgenden versucht werden soll, gewinnt man ein klares Urteil über die *innere Notwendigkeit* der Methoden, die zur Lösung der Aufgabe dienen; man erkennt, was an den ihnen zu Grunde liegenden Anschauungen notwendig und aus welchen Zweckmässigkeitsgründen das Nicht-notwendige aufgenommen ist.

Man wird bei einem solchen Versuche von den ideellen *constructiven Postulaten* der Raumgeometrie ausgehen müssen, welche man auf wirklich vollziehbare Operationen zu reduciren bestrebt sein wird.

Eine Erörterung jener Postulate möchte schon an sich angezeigt erscheinen. Es will mich bedünken, als ob darüber vielfach eine gewisse Unbekümmertheit und Unklarheit herrschte, und als ob namentlich die Verschiedenheit, die in dieser Beziehung zwischen den Anschauungen der *Euklidischen* Geometrie und der *neueren* Geometrie besteht, nicht genügend zum Bewusstsein gekommen wäre. Während den *Axiomen* der Geometrie die eingehendsten Untersuchungen gewidmet worden sind, hat man sich hinsichtlich der *Postulate* meist nur auf die Constructionen in der Ebene beschränkt (Mascheroni, Steiner). Das Problem der Bestimmung des Schnittpunkts einer Geraden mit einer Ebene scheint mir in seiner fundamentalen Bedeutung für die räumlich-constructive Geometrie, wie sie bei den folgenden Betrachtungen zu Tage treten wird, bisher nicht genügend gewürdigt worden zu sein.

§ 1. Die constructiven Postulate der Euklidischen und der neueren Geometrie.

Euklid stellt zunächst für die Ebene die Postulate auf: Es sei möglich,

1) von jedem Punkt nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen,

2) eine begrenzte gerade Linie stetig gerade fort zu verlängern,

3) aus jedem Punkte in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

Diese Postulate übertragen sich dann auch auf den Raum, insoferne sich ihre Giltigkeit auf *jede* durch drei Punkte bestimmte Ebene erstreckt. Euklid denkt sich also, es sei immer möglich, ***durch irgend drei beliebige Punkte des Raumes eine Ebene zu legen und in ihr die Constructionen der ebenen Geometrie auszuführen.*** Man könnte diese letztere Forderung, die Euklid zwar nicht direct ausspricht, deren Voraussetzung aber aus seinen thatsächlichen Constructionen folgt, zu den obigen drei planimetrischen Postulaten noch als ergänzendes ***stereometrisches Postulat*** hinzufügen.

Jede ausgedehntere räumliche Construction setzt sich aus gewissen Fundamentalconstructionen zusammen. Von diesen ist die bedeutsamste die Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen oder des Schnittpunktes einer geraden Linie mit einer Ebene. Da sich jede dieser zwei Aufgaben unmittelbar auf die andere zurückführen lässt, so ist es gleichgiltig, welche man als die ursprüngliche nimmt. Wir geben im folgenden der zweiten den Vortritt und bezeichnen sie kurz als *„Schnittpunktproblem"*.

Merkwürdigerweise gibt sich nun bei Euklid, dessen constructiver Inhalt überhaupt ein beschränkter ist, nirgends ein Anlass zur Anwendung jener zwei Aufgaben, so dass er keinen Grund hat, sich überhaupt mit denselben zu befassen. Dagegen gibt er die Lösung der Aufgabe: auf eine gegebene Ebene von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkt eine Senkrechte zu fällen, — mit deren Hilfe sich das Schnittpunktproblem sofort erledigt.

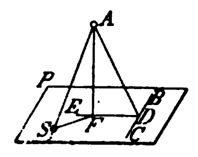


Fig. 1.

Um von einem Punkt A (vergl. Fig. 1) eine Senkrechte auf eine Ebene P zu fällen, zieht man in P eine beliebige Gerade BC, fällt (in der durch BC und A bestimmten Ebene) $AD \perp BC$, errichtet (in der Ebene P) $DE \perp BC$ und fällt (in der durch AD und DE gedachten Ebene) $AF \perp DE$: so ist AF die verlangte Senkrechte.

Soll nun der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene bestimmt werden, so fällt man (vergl. Fig. 1) von einem beliebigen Punkt A der gegebenen Geraden die Senkrechte AF auf die gegebene Ebene und errichtet in der durch die Gerade und die

Senkrechte gedachten Ebene auf AF in F eine Senkrechte: so schneidet diese die gegebene Gerade in dem gesuchten Schnittpunkt S.

Es möchte vielleicht auffallend oder gar paradox erscheinen, dass die Lösung dieser Aufgabe, die wir doch als *lineare* Aufgabe zu betrachten gewöhnt sind, die mehrfache Anwendung des *Zirkels* verlangt. Eine Lösung, die bloss mit geraden Linien operirt, lässt sie nicht zu.

Es hängt dies eben mit den durch die Euklidischen Postulate gegebenen Constructionsbedingungen zusammen und dürfte in letzter Instanz zu der *Theorie der Ebene* in Beziehung zu bringen sein.

Mit der Anschauungsweise der *neueren Geometrie* steht es allerdings in directem Widerspruch. Diese hilft sich denn auf einfache Weise dadurch, dass sie für ihre Constructionen das *neue Postulat* einführt: es sei mit einer Geraden und einer Ebene eo ipso auch deren Schnittpunkt, oder mit zwei Ebenen eo ipso auch deren Schnittlinie bestimmt. Der Begriff *„lineare Construction“* wird von der Ebene auf den Raum übertragen; während er aber dort die blosse Benützung von geraden Linien in sich schliesst, kommt im Raum noch die Ebene hinzu, und es wird nun, entsprechend dem analytischen Ursprung jenes Begriffes der Schnitt zweier Ebenen oder einer Ebene mit einer Geraden ganz ebenso postulirt wie in der Ebene der Schnitt zweier Geraden.

Es findet sich zwar dieses Postulat meines Wissens nirgends ausdrücklich ausgesprochen, es wird nur stillschweigend, vielleicht auch unbewusst angenommen. Aber über seine thatsächliche Annahme kann kein Zweifel bestehen. Wenn man z. B. sagt, durch den Schnitt eines Ebenenbüschels mit einer geraden Linie sei eine Punktreihe bestimmt, so denkt niemand daran, die einzelnen Schnittpunkte alle erst durch besondere Constructionen zu ermitteln, sondern die Schnittpunkte sind mit dem Ebenenbüschel und der Geraden eo ipso vorhanden. Schon das Dualitätsprincip verlangt mit Notwendigkeit eine Gleichberechtigung zwischen Punkt und Ebene; wenn daher die Bestimmung der Verbindungslinie zweier Punkte postulirt wird, so muss notwendig das-

selbe auch für die Schnittlinie zweier Ebenen verlangt werden. Während also das in Frage stehende Postulat vom Standpunkt der Euklidischen Geometrie als überflüssig und daher unzulässig bezeichnet werden muss, kann vom Standpunkt der neueren Geometrie seine Berechtigung nicht beanstandet werden. Nur darf es nicht versteckt unterschoben, sondern muss offen ausgesprochen werden.

Die stillschweigende Annahme des *Schnittpunktpostulates* durch die neuere Geometrie, verbunden mit dem Umstand, dass Euklid die betreffende Aufgabe nicht ausdrücklich behandelt, gibt wohl die Erklärung für die in der Einleitung erwähnte Unsicherheit und Unbekümmertheit, die sich vielfach hinsichtlich der constructiven Postulate der Raumgeometrie bemerkbar macht.

§ 2. **Reducirung der Euklidischen Postulate.**

Wir halten vorerst an den Euklidischen Postulaten fest und gehen darauf aus, die auf sie gegründeten ideellen Raumconstructionen in eine für die praktische Ausführung geeignetere Form zu bringen. Man wird zu diesem Zwecke vor allem bemüht sein, das Construiren in allen möglichen Ebenen in Wegfall zu bringen, indem man jene Constructionen sämtlich auf eine und dieselbe Ebene zu übertragen sucht. Dies ist in der That möglich: man kann die Constructionen so reduciren, dass man nur in einer einzigen, ein für allemal bestimmten Ebene zu zeichnen hat und dass von Operationen im Raum nur das Ziehen von geraden Linien und das Abmessen von Punktabständen (mittelst Stechzirkel oder Masstab) verbleibt.

Bei dieser Reduction kommt die Hilfsaufgabe der Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene fortgesetzt zur Anwendung. Da sie nach der in § 1 gegebenen Lösung das Zeichnen in 4 verschiedenen Ebenen erfordert, so erscheint es zweckmässig, sich zuerst mit dieser Fundamentalaufgabe zu befassen.

Man wird zunächst versuchen, das Anwendungsgebiet der etwas umständlichen Construction möglichst einzuschränken. (Da-

zu mag vorgreifend gleich bemerkt werden, dass, auch wenn man im Sinne der neueren Geometrie den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene als eo ipso gegeben postulirt, man auch hier gut thun wird, das Mass der Forderung nur auf das Notwendigste zu beschränken.) In dieser Hinsicht lässt sich nun leicht zeigen, dass es nur erforderlich ist, die Schnittpunkte *der Strahlen irgend eines Strahlenbündels mit einer einzigen Ebene* durch die bewusste Construction (bezw. durch Postulat) zu bestimmen; für jede andere Gerade und Ebene ergibt sich dann der Schnittpunkt durch eine einfache *Linenconstruction.* Bezeichnen wir das Centrum jenes Strahlenbündels als *Hauptpunkt*, die Strahlen als *Hauptstrahlen*, ferner jene einzige Ebene als *Hauptebene*, so gestalten sich die betreffenden Linienconstructionen wie folgt:

Um den Schnittpunkt S einer beliebigen Geraden AB (vergl. Fig. 2) mit der Hauptebene P zu finden, zieht man nach zwei beliebigen Punkten A, B der Geraden Strahlen vom Hauptpunkt O, bestimmt deren Schnittpunkte a, b mit der Hauptebene: so schneidet die Verbindungslinie ab die gegebene Gerade in dem gesuchten Spurpunkt S.

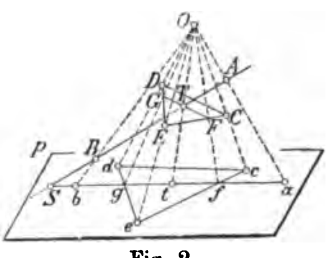


Fig. 2.

Um ferner (vergl. Fig. 2) den Schnittpunkt T einer Geraden AB mit einer beliebigen, durch drei Punkte C, D, E bestimmten Ebene zu finden, zieht man nach den fünf Punkten A, B, C, D, E Hauptstrahlen und bestimmt deren Schnittpunkte a, b, c, d, e mit der Hauptebene. Schneidet dann die Linie ab den Umfang des Dreiecks cde in f und g, und zieht man Of und Og, welche die entsprechenden Seiten des Dreiecks CDE in F und G schneiden, so erhält man im Schnittpunkt der Linie FG mit der Geraden AB den gesuchten Punkt T.

Hiernach bleibt die Anwendung der in § 1 besprochenen Construction nur auf die Schnittpunkte von Hauptstrahlen mit der Hauptebene beschränkt. — Man wird also weiter bestrebt sein, die genannte Construction in dieser Begrenzung so zu modificiren, dass nur in der Hauptebene gezeichnet zu werden

braucht und im Raum nur Linien zu ziehen und Punktabstände zu messen sind.

Zunächst lässt sich die Euklidische Lösung der Hilfsaufgabe — von einem Punkt O eine Senkrechte auf eine Ebene P zu fällen — folgendermassen modificiren: Man verbindet (vergl. Fig. 3) den Punkt O mit drei beliebigen Punkten p, q, r der Ebene P und klappt die zwei Dreiecke pqO und prO in die Ebene um, indem man die Abstände pO, qO, rO abmisst und aus p, q, r mit den betreffenden Abständen Kreisbögen in der Ebene P beschreibt, welche sich in $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ schneiden. Fällt man dann von $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ auf pq und pr Senkrechte, welche sich in ω schneiden, so ist $O\omega$ die verlangte Senkrechte.

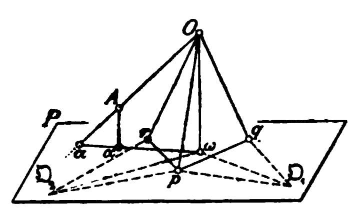


Fig. 3.

Hat man nun den Schnittpunkt irgend eines Hauptstrahles OA mit der Hauptebene zu bestimmen, so fällt man ausser der ein für allemal bestimmten Senkrechten $O\omega$ nach demselben Verfahren auch noch vom Punkt A die Senkrechte $A\alpha$ auf die Hauptebene. Zieht man dann $\omega\alpha$, so schneidet diese den Hauptstrahl OA im gesuchten Schnittpunkt a.

Nach diesen Vorbereitungen hält es nunmehr nicht schwer, allgemein bei jeder Euklidischen Raumconstruction die in allen möglichen Ebenen sich bewegenden planimetrischen Operationen in eine einzige Ebene zu übertragen. Es geschieht dies mittelst des Umklappungsverfahrens. Als Constructionsebene dient wieder die Hauptebene:

Die Ebene im Raum, in der eine planimetrische Operation auszuführen sei, sei bestimmt durch die drei Punkte A, B, C (vergl. Fig. 4). Um zunächst die Spurlinie der Ebene zu erhalten, bestimmt man die Spurpunkte der Linien AB, BC, CA auf die oben (S. 45, Mitte) angegebene Weise: Zieht man nach A, B, C Hauptstrahlen und bestimmt deren Schnittpunkte a, b, c mit der Hauptebene, so schneiden sich ab und AB, bc und BC, ca und CA in den drei Spurpunkten S, T, U, welche in

einer Geraden liegen, nämlich in der Spurgeraden der Ebene ABC. Man kann nun die Umklappung 𝔄𝔅ℭ des Dreiecks ABC um diese Spurgerade zeichnen, indem man die Strecken SA, SB, UA, UC abmisst, aus S mit SA und aus U mit UA Kreisbögen beschreibt, die sich in 𝔄 schneiden, endlich auf S𝔄 und U𝔄 die Strecken S𝔅 $= SB$ und Uℭ $=$ UC aufträgt. Die übrigen Punkte der Dreiecksebene, die bei der auszuführenden Construction ins Spiel kommen, z. B. X, werden dann in die Umklappung übertragen, indem man XB und XC zieht, welche die Spurgerade in V und W schneiden mögen, ferner V𝔅 und Wℭ zieht, welche sich in 𝔛 schneiden. Vollzieht man sodann die verlangte planimetrische Construction in der Hauptebene, so hat man schliesslich die resultirenden neuen Punkte auf umgekehrtem Wege aus der Umklappung in den Raum zu übertragen. Ist also 𝔛 ein resultirender Punkt in der Umklappung, so zieht man 𝔛𝔅 und 𝔛ℭ, welche die Spurgerade in V und W schneiden, zieht ferner VB und WC, welche sich im Raumpunkt X schneiden.

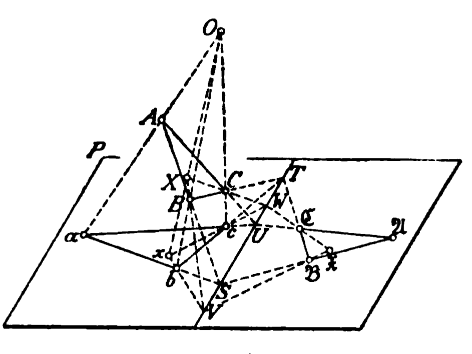


Fig. 4.

Hiemit ist nun bewiesen, dass *die constructiven Postulate Euklids reducirt werden können auf die folgenden einfacheren: Es sei möglich,*

1) im Raum Punkte durch Linien zu verbinden, die Linien beliebig zu verlängern und Strecken auf ihnen abzumessen.

2) in einer einzigen Ebene Kreise zu beschreiben.

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass der Versuch, die Operationen der Euklidischen Geometrie auf die Benützung einer einzigen Constructionsebene zu reduciren, schon bei dem Schnittpunktproblem ganz von selbst auf den Begriff der „*Projection*" geführt hat, insoferne man das Hauptstrahlenbündel als *projicirendes Strahlenbündel,* die Hauptebene als *Projections-*

ebene auffassen und also z. B. in Fig. 2 Dreieck cde als Projection von Dreieck CDE betrachten kann. Hier ergibt sich also der Begriff der Projection direct aus der Aufgabe, die ideellen Raumconstructionen praktisch zu verwirklichen, ganz unabhängig vom Sehprocess, aus dessen mathematischer Abstraction jener Begriff in der Regel abgeleitet wird.

§ 3. Weitere Reduction mit Hilfe des Schnitt-Punktpostulates. Methode der cotirten Projectionen.

Die Constructionen auf noch einfachere Operationen im Raum als das Ziehen von geraden Linien und das Abmessen von Strecken zurückzuführen, ist, wie wir sehen werden, nicht möglich, solange wir an den Euklidischen Postulaten festhalten; es kann aber ermöglicht werden durch Annahme des *Schnittpunktpostulates*.

Der nächste Schritt zur weiteren Reduction würde der Versuch sein, das Ziehen von Geraden und Abmessen von Strecken im Raum *ausschliesslich auf Hauptstrahlen zu beschränken*. Bezeichnet man den Abstand eines Punktes von seiner Projection als seine „*Cote*“, (unter Verallgemeinerung des mit dieser Bezeichnung gewöhnlich verbundenen Begriffs), so kommen bei dem Abmessen offenbar bloss Coten in Betracht; denn die Länge einer beliebigen auf einem Hauptstrahl liegenden Strecke ergibt sich als Differenz der Coten ihrer Endpunkte.

Mustert man nun die im vorigen Paragraphen besprochenen Constructionen, so scheinen sich dieselben in der That leicht derart modificiren zu lassen, dass von Operationen im Raum nur das Ziehen von Hauptstrahlen und das Abmessen bezw. Auftragen von Coten zur Anwendung kommt. Die Modification besteht darin, dass man das Ziehen von anderen Raumgeraden und das Abmessen von Raumstrecken in den Umklappungen ihrer projicirenden Ebenen vornimmt.

Was zuerst die Bestimmung des Schnittpunkts einer Geraden mit einer beliebigen Ebene anlangt (vergl. Fig. 2, S. 6), so waren, um den Schnittpunkt T zu gewinnen, im Raum die Linien CE,

DE, FG zu ziehen. Dies kann nun dadurch umgangen werden, dass man sich zuerst die Cotenlängen fF und gG ermittelt, indem man die projicirenden Dreiecke ceO und deO umklappt, (man misst z. B. die Coten cO, cC, eO, eE ab, setzt daraus die Umklappung von Dreieck ceO samt der Linie CE zusammen, zeichnet die Linie fO mit Schnittpunkt F ein und misst fF ab). Sind die Längen von fF und gG gefunden, so ist es weiterhin leicht, die Umklappung der projicirenden Ebene abO mit sämtlichen in ihr liegenden Linien zu zeichnen, wodurch man die Projection t sowie die Länge der Cote tT des gesuchten Schnittpunktes gewinnt. Schliesslich erhält man dann den Punkt T im Raum, indem man den Hauptstrahl Ot zieht und auf ihm die Cote tT aufträgt.

In ähnlicher Weise lässt sich die (durch Fig. 4, S. 8) illustrirte Lösung der Aufgabe modificiren: ein beliebig im Raum liegendes Dreieck ABC in die Hauptebene umzuklappen und umgekehrt einen Punkt $\mathfrak{X}$ der Umklappung in den Raum zu übertragen. Um zunächst die Spurgerade SU zu finden, klappt man das projicirende Dreieck abO samt den Punkten A und B um, alsdann ergibt sich Punkt S als Schnittpunkt der Linie ab mit der Umklappung von AB. Analog bestimmt sich U mittelst Umklappung des Dreiecks acO. Da diese zwei Umklappungen zugleich die wahren Längen von SA und SB, UA und UC enthalten, so kann nunmehr die Umklappung $\mathfrak{ABC}$ des Dreiecks ABC sofort gezeichnet werden. Um weiter den Raumpunkt X aus seiner Umklappung $\mathfrak{X}$ zu erhalten, bestimmt man zuerst die Projection x, indem man $\mathfrak{XB}$ und $\mathfrak{XC}$ zieht, welche die Spurgerade in V und W schneiden, dann Vb und Wc zieht, die sich in x schneiden. Endlich bestimmt man die Cotenlänge xX, indem man das projicirende Dreieck xcO umklappt, in der Umklappung Punkt C einträgt und WC zieht, welche von der Umklappung von xO die gesuchte Cotenlänge abschneidet. Punkt X im Raum ergibt sich dann durch Auftragen der Cote xX auf dem Hauptstrahl Ox.

Man beachte bei diesen Modificationen wohl, dass, während es sich vorher nur um ein *Abmessen* von Strecken im Raum handelte, nunmehr auch das *Auftragen* von Strecken auf Hauptstrahlen ins Spiel kommt.

Nun darf aber nicht vergessen werden, dass in allen diesen Construotionen noch die vorherige Bestimmung der Projectionen der einzelnen Raumpunkte, also die Bestimmung der Schnittpunkte von Hauptstrahlen mit der Hauptebene steckt. Die Lösung dieser letzteren Aufgabe aber, wie sie im vorigen Paragraphen gegeben wurde (vergl. Fig. 3, S. 7), lässt sich in keiner Weise auf das blosse Ziehen von Hauptstrahlen und Abmessen von Coten zurückführen. Wir kommen also zu dem Schluss, dass die versuchte Reduction nicht möglich ist, solange man an den Euklidischen Postulaten festhält, dass sie aber möglich wird, sobald man das Postulat der neueren Geometrie für Hauptstrahlen und Hauptebene adoptirt.

So gelangt man dazu, die folgenden neuen Postulate betreffs der im Raum zu vollziehenden Operationen aufzustellen:

Es sei möglich, von einem festen Punkt (Hauptpunkt) einen Strahl nach jedem Punkt des Raumes zu ziehen, dessen Schnittpunkt mit einer festen Ebene (Hauptebene) zu bestimmen und auf ihm eine Strecke abzumessen und aufzutragen.

Oder anders ausgedrückt:

Für jeden Punkt des Raumes sei dessen auf ein gegebenes Projectionssystem bezogene Projection bestimmbar und seine Cote abmessbar und auftragbar.

Damit sind wir nun zu der darstellend-geometrischen *„Methode der cotirten Projectionen"* gelangt.

Bei der praktischen Verwertung der Methode wird der Hauptpunkt oder das Projectionscentrum am bequemsten im Unendlichen in zur Hauptebene senkrechter Richtung angenommen, wodurch sich die vorbesprochenen Fundamentalconstructionen principiell nicht ändern, wohl aber erheblich vereinfachen.

Auch die *axonometrische Constructionsmethode* kann in gewissem Sinn unter denselben Gesichtspunkt untergeordnet werden.

§ 4. Die Methode der doppelten Projection.

Bei der zuletzt vorgenommenen Reduction blieb als Restbestand von Operationen im Raum 1) das Ziehen von Strahlen in einem bestimmten Strahlenbündel, 2) das Abgreifen und Auftragen

von Massen auf diesen Strahlen. Das zweite ist jedenfalls eine weniger einfache Operation als das erste. Man kann daher versuchen, die Constructionen noch weiter zu modificiren dadurch, dass man die zweite Operation in Wegfall bringt und an ihre Stelle eine zweite Auflage der ersten Operation treten lässt.

Man wird also neben dem aus Hauptstrahlenbündel und Hauptebene bestehenden *ersten Projectionssystem* noch ein zweites Hauptstrahlenbündel einführen, welches mit einer zweiten Hauptebene ein *zweites Projectionssystem* bildet. Der Einfachheit halber kann man (vergl. Fig. 5) den zweiten Hauptpunkt O' in der ersten Hauptebene P annehmen und die zweite Hauptebene P' durch den ersten Hauptpunkt O legen.

Die gegenseitige Lage der Hauptebenen und Hauptpunkte mag man sich etwa dadurch bestimmt denken, dass die gemeinschaftliche Schnittkante g der Hauptebenen (*Grundschnitt*), der von ihnen gebildete Winkel w, und in jeder Hauptebene der betreffende Hauptpunkt gegeben sei. Es ist alsdann leicht, die Entfernung OO' der zwei Hauptpunkte zu bestimmen. Fällt man nämlich (vergl. Fig. 5) in P' von O die Senkrechte Om auf g und errichtet in P auf g im Punkt m eine Senkrechte, welche die durch O' mit g gezogene Parallelen in n schneidet, so enthält Dreieck Omn bei m den Winkel w, Dreieck OnO' ist bei n rechtwinklig; beide Dreiecke können also in wahrer Gestalt gezeichnet werden, wodurch sich die Länge von OO' ergibt.

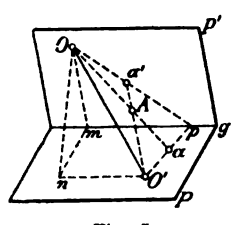


Fig. 5.

Es ist noch daran zu erinnern, dass gemäss den Erörterungen in § 2 für die zweite Hauptebene nicht das Schnittpunktpostulat vorauszusetzen ist. In der That erkennt man (vergl. Fig. 5), dass wenn a und a' die beiden Projectionen eines Raumpunktes A sind, die Linien Oa' und $O'a$ sich in einem Punkt p des Grundschnitts g schneiden müssen. Ist also in der ersten Hauptebene die Projection a vermöge des Schnittpunktpostulates bestimmt, so findet sich die zweite Projection a' dadurch, dass man $O'a$ bis zum Schnitt p mit g zieht, dann Op zieht, welche von $O'A$ in a' geschnitten wird.

Die bei der Methode der cotirten Projectionen erforderliche Operation des Abmessens und Auftragens von Coten im Raum kann nunmehr auf folgende Weise umgangen werden:

1) Ist (vergl. Fig. 5) die Länge der Cote aA abzumessen, so bestimmt man auch noch die zweite Projection a' des Punktes A auf die oben angegebene Weise. Hierauf kann man (mittelst der abgemessenen Strecke pO und der ein für allemal bestimmten $O'O$) das Dreieck $O'pO$ in die erste Hauptebene umklappen, in der Umklappung Punkt a' eintragen, $O'a'$ und Oa mit Schnittpunkt A einzeichnen und die umgeklappte Cotenlänge aA abmessen.

2) Ist umgekehrt der Raumpunkt A mittelst Auftragens der Cote aA auf dem Hauptstrahl Oa zu bestimmen, so zieht man $O'a$ bis p und pO. Hierauf klappt man Dreieck $O'pO$ in die erste Hauptebene um, zieht in der Umklappung Oa, trägt auf ihr aA gleich der gegebenen Cote auf und zieht $O'A$ bis a'. Ueberträgt man dann Punkt a' aus der Umklappung auf die Linie Op in der zweiten Hauptebene, so bestimmt sich der Punkt A im Raum als Schnittpunkt der zwei Hauptstrahlen Oa und $O'a'$.

Man bemerke, dass die Functionen der zwei Hauptebenen nicht gleichwertig sind. Während die mit dem Schnittpunktpostulat behaftete erste Hauptebene als die eigentliche Constructionsebene fungirt, beschränken sich die Operationen in der zweiten Hauptebene lediglich auf das Ziehen von Strahlen durch O und das Abmessen, bezw. Auftragen von Strecken (Coten) auf ihnen. Es erscheinen also die vorher im Raum vollzogenen Abmessungsoperationen nunmehr in die zweite Hauptebene verlegt. — Übrigens können die Rollen der zwei Hauptebenen selbstverständlich beliebig getauscht werden.

Wir sind mit diesem Verfahren zu der darstellend-geometrischen *„Methode der doppelten Projection“* gelangt.

Bei der praktischen Verwertung der Methode können zum Zweck der Vereinfachung der Constructionen die zwei Hauptpunkte im Unendlichen in zum Grundschnitt senkrechter Richtung angenommen und kann der Winkel w der zwei Hauptebenen gleich 90^0 gewählt werden. Man hat dann die *„Grund- und Aufriss-Methode“* von *Monge*.

§ 5. Die Auffassungsweise der Darstellenden Geometrie.

Es ist schliesslich auf einen wesentlichen Unterschied zwischen unserer seitherigen Betrachtungsweise und der gewöhnlichen Anschauungsweise der Darstellenden Geometrie aufmerksam zu machen, wodurch die an das Schnittpunktpostulat sich knüpfenden Schwierigkeiten aufgehoben werden.

Die Euklidische Geometrie geht von der Vorstellung aus, dass die Punkte *im Raum* in ihrer gegenseitigen Lage unmittelbar gegeben seien, und schliesst ihre ideellen Constructionen an die Raumpunkte direkt an. Indem wir von dieser Auffassung unseren Ausgang nahmen, mussten wir bei unseren Versuchen, jene ideellen Constructionen durch Uebertragung auf eine einzige Constructionsebene zu realisiren, die im Raum gegebenen Punkte erst in Beziehung zur Constructionsebene setzen dadurch, dass wir ihre Projectionen bestimmten.

Nun können wir aber dieseVorstellungsfolge auch umkehren, indem wir uns nicht die Punkte im Raum, sondern ihre Projectionen und Coten (bezw. doppelten Projectionen) ursprünglich gegeben denken, so dass also die Punkte im Raum nicht unmittelbar, sondern mittelbar durch jene Bestimmungselemente gegeben erscheinen. An Stelle der an die Raumpunkte anknüpfenden ideellen Forderung der Bestimmung der Projectionen und Coten tritt dann die ideelle Aufgabe, umgekehrt aus den gegebenen Projectionen und Coten (bezw. doppelten Projectionen) die Lage der Punkte im Raum zn ermitteln, bezw. sich in der inneren Vorstellung zu vergegenwärtigen.

Dies ist nun in der That die gewöhnliche Auffassungsweise der *Darstellenden Geometrie.* Durch sie kommen die Bedenken, die sich gegen die Annahme des Schnittpunktpostulates für die Constructionsebene erheben lassen, in Wegfall. Denn die Frage, wie denn nun eigentlich die Projection eines im Raum gegebenen Punktes praktisch bestimmt werden soll, wird dadurch gegenstandslos.

Berlin, den 5. August 1892.

Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts.

Von A. v. Braunmühl in München.

Wenn ich es hier versuche eine kurze Skizze der Bestrebungen zu entwerfen, die seit Entstehung unserer geometrischen Wissenschaften darauf gerichtet waren, complicirtere Linien als die Gerade und den Kreis auf organischem Wege zu erzeugen, so kann es weniger meine Absicht sein, Vollständigkeit in der Aufzählung der hiezu erfundenen Instrumente zu erreichen oder gar eine eingehende Beschreibung und Kritik derselben von mechanischem Standpunkte aus zu geben, als vielmehr diejenigen Momente in den einzelnen Entwicklungsepochen der Geometrie klarzulegen, aus denen das Bedürfnis nach solchen Mitteln hervorging. Dabei habe ich meine Untersuchung bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts fortgeführt, weil bis dahin alle Vorbereitungen getroffen waren, um eine systematische Begründung der geometrischen Bewegungslehre zu ermöglichen, die man heute in dem Namen Phoronomie zusammenfasst.

Unsere Kenntnis von den geometrischen Bestrebungen der Culturvölker beginnt ungefähr im siebenten Jahrhundert vor Chr. mit dem Auftreten des griechischen Weisen *Thales*, dem Gründer der jonischen Schule. Allein die Kenntnisse dieser Schule, soweit sie sich aus den spärlichen Nachrichten ersehen lassen, die auf uns gekommen sind, müssen noch als sehr primitiv bezeichnet werden, und fanden ihre weitere Ausbildung erst in der italischen Schule, deren Gründer *Pythagoras* war (569—468).

Obgleich uns nur wenige Namen von hervorragenden Männern aus jener Zeit bekannt sind, die zur Förderung unserer Wissenschaft beitrugen, so tritt doch der Charakter der letzteren bereits mit grosser Deutlichkeit hervor, denn die mathematischen Kräfte centralisirten sich damals bereits auf die Lösung dreier Probleme, die auch in der Folge die hervorragendsten Geister des ganzen Altertums beschäftigten, und die Erweckung und Ausbreitung der verschiedensten Gedanken im Gefolge hatten. Es sind dies das sogenannte delische Problem, nämlich die Aufgabe einen Würfel zu construiren, der doppelt so gross ist als ein gegebener, dann das Problem, einen Winkel in drei oder mehr gleiche Teile zu teilen und endlich die Quadratur des Zirkels.

Die intensive Beschäftigung mit diesen drei Problemen, welche allen Versuchen einer Auflösung mittelst Zirkel und Lineal beharrlichen Widerstand entgegensetzten, war es, die den scharfsinnigen Mathematikern des Altertumes den Gedanken an die Erzeugung complicirterer Curven nahelegte, mit deren Hilfe die Lösung dieser Aufgaben gelingen sollte und auch mehr oder weniger gelang. Das erste Problem, dessen sagenhaften Ursprung*) wir übergehen, wurde, nachdem es *Hippokrates* von Chios (um 450) auf die Aufgabe zurückgeführt hatte: zu zwei gegebenen Strecken zwei mittlere Proportionalen zu construiren, von *Plato* mittelst eines Instrumentes gelöst, das jedoch nur ein unsicheres Herausprobiren der gesuchten Lösung ermöglichte. Diese von dem Commentator Eutokius von Askalon**) stammende Nachricht (der auch Platos Instrument abbildet) gibt wohl zum erstenmal Kunde von einem Instrumente zur Lösung geometrischer Aufgaben und verdient deshalb hier wenigstens erwähnt zu werden, obgleich dasselbe nicht zur Erzeugung einer Curve verwendet wurde.

Mit dieser empirischen Lösung nicht zufrieden, suchten Plato's Schüler nach neuen Mitteln, um die schwierige Aufgabe zu bewältigen und fanden sie auch bald in den Kegelschnitten, deren Entdeckung wahrscheinlich dem *Menächmus* oder dem fast gleich-

---

*) Vgl. M. Cantor: Euklid u. sein Jahrhundert. Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jhrg. 12. Suppl., pg. 18.

**) Eutocii Ascalonitae in Archimedis libros de sphaera et cylindro atque ailos quosdam Commentaria. Basileae 1542. pg. 15.

zeitigen *Aristaeus*, (im 5. Jahrhundert) der 5 Bücher über die Kegelschnitte schrieb, zuzuerkennen ist. Menächmus löste das delische Problem auf zwei Arten, indem er einmal zwei Parabeln und dann eine Parabel und eine Hyperbel verwendete, und da diese Methoden nur dann praktisch angewendet werden konnten, wenn Instrumente erfunden waren, welche eine mechanische Erzeugung dieser Curven gestatteten, so werden wir kaum fehlgreifen, wenn wir die Erfindung der ersten Kegelschnittzeichner bereits in die Zeit des Menächmus verweisen. In der That bemerkt auch Eratosthenes an einer Stelle, dass Menächmus zur Construction seiner Curven Instrumente gebraucht habe, über deren Beschaffenheit er aber leider nichts verrät*).

Zur Behandlung des zweiten Problems, der sogenannten Trisection des Winkels, wurde, wie Proklus in seinem Commentar zum Euklid angibt, von *Hippias*, einem Zeitgenossen des Sokrates, eine transcendente Curve erfunden, die auch *Dinostratus*, der Bruder des Menächmus, sowohl auf dieses Problem, als auch zur Quadratur des Kreises anwandte. Von letzterer Verwendung erhielt sie den Namen Quadratrix des Dinostratus. Dass die Alten auch diese neue Curve, wie es wahrscheinlich ist, mechanisch erzeugten, darüber findet sich allerdings in der Literatur keine Spur, dagegen wurde man durch die Neuerfindung dieser und ähnlicher krummer Linien zu der bekannten Einteilung derselben in Classen**) geführt, indem man die Gerade und den Kreis als „ebene Örter", die Kegelschnitte als „körperliche Örter" und die übrigen Curven als „lineare Örter" bezeichnete, welch letztere man auch nach ihrer Erzeugung „mechanische" nannte. Diese Einteilung der Örter findet sich vorzugsweise auch in jenen Schriften wieder, welche zur Zeit der Glanzperiode der griechischen Mathematik verfasst wurden, die mit der Gründung der Alexandrinischen Schule durch Ptolemäus Lagi begann und die Heroen

*) Eutokius l. c. p. 22. führt einen Brief des Eratosthenes an den König Ptolemaeus von Aegypten an, in welchem jener sagt: „Accidit enim omnibus his (Bearbeitern des Problems) descripsisse demonstrative, verum non posse, quae invenerunt, manu efficere, et in usum deducere, praeterquam in brevitate Menaechmi: et haec difficulter."

**) Vgl. z. B. Newton: Arithmetica universalis Lugduni 1732 pg. 212, und Chasles, Geschichte der Geometrie d. v. Sohncke, Halle 1839. pg. 2.

der Mathematik des Altertumes, Euklid, Archimedes, Apollonius und andere hervorbrachte. Aber leider haben wir gerade aus dieser an geistiger Arbeit so reichen Epoche nur einen Bericht über eine instrumentale Erzeugung einer Curve überkommen, nämlich der sogenannten Conchoide oder Muschellinie des *Nikomedes*. Dieser Mathematiker, der im 2. Jahrhundert vor Christus lebte, nahm das delische Problem abermals in Angriff und gab eine Construction desselben an, die uns Pappus*) und Eutokius überliefert haben, und welche die Lösung der Aufgabe erforderte, durch einen festen Punkt eine Gerade so zu legen, dass das von ihr durch zwei feste Linien abgeschnittene Stück eine gegebene Länge hat. Hiezu durfte man nur den Ort bestimmen, den der eine Endpunkt jenes constanten Stückes beschreibt, wenn der andere die eine der beiden festen Linien durchläuft, während die Gerade sich um den festen Punkt dreht. Die durch den beweglichen Endpunkt erzeugte Curve war jene Conchoide. Nikomedes hat zu ihrer Construction ein Instrument erfunden, dessen Zusammensetzung aus der nebenstehenden Fig. 1. ohne weiteres ersichtlich sein wird, die wir aus des Eutokius Commentar pag. 24 entnehmen**). Welch vielfache Verwendung diese leicht und sicher zu erzeugende Curve später noch fand, werden wir weiter unten sehen, und bemerken hier nur, dass sie Nikomedes auch zur Lösung der Trisection des Winkels verwendete, eine Lösung, die zwar nicht erhalten ist, aber leicht reconstruirt werden kann***).

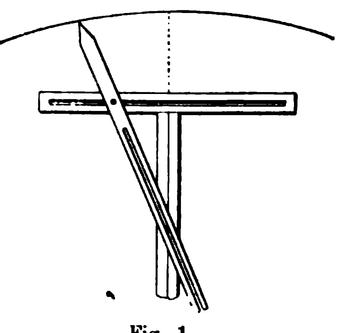


Fig. 1.

*) Pappi Alexandrini collectiones mathematicae. Ed. Commandinus. Venetiis 1588. lib. 3. pg. 5, ferner lib. IV. pg. 55. — Eutokius l. c. pg. 24.

**) Das von Nikomedes verfasste, leider verlorene Buch heisst περὶ κογχειδῶν γραμμῶν. M. Curtze hat in seinen Reliquiae Coppernicanae, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 29. die verschiedenen Stellen gesammelt, welche sich über die Conchoiden in den uns überlieferten Schriften der Alten finden.

***) Vgl. Cantor: Vorlesungen über Geschichte d. Mathematik, Leipzig 1880, I. pg. 305.

Im Anschluss hieran erwähnen wir noch die Erfindung der Cissoide oder Epheulinie durch *Diokles*, der ebenfalls im 2. Jahrhundert vor Christus lebte und mittelst dieser Curve das delische Problem löste. Doch wissen wir nicht, ob er eine mechanische Erzeugung der Curve gekannt hat, die erste uns überlieferte rührt von Newton her, worauf wir noch näher zu sprechen kommen.

Verfolgen wir die spärlichen Nachrichten, die von den späteren geometrischen Arbeiten der Griechen auf uns gekommen sind, so finden wir erst um die Mitte des 5. Jahrhunderts nach Chr. wieder eine interessante Notiz in den Commentaren, die *Proklus* (410—485), Vorsteher der platonischen Schule in Athen, zu Euklids Werken geschrieben. Dieser gibt nämlich die mechanische Erzeugung der Ellipse durch die Bewegung eines Punktes einer Geraden an, deren Endpunkte auf zwei Schenkeln eines Winkels hingleiten.*) Bei der praktischen Verwendung, die die Griechen ihren geometrischen Erfindungen gaben, ist es wohl kaum zu bezweifeln, dass des Proklus Gedanke auch mechanisch ausgeführt wurde. Somit müssen wir ihm die Erfindung jenes Principes für Kegelschnittzeichner zuschreiben, auf welchem bis in die neueste Zeit herein unzählige Instrumente beruhen, die sich nur durch die technische Ausführung unterscheiden.

An Proklus' Ellipsenerzeugung schliesst sich die Erfindung eines Instrumentes zur mechanischen Beschreibung der Parabel an, das von *Isidorus von Milet*, einem Philosophen derselben Schule, herrührt und von seinem Erfinder ebenfalls zur Lösung der delischen Aufgabe verwendet wurde. Der schon wiederholt erwähnte Eutokius, ein Schüler des Isidorus, der diese Nachricht überliefert hat, gibt nur an, dass das betreffende Instrument die Gestalt des griechischen λ besessen habe**).

Das ist die geringe Ausbeute, die wir für unseren Zweck aus dem Vermächtnis der griechischen Mathematiker auffinden konnten. Mit der Verbrennung jener berühmten Bibliothek in Alexandria, der Metropole griechischer Bildung, durch den ara-

---

*) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii Ed. Friedlein. Leipz. 1873 pg. 106.

**) Dies erwähnt Eutokius bei Gelegenheit der Ausführung der Construction des Menächmus für die Würfelverdoppelung l. c. pg. 21.

bischen Chalifen Omar im Jahre 640 nach Chr. erlag die Cultur des Altertums dem Verhängnis, um nach kurzer Zeit gerade wieder in dem Volke zu neuer Blüte zu gelangen, von dessen Barbarei sie vernichtet worden war. Denn kaum hundert Jahre nach der Gründung des arabischen Weltreiches finden wir die Wissenschaften unter den Abbasiden in hohem Aufschwung, und namentlich war es die Mathematik, die die Araber, teils von den Indern, teils von den Griechen überkommen, wenn auch mit wenig selbständigen Ideen bereichert, doch mit grossem Fleisse und Sachkenntnis der Nachwelt überliefert haben.

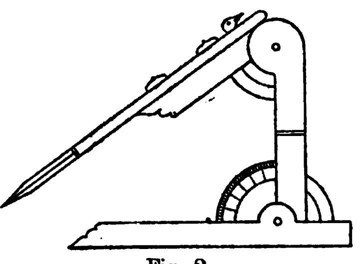
Auch in der arabischen Literatur treten wieder die drei berühmten Probleme der Griechen in den Vordergrund, und es sind uns verschiedene Lösungen derselben durch arabische Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert nach Chr. bekannt; dazu kommt aber noch, dass die Araber die Lösung der gesamten Gleichungen dritten und einiger vierten Grades mittelst der Kegelschnitte gaben, Untersuchungen, die uns erst in den letzten Decennien namentlich durch Franz Wöpcke bekannt geworden sind. Was die instrumentale Erzeugung der Curven anlangt, so ist uns aus der arabischen Literatur zunächst die sogenannte Gärtner-Construction der Ellipse mittelst einer in den beiden Brennpunkten befestigten und durch den beschreibenden Stift gespannten Schnur bekannt, die von dem jüngsten der drei Brüder *Mohammed*, *Ahmed* und *Alhasan*, den Söhnen des Musa Jbn Schakir, eines einflussreichen Mannes am Hofe des Chalifen Almamun (regierte 813 bis 833) stammt.*)

Ausserdem hat uns Wöpcke, der ausgezeichnete, leider zu früh verstorbene Kenner der mathematischen Literatur der Araber mit drei Abhandlungen über einen allgemeinen Kegelschnittzirkel (compas parfait) bekannt gemacht, die bezüglich aus dem 10., 11., und 12. Jahrhundert von den Arabern *Ahmed Jbn Mohammed Jbn Abdel-Djelîl es-Sidjzi*, *Abou Sehl Outdjen Jbn Ouestem el-Kouhi* und *Mohammed Jbn Hoceïn* stammen.**) In der im

*) Vgl. M. Cantor. Vorl. ü. G. d. M. Bd. I. pg. 629 und Woepcke, Journal asiatique 1855. pg. 223.

**) Trois traités Arabes sur le compas parfait, publiés et traduits par Fr. Woepcke. Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque national et

Manuscript voranstehenden Abhandlung des letzten der drei Mathematiker findet sich die Abbildung des Instrumentes, die wir in Fig. 2 wiedergeben. Dieses Instrument verdankt seine Entstehung der von den Arabern schon frühzeitig gemachten Beobachtung, dass die Linien, welche der Endpunkt des Schattens eines


Fig. 2.

Gnomons beschreibt, Kegelschnitte sind (vgl. l. c. pag. 17.) Das Instrument gibt also direct die Curve als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene; es besteht aus einer (in unserer Figur senkrechten) Axe, die unter einem beliebigen Winkel gegen die Zeichnungsebene eingestellt werden kann; auf dieser Axe sitzt eine um dieselbe drehbare Hülse auf, die einen Zirkelkopf trägt, um welchen ein Zirkelfuss gedreht werden kann, der sich unter beliebigem Winkel gegen die Axe einstellen lässt und ein Röhrchen trägt, in welchem ein langer Zeichnungsstift so verschiebbar ist, dass derselbe während der Drehung des Instrumentes im Contacte mit der Zeichenebene erhalten werden kann. Während der älteste der drei Autoren, Ahmed Jbn Mohammed, das Instrument nur ganz kurz beschreibt, behandeln es die beiden anderen eingehend und bestimmen in übersichtlicher und klarer Darstellung die verschiedenen Stellungen, die die Teile des Instrumentes haben müssen, um Gerade, Kreis, Parabel, Ellipse oder Hyperbel zu verzeichnen.

Mohammed Jbn el Hoceïn teilt in einer Einleitung zu seiner Schrift mit, dass die Alten (ob er darunter die Griechen oder Vorfahren eigenen Stammes versteht, lässt sich leider nicht ent-

autres Bibliothèques. 1874. t. 22. Das hier veröffentlichte Manuscript befindet sich in der Bibliothek zu Leyden. Nr. 1076. Auf diese wichtige Veröffentlichung wurde ich durch eine gütige Mitteilung des Herrn M. Cantor aufmerksam gemacht. — Woepcke gibt als Einleitung zu seiner Übersetzung eine Ableitung der Formeln, die zwischen dem Öffnungswinkel des Kegels α, der Neigung seiner Axe β gegen die Schnittebene, der grossen Axe $2a$ und dem Parameter $2p$ des Kegelschnittes bestehen, mittelst des Dandelin'schen Satzes. Diesen Satz benützte in neuester Zeit Herr Hildebrandt zur Construction eines Kegelschnittzeichners; vgl. E. Fischer. Dingler polytechn. Journal Bd. 282. pg. 241.

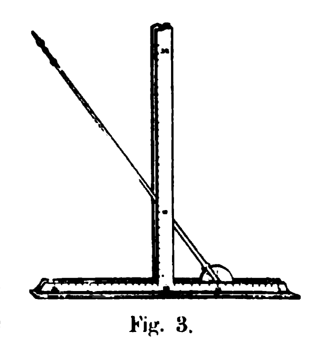
scheiden) ein allgemeines Instrument zum Zeichnen der Kegelschnitte erdacht hätten, und dass er in einem Werke des berühmten Abou'r Reihân el-Biroumi die Notiz gefunden habe, dass Abou Sehl Ouïdjen ein solches Instrument angab, dass er aber das Werk des letzteren, worin es mitgeteilt sei, nicht habe auffinden können. Deshalb habe er sich selbst an die Erfindung eines solchen Apparates gemacht, die ihm auch mit Beihilfe seines Herrn des Scheik Abou'l Ma'ali Mouça Ben Jounos gelungen sei. Das fragliche Werk des Abou Sehl ist nun aber gerade unsere zweite Abhandlung, die also doch nicht so ganz unauffindbar gewesen zu sein scheint! Dieselbe übertrifft an Klarheit und Reichhaltigkeit die des Hoceïn entschieden, zumal da Anweisungen gegeben werden, wie mittelst des Instrumentes Kegelschnitte zu zeichnen sind, die gegebenen Bedingungen genügen.

Das Bedürfnis nach solchen Instrumenten war bei den Arabern teils den Anforderungen der Kunst (vgl. l. c. p. 21), teils denen der Wissenschaft entsprungen. So führt Woepcke in seinem Werke L'Algèbre d'Omar 1851. pag. 93 einen Mechanismus an, dessen sich der Mathematiker *Jbn Ahaïtham* zur Construction eines Archimedischen Problems bediente, das auf die Gleichung $x^3 - cx^2 + a^2b = o$ führt und in Ahaïthams Auffassung die wenn auch unbewusste Construction einer Fusspunktencurve der Parabel verlangt. Ebenso haben die Araber, nach Woepcke, die Kreisconchoide zu den Problemen dritten Grades benützt, deren Kenntnis sie wahrscheinlich schon von den Griechen überkamen.*)

*) Vgl. hierüber auch M. Curtze: Reliquiae Coppernicanae in der Zeitschr. f. M. u. Ph. Bd. 19. pg. 449 und 450 und in der von ihm besorgten Herausgabe des „Liber trium fratrum", Nova Acta Acad. Caes. Leopold. Car. germ. naturae curiosorum. t. 49. 1887 pg. 155. Hier wird die Trisection des Winkels mittelst der von Woepcke als „géométrié mobile" bezeichneten Methode geleistet. Woepcke sagt hierüber: „Le procédé de la géométrie mobile consiste à faire pivoter autour du point D une règle, divisée en parties aliquotes du rayon, jusqu'à ce que le nombre des parties interceptées entre la circonférence de cercle et le prolongement de AB soit égal au nombre de ces parties qui correspond à la longueur du rayon." Die Zeichnung des beschriebenen Ortes würde die Kreisconchoide liefern. Dasselbe Verfahren findet sich dann wieder bei Campanus in seiner Uebersetzung des Euklid und bei Jordanus Nemorarius im 13. Jahrhundert, der in seinem „Liber de triangulis" die Construction der drei Brüder wörtlich reproducirt.

Im Abendland, wo nur allmälig durch gelehrte Mönche die Wissenschaft der Araber in den Klöstern Eingang gefunden hatte, ohne jedoch in breitere Schichten des Volkes zu dringen, lag die Geometrie noch lange Zeit tief darnieder, bis endlich vom Ende des 15. Jahrhunderts ab, teils aus den Reihen der Praktiker *) Männer wie *Lionardo da Vinci* und *Albrecht Dürer* auftraten, die die geometrischen Wissenschaften förderten, teils Übersetzer und Commentatoren, wie *Commandinus* und der Grieche *Maurolykus* die Geometrie der Griechen wieder aus ihrem tausendjährigen Schlafe erweckten, so dass die geometrische Forschung anfangs zwar langsame Fortschritte machte, bald aber an Allgemeinheit die griechischen Vorbilder übertraf.

Fassen wir zunächst die beiden eben genannten grossen Künstler ins Auge, so tritt uns *Lionardo da Vinci* **) (1452 bis 1519) als der Erfinder des bekannten Ovalwerkes oder der Ellipsendrehbank entgegen, die in wenig veränderter Form noch heute im Gebrauch ist; *Albrecht Dürer* aber gibt in seiner „Underweysung der messung mit dem zirkel vñ richtscheyt", Nürnberg 1525, ausser verschiedenen Methoden die Kegelschnitte punktweise zu construiren, zwei Instrumente zur Zeichnung von Curven an. Das eine (Fig. 3) dient zur Zeichnung einer von ihm „muschellini" genannten Curve 4. Ordnung, „die in mancherley sachen zu brauchenn ist". Das in der Figur sichtbare Rädchen wird in der horizontal liegenden Rinne, die in 32 Teile geteilt ist, verschoben, während der um die Axe des Rädchens drehbare Zeiger längs der in 32 ebenso grosse Teile geteilten verticalen geschlitzten Schiene


Fig. 3.

*) Die deutschen Bauhütten des Mittelalters haben erwiesenermassen nach bestimmten geometrischen Normen gearbeitet; S. Günther: Zur Geschichte der Math. im Mittelalter. Ztschr. f. M. u. Ph. Bd. 20. Hist. Abtl. pg. 2.

**) Dass Lionardo das Ovalwerk erfand, ergibt sich aus einer Bemerkung in der Schrift Lomazzo's: Idea del tempio della pittura. 1590 pg. 17, woselbst der Verfasser mit Berufung auf Melzi, einen Schüler Lionardo's, angibt, dass derselbe das Ovalwerk construirt habe: „Oltre di ciò egli ritrovò l'arte d'intornir gli ovali che è cosa degna di molta maraviglia.

jedesmal auf dieselbe Nummer eingestellt wird, auf welcher der Mittelpunkt des Rädchens steht; hiebei markirt die Spitze des Zeigers die Punkte der Curve. Das zweite Instrument ist verfertigt „damit man an vil end /hoch / nyder / zur seytten / für sich oder hynder sich / eyne schlangenlini deuten vñ reyssen mag.“ Die in Fig. 4. ersichtlichen Stangen können an den geteilten Rädern (deren Radien sich wie $4 : 2\sqrt{2} : \sqrt{2}$ verhalten) unter beliebigen Winkeln eingestellt und ausserdem verlängert oder verkürzt werden und lassen sich um die Axen der Räder nach allen Richtungen bewegen. Man erkennt, dass man mit diesem Instrumente je nach Stellung, Bewegung und Anzahl der Stangen die verschiedensten cyklischen Curven erzeugen kann, als deren Erfinder also Dürer gelten muss.*) So erhält man z. B. wenn die beiden mittleren Stangen festgestellt, und nur die erste und letzte beweglich gelassen werden, die Punkte einer gewöhnlichen Epicykloide mit einer Schleife, sobald man die beiden Arme um gleich viele auf den Rädchen abzulesende Grade in gleichem Sinne dreht. Diese Epicykloide zeichnet Dürer und nennt sie eine „spinnenlini“; ihre Erzeugung durch zwei aufeinander rollende Kreise von gleichen Radien kennt er jedoch noch nicht.

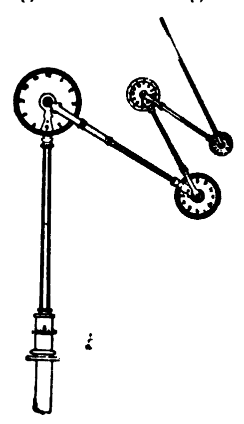


Fig. 4.

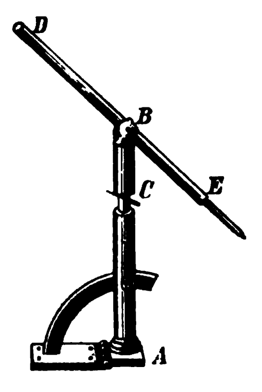


Fig. 5.

Während Lionardo und Dürer das praktische Interesse im Auge hatten, tritt uns in dem Venetianer *Francesco Barozzi* (Barocius), dem Übersetzer und Commentator des Proklus und Heron ein Mathematiker entgegen, der in seinem 1586 verfassten Buche über Asymptoten**) zwei Apparate

---

*) S. Günther: Albrecht Dürer, einer der Begründer der modernen Curvenlehre. Bibliotheca mathematica v. Eneström. 1886. pg. 139.

**) Bezüglich der genaueren Citate verweise ich auf meine Notiz über die ersten Kegelschnittzirkel. Zeitschr. f. M. und Phys. B. 35. Hist. Abtl.

zur Construction von Kegelschnitten angibt, die auf demselben Gedanken beruhen, wie das von uns früher angeführte der Araber. Barocius, der sein Instrument wahrscheinlich unabhängig von seinen arabischen Vorläufern 1566 erfand, gibt daselbst auch noch die Zeichnung und Beschreibung eines von einem Zeitgenossen *Giulio Thieme* (†1588) erfundenen Zirkels, dessen mangelhafte Abbildung wir aber hier nicht wiedergeben wollen. Das in Fig. 5. abgebildete Instrument ist dem der Araber so ähnlich, dass es ohne weitere Erklärung verständlich sein dürfte.

Ein ähnliches Instrument zum Zeichnen von Ellipsen, wahrscheinlich für Handwerker bestimmt, findet sich in dem 1578 erschienenen Theatrum machinarum et instrumentorum von Bessoni, ebenso schlecht gezeichnet als erklärt, woselbst auch ein Zirkel zum Beschreiben von Spiralen angegeben ist. Doch halten wir uns hierbei nicht länger auf und erwähnen, der Zeit etwas vorgreifend, den Kegelschnittzirkel des Astronomen *Christoph Scheiner* (1573—1650), der auf dem gleichen Principe wie die Instrumente des Barozzi und der Araber beruht, aber eine etwas bessere Ausführung zeigt. Scheiner construirte ihn speciell zum Zeichnen der Schattencurven. Diese Curven, bereits den Arabern als Kegelschnitte bekannt, scheinen im Mittelalter erst durch den oben erwähnten Maurolykus*) wieder als solche erkannt worden zu sein, als derselbe einen Tractat über die Sonnenuhren schrieb, die damals die Mathematiker vielfach beschäftigten. Dieser Zirkel besteht (Fig. 6.) aus einer Axe AB, die unter beliebigem Winkel

---

pag. 161, die eine Biographie des im Text erwähnten Giulio Thieme veranlasste: G. Thieme, uomo d'arme e di scienze del secolo XVI. Venezia da Fedele Lampertico 1891. Interessante Notizen über Barocius finden sich in Libri: Histoire de sciences mathématiques. t. 4. p. 85—87. — Eine sehr schöne Zusammenstellung der neueren Apparate zum Zeichnen der Kegelschnitte findet man in: E. Fischer: Beiträge zur Geschichte der Zeicheninstrumente. Dinglers polytechnisches Journal. B. 188. 217. 261.

*) Die Stelle findet sich in den 1553 und 1578 erschienenen „De lineis horariis libri tres." Ausg. 1575. pag. 81—82. Von da ab werden in der Literatur über Gnomonik die Stundenlinien stets als Kegelschnitte construirt, so z. B. in dem zu Rom 1562 erschienenen Werkchen des Commandinus: „De horologiorum descriptione" pag. 56, sowie in des berühmten Christoph Clavius: „Fabrica et usus instrumenti ad horologiorum descriptionem". Romae 1586. pag. 46.

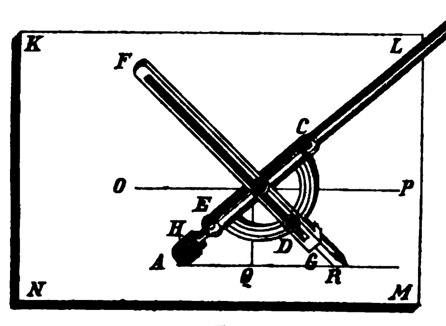


Fig. 6.

gegen die Zeichnungsebene festgestellt werden kann und die ganze Vorrichtung trägt. Der graduirte Halbkreis C D E ist in einer Hülse um die Axe leicht drehbar, und kann in beliebiger Höhe auf derselben durch die Hohlkügelchen C und E festgestellt werden. Die Schiene F G, die längs des Schlitzes um die Schraube D aufwärts und abwärts geschoben werden kann, trägt den Zeichenstift und wird unter einem bestimmten Winkel gegen die Axe eingestellt, was in der Weise geschehen kann, dass, während man Halbkreis und Schiene D F um die Axe dreht, der Stift beständig die Zeichnungsebene berührt. Scheiner's Schüler, Georg Schönberger, der das Instrument in seinen „Exegeses fundamentorum gnomonicorum". Ingolstadt 1614, beschreibt, gibt genau die Stellungen an, die Axe und Stift haben müssen, damit man die drei verschiedenen Gattungen von Kegelschnitten erhalte. Zur Construction von Sonnenuhren, für die es bestimmt war, mag das Instrument wohl brauchbar gewesen sein, obwohl es kaum sehr feine Zeichnungen geliefert haben wird.

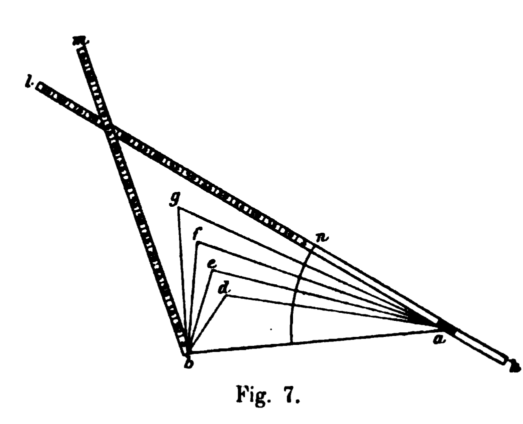


Fig. 7.

Zu diesen Kegelschnittzeichnern gesellt sich noch ein Instrument, das die Hyperbel aus ihren Brennpunkten und der constanten Differenz der Radienvectoren zu erzeugen lehrt und sich in einem hinterlassenen Manuscript des berühmten Italieners *Guido Ubaldo del Monte* (1545—1607), einem Schüler des Commandinus und

Zeitgenossen Galileis findet.*) In Fig. 7 sind a und b die beiden Brennpunkte. Die Schiene bm wird in b auf der Zeichenebene festgesteckt, in a ist ein Schieber mit einem Stift, durch den die Schiene kl ebenfalls befestigt und zugleich je nach der Axenlänge an der zu zeichnenden Hyperbel verlängert und verkürzt werden kann. Ferner sind auf den gleichen Längen bm und ln gleiche Masstäbe aufgetragen, so dass man die beiden Lineale durch Drehung um ihre festen Punkte in den Punkten zur Kreuzung bringen kann, die mit gleichen Nummern versehen sind. Diese Kreuzungspunkte sind dann die Punkte der Hyperbel. Es scheint dieses Instrument das älteste zu sein, das zu einer wenigstens punktweisen Erzeugung der Hyperbel aus einer ihrer Eigenschaften dient. Anschliessend an die Mitteilung desselben gibt Ubaldo auch die auf demselben Principe beruhende continuirliche Beschreibung der Hyperbel durch Fäden, die der Gärtnerconstruction der Ellipse durch Alhasan entspricht.

Wir haben eingangs unserer Abhandlung gesehen, dass die Griechen die Curven in drei Classen einteilten: die ebenen, die körperlichen und die linearen oder mechanischen Örter. Diese Unterscheidung behauptete sich bis zum Erscheinen der Geometrie von *René Descartes* (1596—1640) im Jahre 1637. Dieser grosse Philosoph und Mathematiker, der in jenem bescheidenen Werkchen die Grundlage unserer analytischen Geometrie schuf**), unterzieht jene Einteilung im 2. Buche desselben einer eingehenden Analyse und kommt zu dem Schlusse, dass dieselbe keineswegs berechtigt sei, da die Kegelschnitte sowohl als die höheren Curven ebensogut als ebene Örter aufzufassen seien, wie Gerade und Kreis, indem sie wie diese durch Bewegung eines Punktes in der Ebene erzeugt werden können, und jegliche Bewegung, die durch ein Instrument hervorgebracht werden kann, in der geometrischen Forschung in gleicher Weise berechtigt sei. Auch sagt er sehr treffend, dass die leichtere oder schwierigere Ausführung eines

*) Libri: Histoire des sc. math. en Italie. t. 4. pag. 380. Note VII.

**) Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita. Editio Franc. Schooten. Amstelodami 1659. pag. 17—23. Bezüglich der Vorläufer Descartes' in seiner Coordinatenmethode vgl. M. Curtze: Die mathem. Schriften des Nicole Oresme, Zeitschr. f. M. u Ph. B. XIII Suppl. p. 68-92.

Instrumentes viel eher den Gebrauch desselben aus der Mechanik als aus der Geometrie verbannen müsse, da es ja bei letzterer nur auf die Exactheit des Gedankens (ratiocinatio) ankomme, die bei jeder Erzeugung von Curven gleich vollständig sein könne (aeque perfecta esse potest). Dagegen will er nicht ganz consequent die von Leibniz als transscendent bezeichneten Curven, wie die Spirale, die Quadratrix und andere, von der Geometrie ausgeschlossen wissen. An diese Gedanken anschliessend gibt er als Beispiel eine Erzeugung höherer algebraischer Curven an, die man durch ein in Fig. 8. abgebildetes Instrument erreicht, das nach seiner Ansicht ebensogut zu verwenden ist, als ein Zirkel. Dasselbe besteht Fig. 8. aus einem festzuhaltenden Lineale Y Z; um Punkt Y ist eine zweite Schiene Y X drehbar, die in B ein senkrecht zu ihr be-

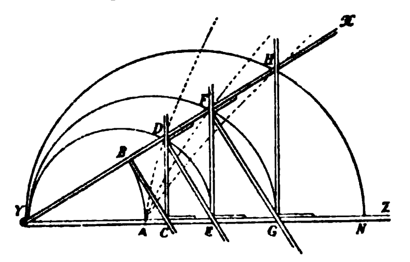


Fig. 8.

festigtes Lineal B C trägt, während die übrigen in beliebiger Zahl vorhandenen Winkel-Lineale C D, D E etc. sich bei Oeffnung des Winkels X Y Z in leicht ersichtlicher Weise längs der Schienen X Y uud Y Z verschieben, wobei Punkt B einen Kreis, die Punkte D, E, F etc. aber complicirtere Curven beschreiben. Hieran anschliessend zeigt er an einem einfacheren Beispiele (Erzeugung einer Hyperbel aus ihren Asymptoten und einer Axe), wie man eine solche durch beliebige Bewegung erzeugte Curve mit Beziehung auf ein festes Coordinatensystem durch eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen darstellen kann, und hiedurch eine sachgemässere Einteilung der Curven nach dem Grade ihrer Gleichung erhält. Doch verfolgen wir diesen Gedanken, der für die Curvenlehre so fruchtbar wurde, nicht weiter und beschränken wir uns auf die Wiedergabe der mechanischen Erzeugung der sogenannten Cartesischen Ovale, die er in demselben Werke pag. 54 angibt. Sie verdanken ihre Entstehung optischen Betrachtungen, indem sie die Eigenschaft besitzen, Lichtstrahlen, welche von einem Punkte ausgehen, durch Refraction wieder in einem Punkte zu vereinigen. In Fig. 9. ist F A = A G und F G in L so geteilt,

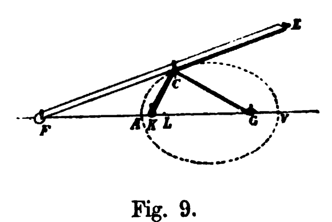


Fig. 9.

dass FL : LG = m : n gleich einem constanten Brechungsindex ist. Ferner ist AL in K halbirt. Nun dreht man um F eine bewegliche Schiene, während man einen in E an derselben befestigten Faden mit dem Stifte in C stets an die Schiene andrückt. Dieser Faden läuft von E über C um den Zapfen in K, dann wieder nach C zurück, um in dem zweiten Zapfen in G zu enden. Die Länge dieses Fadens ist also GA + AL + FE — AF. Punkt C beschreibt das Oval.

Einer der ersten, der die Tragweite der reformatorischen Ideen Descartes' wenigstens teilweise erkannte und mit Wort und Schrift für die anfangs heftig angegriffenen Lehren eintrat, war der Niederländer *Franz von Schooten*, der Jüngere (1615—1660), der auch Descartes' Geometrie in lateinischer Übersetzung und, nach dem Gebrauche jener Zeit, mit Commentaren versehen, herausgab. Er ist als der erste zu bezeichnen, der die Kegelschnitte als ebene Curven auffassend, eine systematische Erzeugung derselben aus ihren Eigenschaften versuchte, wodurch er zur Construction einer Reihe mehr oder weniger verwendbarer Instrumente gelangte, die er in einem „De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus" betitelten Werke 1675 herausgab.

Schooten beginnt seine Darstellung, indem er die einfache Geradführung angibt, die entsteht, wenn der Endpunkt D (Fig. 10.) eines der constanten Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ABD auf der Basis gleitet, während der andere Schenkel sich um seinen Fusspunkt A dreht. Ein Punkt C, der sich auf dem ersteren in einer Entfernung von der Spitze gleich dem constanten Dreiecksschenkel befindet, beschreibt dann eine Gerade AC, während jeder andere Punkt des gleitenden Schenkels E eine Ellipse durchläuft. Darauf gründet sich das Instrument in Fig. 10., das auch in *der* Form angegeben wird,

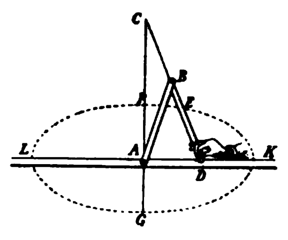


Fig. 10.

wo Punkt E ausserhalb der Strecke BD liegt. Da aber bei dieser Bewegung der Punkt C auf der Axe läuft, so kann man das Gelenk A B weglassen und durch einen Schlitz der Axe A C ersetzen, in dem ein Zapfen C der verlängerten Schiene DBC sich bewegt; dadurch erhält man die bekannte organische Beschreibung des Proklus wieder, für welche Schooten mehrere Ausführungen angibt. An zweiter Stelle zeigt er, dass der eine Basispunkt C eines unveränderlichen gleichschenkligen Dreieckes BCD in Fig. 11., das mit seiner Spitze B an einem um A beweglichen Gelenk BA (= BD = BC) in einem Charnier drehbar befestigt ist, eine Gerade A C beschreibt, wenn sein anderer Basispunkt D auf der Linie A D gleitet. Irgend ein weiterer mit dem Dreieck fest verbundener Punkt dagegen durchläuft eine Ellipse. Nach diesem Principe construirt er ebenfalls ein Instrument, ähnlich wie das in Fig. 10. abgebildete, nur trägt ein Punkt auf CD in Fig. 11. den Stift. Des weitern ergibt sich aus diesem Princip, dass man auch zwei schief gegeneinander liegende Schienen zur Führung der Punkte C und D in Fig. 10. anwenden kann.

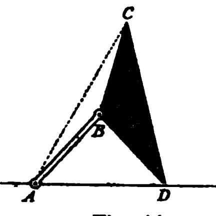
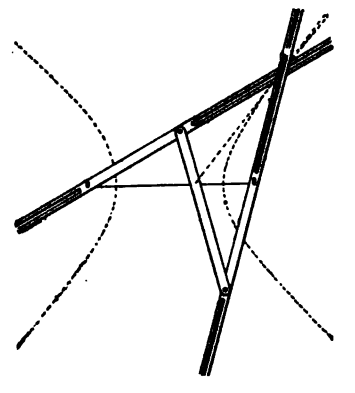


Fig. 11.

An dritter Stelle benützt Schooten das Princip der constanten Radiusvectoren-Summe und gibt ausser der Fadenconstruction des Alhasan zwei Instrumente an, in denen die Fäden durch Schienen ersetzt sind. Dieselben sind aber wegen der notwendigen mehrfachen Charnierverbindungen in ihrer Beweglichkeit jedenfalls sehr gehindert, so dass sie kaum eine praktische Verwendung zulassen. Das Gleiche gilt von seinen zur Construction der Hyperbel aus den Axen oder conjugirten Durchmessern sowie aus der constanten Differenz der Brennstrahlen abgeleiteten Instrumenten, die in grosser Zahl angeführt werden. In Fig. 12. geben wir eines derselben wieder, das noch relativ am


Fig. 12.

bequemsten verwendbar ist und wohl keiner weiteren Beschreibung bedarf. Für die Parabel endlich werden zwei Apparate angegeben, mit welchen man dieselbe aus Brennpunkt und Directrix erzeugt. Das eine Instrument, das wir in Fig. 13. wiedergeben, ist wohl im Princip dasselbe, welches schon Isidorus von Milet erfunden hat (vgl. pag. 5).

Die Erzeugung der Kegelschnitte durch Bewegung finden wir auch noch in des Niederländers *Johann de Witt* (1625 bis 1672) „Elementa curvarum linearum“, wo dieselben erhalten werden, indem der eine Schenkel eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit um seinen Scheitel rotirenden Winkels eine sich gleichförmig parallel verschiebende Gerade schneidet. Diese Idee hatte auch Cavalieri 1647 gehabt, und sie bildet den Keim der berühmten organischen Erzeugung der Kegelschnitte durch Newton und Maclaurin, auf die wir weiter unten noch zu sprechen kommen.

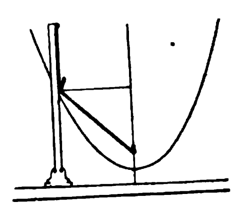


Fig. 13.

In diesen Männern trat uns vornehmlich der Mathematiker entgegen, dem es darum zu thun ist, die Erzeugungsweise der Curven zu studiren; anders bei *Benjamin Bramer,* weyl. Fürstl. Hess. Rent- und Baumeister zu Ziegenhayn, der in seinem 1634 entstandenen und 1684 zum erstenmale erschienenen „Apollonius Cattus oder Kern der gantzen Geometriae“ ohne, nach seiner Behauptung, vorhergehende Schriften über Kegelschnitterzeugung zu kennen, eine Reihe von Instrumenten zeichnet, beschreibt und mathematisch begründet, die für praktische Zwecke dienlich sein sollen. Darunter ist neben den schon wiederholt erwähnten Fadenconstructionen der drei Kegelschnitte zum erstenmale eine leidlich gute Ausführung des

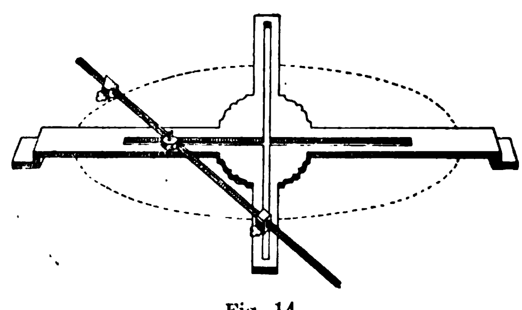


Fig. 14.

Ellipsographen der Alten, die wir in Fig. 14. abbilden. Ferner gibt er zwei Apparate an, die auf demselben Principe, wie Barozzi's und Scheiner's Zirkel beruhen. Wir können hier nur den ersten anführen, da der zweite, sein sogenanntes „Universal-Conisches Instrument" eine Abbildung erforderte, die wir im Texte nicht unterbringen können, und übrigens, wenn er auch ingeniös ausgedacht ist, doch wohl praktisch kaum mit Vorteil verwendet werden kann.

Der in Fig. 13. dargestellte Apparat besitzt in C D einen Stift, der in einem Röhrchen C E läuft, während die Zeichnungsebene A B gegen die Axe G H des Instrumentes beliebig geneigt werden kann. Die Drehung des Röhrchens geschieht mittelst des Schlüssels J. Hat die Zeichnungsebene die in der Figur angegebene Stellung, so entsteht eine Parabel, während man Ellipsen erhält, wenn A B nach oben, und Hyperbeln, wenn sie nach hinten geneigt wird.

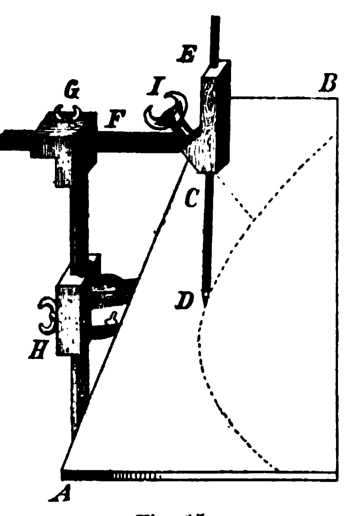


Fig. 15.

Wir haben im Fortgang unserer Entwicklung gesehen, wie bis zum Ende des 17. Jahrhunderts einerseits die praktischen Bedürfnisse, andererseits das fortschreitende Wachstum der geometrischen Wissenschaften vielfach Erzeugungsweisen von Curven und Instrumente zur Ausführung derselben zu Tage förderten, und müssen nun zunächst des Einflusses gedenken, den die durch Vieta (1540—1603) und Descartes angebahnte Verbindung der Algebra mit der Geometrie auf diese Bestrebungen ausübte.

Wohl hatten sich schon die Araber der Curven zur Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades bedient, und eine genaue Durchforschung der uns leider noch zu wenig bekannten Literatur aus den Zeiten der Glanzperiode dieses Volkes dürfte noch manche bisher unbekannte Resultate ans Licht bringen; aber diese Forschungen der Orientalen waren bis auf unsere

Zeit fast gänzlich unbekannt geblieben. *Vieta's* Entdeckung, dass jede cubische Aufgabe in den Problemen der Würfelverdoppelung und der Trisection des Winkels enthalten ist*) sowie *Descartes'* Construction der höheren Gleichungen mittelst der Kegelschnitte müssen daher als selbständige Nacherfindungen aufgefasst werden. Letzterer hatte im dritten Buche seiner Geometrie die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades gelehrt und als oberstes Princip hingestellt, dass man zur Construction derselben Curven von möglichst niedrigem Grade, wie die Kegelschnitte, verwenden solle. An ihn schloss sich im 17. und 18. Jahrhundert eine ganze Reihe von Gelehrten an, aus deren Arbeiten wir das für uns interessanteste gleich hier im Zusammenhange herausheben, um später nicht noch einmal auf die geometrische Auflösung der Gleichungen zurückkommen zu müssen.

Manche Autoren, wie der Niederländer *Fr. van Schooten* und der Belgier *de Sluze* (1659), sowie die Engländer *Baker* (1684) und *Halley* (1687)**) vervollständigten Descartes' Methode und fassten die gefundenen Resultate in Regeln zusammen, die eine raschere Verwendung erlaubten, während *Isaak Newton*, wie überall, so auch in diesem Zweige der reinen Mathematik, neue Gesichtspunkte eröffnete. Descartes und seine Nachfolger hatten sich hauptsächlich des Kreises und der Parabel zur Construction der Gleichungen bedient; Newton aber bemerkte in seiner „Arithmetica universalis" 1732, pag. 213, dass er nicht den Grad oder die Einfachheit der die Curve bestimmenden Gleichung als massgebend für ihre Auswahl zur Construction halte, sondern lediglich ihre leichtere *instrumentale Erzeugungsweise*, weshalb er es auch für vorteilhafter hielt die Nikomedische Conchoide als die

*) Vgl. M. Cantor. Vorl. über G. d. M. II. pag. 539, oder Suter: Geschichte der Mathematik I. pag. 166.

**) Fr. de Schooten: Commentar zu Descartes Geometrie. Vgl. Anm. ** zu pg. 13. De Sluze: Mesolabium seu duae mediae proportionales per circulum et ellipsin vel hyperbolam infinitis modis exhibitae. Leod. 1659. — Baker: Clavis geometrica catholica 1684. — Halley: De constructione problematum solidorum sive aequationum tertiae vel quartae potestatis, unicâ datâ parabolâ ac circulo efficiendâ, dissertatiuncula. Philosophical transactions 1687, Nr. 188. Auch als Anhang zu Newtons Arithm. univ. p. 274 gedruckt.

Kegelschnitte zu benützen. Von den letzteren aber zieht er wieder die Ellipse wegen ihrer leichteren und genaueren Construirbarkeit der Parabel vor (pag. 234). So vollzieht denn Newton die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades mit Benützung einerseits der Conchoide, andererseits der Ellipse. Auch führt er l. c. pag. 130 und pag. 231 eine organische Erzeugung der Cissoide des Diokles an, um auch diese Curve zur Construction der beiden mittleren Proportionalen verwenden zu können. Die einfache Beschreibung dieser Curve, die sich leicht durch ein Instrument realisiren lässt, besteht darin, dass in Fig. 16. der eine Schenkel D E des rechten Winkels D E F beständig durch Punkt D geht, während der Endpunkt F des anderen Schenkels, der gleich A D gemacht ist, auf der zu A D senkrechten Geraden A F gleitet. Die Mitte C von E F beschreibt dann die verlangte Curve.

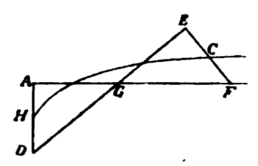


Fig. 16.

Bisher hatte man die Gleichungen graphisch dadurch gelöst, dass man ihre Wurzeln als Schnittpunkte zweier Curven aufsuchte, die entweder nach Descartes von möglichst niedrigem Grade oder nach Newton möglichst leicht instrumental erzeugbar sein mussten. Diese letztere Forderung brachte nun *Jac. Bernoulli* und den Marquis *de l'Hôpital* (1720)*) auf den Gedanken eine Gleichung von der Form

$$a = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots + nx^n$$

dadurch zu construiren, dass sie direct die Schnitte der Linie $y = a$ mit der Curve $y = bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ aufsuchten. In derselben Weise verfuhren auch *Gabriel Cramer* und Andreas von *Segner***), der die Sache noch dahin vereinfachte, dass er die Schnittpunkte der Curve

$$y = -a + bx + cx^2 + \dots + nx^n$$

mit der x-Axe aufsuchte. Segner, der angibt selbständig auf diesen Gedanken gekommen zu sein, ohne Cramers Methode zu kennen, wurde wie dieser von dem Gesichtspunkte geleitet, dass

*) De l'Hôpital: Traité analytique des sections coniques. Paris 1720. pag. 348. Jac. Bernoulli; opera pag. 690.

**) Cramer: Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750. pag. 92. Segner: Novi Commentarii Acad. Petrop. 1761. p. 111.

sich solche parabolische Curven wenigstens punktweise mit genügender Genauigkeit construiren lassen, wenn auch, wie er sagt, die Herstellung eines Instrumentes zu ihrer mechanischen Erzeugung sehr schwierig sei, weshalb er sie nicht versucht habe.

Diese Bemerkung veranlasste 1768 den Engländer *Rowning* zu dem Versuche der Construction eines solchen Apparates, den er in den Philosophical Transactions 1771. V. 60 p. 240 beschreibt und abbildet. Dieser beruht auf folgendem Principe. Sei z. B. die Gleichung 3. Grades zu lösen;

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 \ (= y),$$

dann bedeute in Fig. 17. ZZ, SS ein rechtwinkliges Axensystem. Man macht

$$OA = \frac{a}{n}, \ AB = \frac{b}{n}, \ BC = \frac{c}{n}, \ CD = \frac{d}{n},$$

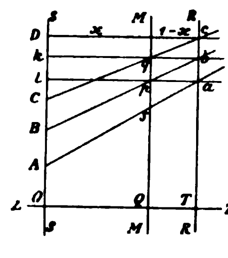


Fig. 17.

wobei jede dieser Grössen je nach ihrem positiven oder negativen Zeichen von dem Endpunkte der letzten Strecke aufwärts oder abwärts aufzutragen ist. Durch den letzten Endpunkt, in unserem Beispiele D, zieht man eine Parallele zu Z Z, die die in der Entfernung 1 von 0 senkrecht zu Z Z gelegte Gerade R R in c trifft. c C schneidet dann eine beliebige Parallele M M zu R R in q; zieht man q k ‖ Z Z, so trifft diese R R in b, b B schneidet M M in p und p l ‖ Z Z trifft die R R in a, während endlich a A die M M in s durchsetzt; dann ist, wie man leicht zeigt,

$$Qs = \frac{y}{n} = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{n}$$

Bleiben nun die Linien S S, Z Z, R R, D c, c C, beständig fest und verschiebt man M M parallel zu sich selbst, so dass q beständig auf M M bleibt und auf c C gleitend die Linie k b parallel zu sich selbst mitführt, so verschiebt sich b längs R R und p gleitet auf M M und der sich um B drehenden Linie B b und zieht die Linie l a beständig parallel zu sich selbst mit. Gelangt nun Punkt s, der die parabolische Curve verzeichnet, auf die Abscissenaxe, so gibt die Entfernung O s = x eine reelle Wurzel der Gleichung y = Q s = o an.

Dieses Princip hat Rowning, wie schon bemerkt, in einem Apparat verwirklicht und zwar für den Fall einer Gleichung 2. Grades, dessen Abbildung wir aber im Text nicht wiedergeben können. Das Instrument wurde, wie der Erfinder bemerkt, von einem ausgezeichneten Mechaniker in London ausgeführt. Ueber die praktische Verwendbarkeit eines solchen naturgemäss complicirten Apparates brauchen wir uns nicht weiter zu verbreiten, es genügt uns darauf hingewiesen zu haben, wie die Gleichungstheorie auch die mechanische Erzeugung der höheren parabolischen Curven veranlasst hat.

Damit haben wir in Kurzem den Einfluss geschildert, den die Algebra auf die Erzeugung der Curven zu üben vermochte, und kehren wieder zu den geometrischen Forschungen zurück. So eifrig sich einzelne Zeitgenossen Descartes bemühten, die analytische Methode desselben zu verwerten, so dauerte es doch noch geraume Zeit, bis es gelang, wirklichen Vorteil aus derselben zu ziehen, und wir sehen daher, dass die bedeutendsten Mathematiker seines Jahrhunderts, wie *Fermat* (1608—1665), *Blaise Pascal* (1623—1662) und andere sich noch mit Vorliebe der Methode der Alten bedienten. Dazu trug auch hauptsächlich die Richtung bei, die die geometrische Forschung genommen hatte, seitdem Cavalieris „Geometria indivisibilium“ 1635 erschienen war. Diese Richtung gipfelt in drei Problemen: der Quadratur der Curven, dem Problem der Tangentenlegung und der Rectification der krummen Linien, welche den Boden bereiteten, auf dem die Infinitesimalrechnung emporspross, die dann im Verein mit Descartes' analytischer Geometrie die Methoden der Alten auf lange Zeit fast ganz verdrängte. Von jenen Curven, die hauptsächlich zur Behandlung dieser drei Probleme in's Auge gefasst wurden, tritt uns zunächst eine entgegen, die in der Geschichte der Mathematik eine hervorragende Rolle spielt, die Cykloide. Obgleich die epicyklische Bewegung schon Hipparch im 2. Jahrhundert vor Christus bekannt war, und Albrecht Dürer, wie wir sahen, cyklische Curven zeichnete, so ist doch auf die Entstehung der gewöhnlichen Cykloide, die durch einen Punkt eines auf der Geraden rollenden Kreises erzeugt wird, erst *Galilei* (1590) aufmerksam geworden*), von dem auch

*) Vgl. Cantor. Vorl. üb. G. d. M. II. p. 780.

ihr Name stammt. Sein berühmter Schüler *Toricelli* (1608 bis 1647), der fast gleichzeitig mit *Roberval* (1602—1675) zuerst wieder das Interesse auf sie hinlenkte, erwähnt dann in seinem 1644 erschienenen Werke „Opera geometrica“ auch diejenigen Cykloiden, welche durch einen ausserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises befindlichen Punkt beschrieben werden. Da für uns nur die mechanische Erzeugung der Curven von Bedeutung ist, so übergehen wir den hervorragenden Einfluss, den dieselbe vermöge ihrer interessanten Eigenschaften auf die Entwicklung der mathematischen Wissenschaften hatte, und wenden uns zur Geschichte der allgemeinen cyklischen Curven.

Eine solche Curve, die von Pascal und Roberval auch Roulette oder Trochoide genannt wurde,*) wird durch einen Punkt erzeugt, der mit einem Kreise fest verbunden ist, welcher ausserhalb oder innerhalb auf der Peripherie eines festen Kreises rollt. *De la Hire* (1640—1718), der in seinem „Traité des épicycloides et leur usage dans les mécaniques“ 1699**) die Epicykloiden und deren Verwendung zur Verzahnung der Räder eingehend behandelt, nimmt in der Einleitung die Erfindung dieser Curvenerzeugung für sich in Anspruch, indem er nur erwähnt, *Desargues* habe sie zur Construction eines Zahnrades angewendet, jedoch ohne, soviel ihm bekannt, etwas darüber veröffentlicht zu haben. Dabei schweigt er aber gänzlich von dem Dänen *Olaf Roemer*, der damals in Paris lebte, und den Leibniz ausdrücklich als den Erfinder (1674) der cyklischen Verzahnung bezeichnet.***) Ein sehr specieller Fall dieser Rollcurven findet sich schon von *Cardanus* 1570†) er-

*) Roberval: De Trochoide, Mémoires de l'Académie 1666. t. 6. p. 361. Pascal: Histoire de la Roulette. Oeuvres t. V. pag. 163 und pag. 200.

**) Mémoires de l'Académie. t. 9. p. 341. Vgl. bezüglich der einschlägigen Literatur: L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888. 2. Abschnitt, Anmerkungen.

***) Leibniz berichtet hierüber in einem Briefe an Bernoulli vom 18. Januar 1698, indem er sagt, es sei ihm unbegreiflich, dass de la Hire sich die Erfindung habe zueignen wollen, „nam eram Parisiis eo tempore quo is (Olaf Roemer) invenit, remque non tantum ab ipso Roemero sed et Hugenio intellexi quo tempore La Hirius in Academiam Scientiarum Regiam erat receptus.“

†) Cardanus. Opus novum de proportionibus numerorum, motuum etc. Basil. 1570. prop. 137. pag. 186.

wähnt, nämlich jener, wo ein Punkt der Peripherie eines Kreises der in einem andern von doppeltem Radius rollt, eine Gerade erzeugt. Jene speciellen Curven aber, die von einem Punkte der Peripherie des rollenden Kreises beschrieben werden, sind zum erstenmale als Cykloiden bezeichnet und untersucht in Newtons berühmten Werke „Principia philosophiae naturalis mathematica" 1686 pag. 158. Man nennt dieselben jetzt bekanntlich Epicykloiden oder Hypocykloiden, je nachdem der rollende Kreis ausserhalb oder innerhalb des festen sich bewegt.

Diese Curven sind aber einer doppelten Erzeugung durch zwei Kreispaare fähig, deren feste Kreise concentrisch sind. Dabei ist der Radius des rollenden Kreises bei der Erzeugung durch das eine Kreispaar gleich dem Abstande der Mittelpunkte des anderen Kreispaares, und wenn R, r, in Fig. 18. die Radien des ersten R', r', die des zweiten Paares sind, so besteht die Beziehung:*)

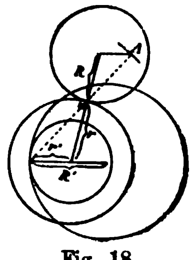


Fig. 18.

$$\frac{R}{r} - \frac{R'}{r'} = 1$$

Diese doppelte Erzeugung wurde schon von De la Hire und fast ein Jahrhundert später 1781 von *L. Euler* (1707—1783), der des ersteren Arbeit nicht kannte, angegeben**), jedoch behandelten beide Autoren nur den Fall, dass der beschreibende Punkt A auf der Peripherie des rollenden Kreises liegt.

De la Hire, welcher mit staunenswerter Gewandtheit die Methoden der Alten zu handhaben verstand, verallgemeinerte alsbald, ohne Descartes' Analysis zu benützen, das Problem der Rollcurven in seinem 1706 in den Mémoires de l'Académie pag. 340 veröffentlichten „Traité des roulettes". Er lässt eine beliebige Curve in einer beweglichen Ebene, mit der ein Punkt derselben irgendwie fest verbunden ist, auf einer zweiten Curve

*) Vgl. bezüglich dieses Satzes Burmester l. c. pg. 137, dem auch Fig. 16 entnommen ist. Herr Burmester hat ganz kürzlich diese doppelte Bewegung durch einen schönen Apparat veranschaulicht.

**) De la Hire l. c. pag. 255. Euler. Acta academiae Petrop. 1784 pro anno 1781. pars I. pg. 48.

abrollen, die in einer festen Ebene liegt, und untersucht die Eigenschaften der Bahn des bewegten Punktes: der Roulette.

Inzwischen hatte *Huygens* (1629—1695) bei Gelegenheit seiner Studien über die Pendeluhr 1673*) die Evoluten der Curven gefunden und speciell für die Cykloide und die Kegelschnitte bestimmt. Diese benützte De la Hire, um zu zeigen, dass man jede Curve als Roulette eines Punktes einer Geraden auffassen kann, die an einer zweiten Curve hinrollt. Die so erhaltene Roulette ist also nichts anderes als eine Evolvente der gegebenen Curve, die nach Huygens' Auffassung durch den Endpunkt eines Fadens beschrieben wird, den man stets gespannt haltend an der Evolute abwickelt. Als speciellen Fall dieses Problems behandelt de la Hire pag. 369 auch die Kreisevolvente.

Nachdem noch 1707 *Nicole***) die Differentialgleichung der Rouletten für den allgemeinsten Fall gegeben und so de la Hire's Theorie vervollständigt hatte, wandte sich letzterer der allgemeinen Erzeugung der Conchoiden zu, indem er 1707 in dem Artikel „Des conchoides générales"***) sich diese Curven folgendermassen erzeugt denkt. In einer beweglichen Ebene liegt eine constante Strecke A P, mit der ein beliebiger Punkt C durch P C fest verbunden ist. Diese Ebene gleitet über eine zweite feste Ebene so, dass der Endpunkt A eine beliebige Curve der letzteren, die Basiscurve, durchläuft, während P A beständig durch einen festen Punkt jener Ebene geht. Punkt C beschreibt dann eine Conchoide. Als specielle Fälle werden die Conchoide des Nikomedes, die Kreisconchoide und die parabolische Conchoide betrachtet, Curven, deren Erzeugung und gestaltliche Verhältnisse auch in einem demselben Bande der Memoiren angehörigen Aufsatze von *Reaumur* (1683—1757) (pag. 197), näher untersucht werden, wo auch die Conchoiden auf elliptischer und hyperbolischer Basis ihre Behandlung finden.

Ausser der cyklischen und conchoidischen Erzeugung haben wir noch ein eigentümliches Verfahren zu erwähnen, wodurch es gelingt eine unbegrenzte Menge von Curven, ähnlich den Car-

*) Horologium oscillatorium. Paris 1673. pag. 59.

**) Mémoires de l'Académie. 1707. pag. 81.

***) Mémoires de l'Académie. 1708. pag. 32. (vom 10. Dez. 1707).

tesischen Ovalen zu erzeugen. Dasselbe rührt von Ehrenfried Walter v. *Tschirnhausen* (1651—1708), einem Freunde Leibniz's 1681*) her, der sich ebenfalls mit dem Tangentenproblem beschäftigte und eine Methode entdeckt zu haben glaubte, die allerdings mit einiger Modification für die eigens zu diesem Zweck erfundene Curvengattung, nicht aber allgemein galt. Tschirnhausen denkt sich eine Reihe von festen Focalpunkten mit Stiften versehen, in zweien derselben einen Faden befestigt und denselben um die übrigen Stifte so geschlungen, dass man ihn mit einer Bleifeder spannen und bewegen kann; dann beschreibt die Feder eine Tschirnhausen'sche Focalcurve; vgl. z. B. Fig. 19 die den Fall von 4 Brennpunkten erläutert. Man erkennt sofort, dass die Änderung der gegenseitigen Lage und der Anzahl der Brennpunkte eine Menge von Curven zu erhalten gestattet, die Tschirnhausen in Geschlechter teilt.

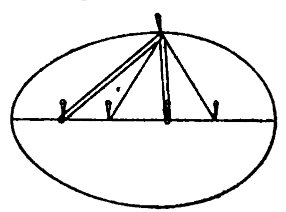


Fig. 19.

Ausserdem verallgemeinert Tschirnhausen seine Methode noch, indem er statt der Brennpunkte wieder die so gefundenen Ovale gesetzt denkt, um welche sich der Faden windet, um wieder neue Curven zu beschreiben, vgl. z. B. Fig. 20. Das Problem, die Tangenten an diese Curven zu legen, erhielt eine gewisse Berühmtheit und wurde von den ersten Mathematikern jener Zeit auf verschiedene Arten gelöst.

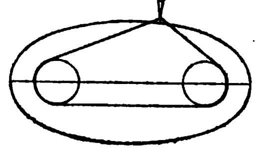


Fig. 20.

Grosses Interesse erregten auch die Tractorien oder Tractrixcurven, auf welche Huygens 1693 bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Quadratur der Hyperbel stiess**). Es interessirte ihn daran hauptsächlich der Umstand, „dass man sie durch eine einfache Bewegung beschreiben kann", indem die einfachste derselben von einem schweren Punkte durchlaufen wird, den

*) Tschirnhausen erwähnt seine Curven zuerst in einem Briefe an Leibniz vom 7. April 1681 und hat sie dann in seiner „Medicina mentis et corporis" 1687 pag. 68 und 69, veröffentlicht.

**) Leibnizens mathem. Schriften, herausgegeben von O. J. Gerhardt I. Abtl. Bd. II. pag. 164—165

man an einem Faden befestigt, dessen Ende man längs einer Geraden fortzieht. Die Richtung des Fadens ist hiebei beständig tangential an die Curve, und da seine Länge constant ist, so ist die erzeugte Bahn die Curve der constanten Tangenten. Die constante Tangente kann man auch, wie Huygens bemerkt (l. c. 517) durch ein Lineal ersetzen; wir werden weiter unten ein Instrument kennen lernen, wobei dies zur Anwendung kommt.

Allgemeine Tractorien ergeben sich, wenn man das Fadenende statt auf einer Geraden auf irgend einer beliebigen Curve führt. Auch diese scheint Huygens schon gekannt zu haben, da er die zuerst angeführte Tractrix als diejenige bezeichnet „quae inter Tractorias (ita enim vocari possunt) simplicissima censenda est". *Leibniz*, dem Huygens von diesem Probleme Mitteilung machte, sagt in einem Briefe vom 11. Oktober 1693*), dass er auf dasselbe durch den Arzt *Perraut*, den bekannten Herausgeber des Vitruv, aufmerksam gemacht worden sei, und bei Betrachtung desselben erkannt habe, dass es mit der Quadratur der Hyperbel zusammenhänge. Dabei bemerkt er sofort, dass man als Leitcurve jede beliebige Curve annehmen und somit durch diese Bewegung jede Curve mechanisch erzeugen könne. Ferner äussert sich Leibniz dahin, dass diese tractorische Erzeugung der Curven, nach seiner Ansicht ebensogut in der Geometrie zuzulassen sei, wie die cyklische oder die Erzeugung mittelst der Evoluten und dass er keinen Grund einsehe, warum man (nach Descartes) als geometrische Curven nur die algebraischen anerkenne. Seine Lösung der Quadratur mittelst der Tractorien, die er Huygens mitteilte, fand jedoch nicht dessen Beifall, indem derselbe ganz richtig bemerkt, dass eine exacte organische Erzeugung der höheren Tractrixlinien viel zu schwierig sei.

An diese Erfindung der Tractrixcurven knüpft sich noch eine andere Curvenbeschreibung, die von *Johann Bernoulli* (1667 bis 1748) herrührt**). Derselbe lässt eine beliebige Curve an einer andern ebenfalls beliebigen Curve so hingleiten, dass sie sich beständig parallel bleibt und untersucht die Curven, die ihre Punkte beschreiben. Diese Bewegung nennt er „motus reptorius"

*) Brief Huygens an Leibniz vom 29. Mai 1694 l. c. pag. 175.

**) Joh. Bernoulli opera. t. I. „Motus reptorius", pag. 415.

und unterscheidet einen „motus subreptionis“ und einen „motus obreptionis“, je nachdem die bewegliche Curve innerhalb oder ausserhalb der festen Curve hingleitet. Diese Bewegung muss nach Bernoullis Ansicht der von Leibniz und Huygens behandelten tractorischen mindestens an die Seite gestellt, wenn nicht vorgezogen werden, da die Parallelverschiebung die einfachste Bewegung sei und da man durch sie aus geometrischen (algebraischen) Curven wieder geometrische erhalte.

Die geschilderten Versuche, die verschiedenartigsten Bewegungen in die Geometrie einzuführen, mussten notwendig den Wunsch rege machen, Instrumente zu besitzen, mit denen sie sich realisiren liessen. Solche Apparate und Instrumente wurden in grosser Zahl von dem Venetianer Conte Gianbattista *Suardi* angegeben, der im Jahre 1752 ein reich ausgestattetes Werk*) veröffentlichte, in welchem er zur Beschreibung aller damals bekannten Curvengattungen Instrumente mitteilte. Wir erwähnen hier zunächst zwei Apparate zur graphischen Erzeugung der gewöhnlichen Cykloide und der übrigen cyklischen Curven, von welchen er eine ganze Fülle der verschiedenartigsten Formen mitteilt, die er mit seinem zweiten Instrumente (Fig. 22.) erhalten hat.

Der erste Apparat zur Construction der gemeinen Cykloide beruht auf folgendem Princip. Ist (Fig. 21.) D R V der rollende Kreis und V der erzeugende Punkt, so denkt sich Suardi den Kreis fest, legt in R die Tangente ERT an denselben und macht RT = arc. R V. Fällt man dann T N ⊥ D R und zieht O R parallel der Basis D K, so ist der Schnittpunkt S ein Punkt der Curve (R S = RT). Dreht sich nun der Radius C R um C und bleibt, während bei dieser Bewegung R den festen Kreis durch-

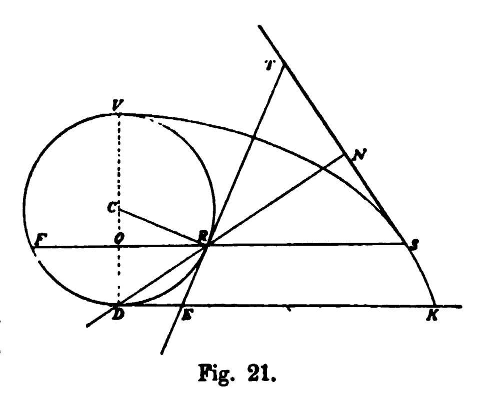


Fig. 21.

*) Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne etc. del conte Gianbattista Suardi. Brescia. 1752.

läuft, beständig $RT = \text{arc.} RV$, $\sphericalangle N = \frac{\pi}{2}$ und $ORS \parallel DK$, so beschreibt S die Cykloide. Für das auf dieser Auffassung beruhende Instrument gibt Suardi eine sehr gute Zeichnung im Grundriss und Aufriss sowie eine Totalansicht.

Den zweiten Apparat, bei weitem den brauchbarsten von allen, nennt Suardi die „penna geometrica“, und unter diesem Namen findet er sich auch bei George Adams, mathematischem Instrumentenmacher in London, der ihn in seinem Verzeichnisse verkäuflicher Instrumente führte und in seinen „Geometrischen und graphischen Versuchen“ (deutsch von Geissler), London 1795 pag. 176 beschrieb und abbildete. Der Gedanke, der diesem Apparate zugrunde liegt, ist sehr einfach; die cyklische Curve wird nämlich in derselben Weise continuirlich erzeugt, wie sie Albrecht Dürer

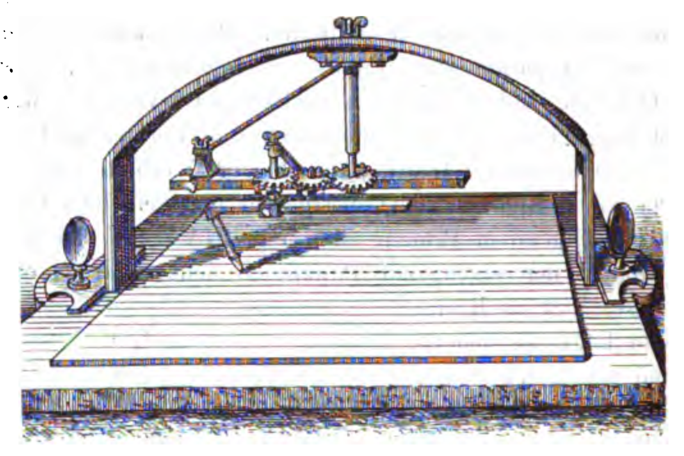


Fig. 22.

mit seinem Instrumente punktweise verzeichnete. Um ein festes Centrum dreht sich ein Arm von constanter Länge, um dessen Endpunkt ein den Stift führender zweiter Arm mit constanter, übrigens beliebig regulirbarer Geschwindigkeit rotirt. Es ist dies also genau die Entstehung der Epicykeln, wie sie sich Hipparch und Ptolemäus gedacht hatten. Die Abhängigkeit der beiden Bewegungen wird entweder durch eine Schnur oder besser (vgl. Fig. 22.) durch Zahnräder regulirt. Von diesem Apparat

gibt Suardi ebenfalls eine Zeichnung in Grundriss und Aufriss, sowie zwei Totalansichten, je nachdem die Transmission durch eine Schnur oder durch Zahnräder hergestellt ist. Unsere Abbildung gibt den letzteren Apparat in 1/3 der Grösse von Suardi's Zeichnung. Man erkennt sofort, wie durch die Wahl der Zahnräder und durch die Verkürzung oder Verlängerung der beiden Arme die verschiedensten Curven erhalten werden können. Suardi zeigt sich über die ausgezeichnete Verwendbarkeit seines Instrumentes hoch erfreut, indem er pag. 99 sagt: „Quello istromento delle ruote sta presso di me „e per lo sperimento più volte fatto nella presenza di Personaggi in questa materia, e nelle matematiche versatissimi posso asserire, che riesce a maraviglia . . .". Er zählt auch die erzeugbaren Curven und gelangt zu dem Resultate, dass 1273 verschiedene Gattungen von cyklischen Curven erhalten werden können. So gibt er an, wie man als Bahncurve des erzeugenden Punktes eine Gerade, einen Kreis, eine Ellipse erhält und zeigt, was besonders bemerkt werden muss, dass die cyklische Erzeugungsweise der Ellipse unmittelbar auf die bekannte Ellipsenerzeugung von Proklus führt, eine Bemerkung, die nach Rittershaus*) erst unserem Jahrhundert angehören würde. Ausserdem gibt Suardi noch die Zeichnungen von einer Menge sogenannter geometrischer Blumen**), die er mit seinem Instrumente erhielt, indem er nach einander 12 Räder von verschiedenen Radien einführte. Auch zum Zeichnen von Spiralen hat er seinen Apparat eingerichtet, indem er statt der Zahnräder eine Schnur einsetzt, die sich um einen Kreis- oder elliptischen Cylinder, einen Kreis- oder elliptischen Conus aufwindet, der an Stelle der Hauptaxe angebracht werden kann und den festgestellten zweiten Arm gegen das Centrum hinzieht. Hiedurch ergeben sich Spiralen der verschiedensten Gestalt***). Von Interesse ist auch die theo-

*) Rittershaus gibt in seinem Aufsatze „Über Ellipsographen", Verhandl. des Gewerbevereins für Preussen 1874 an, dass Jopling 1820, Mechanics Magazine Vol. 9. pg. 216, diesen Zusammenhang der beiden Erzeugungsweisen zuerst erkannt habe.

**) Solche Blumen hatte schon Guido Grandi 1728 gezeichnet: Flores Geometrici.

***) Einen eigenen Spiralenzirkel für Archimedische Spiralen hatte 1742 Tillieros gefertigt. Machines approuvées par l'Académie t. 7. p. 163.

retische Betrachtung der Zusammensetzung von mehr als zwei Bewegungen, die Suardi an die Besprechung seines Instrumentes anknüpft. So erzeugt er die Gerade durch drei gleiche Gelenke, von denen sich die beiden letzten in entgegengesetzter Richtung, aber mit gleicher Winkelgeschwindigkeit (velocità angolare) wie das erste bewegen; zugleich wird bemerkt, dass irgend ein Punkt des letzten Gelenkarmes bei dieser Bewegung eine Ellipse beschreibt. In ähnlicher Weise werden auch mit Abänderung der Winkelgeschwindigkeiten und unter Beibehaltung von drei oder Einschaltung von mehr Gelenken die Gerade, der Kreis und die Ellipse erhalten.

Wir wollen nun noch einen kurzen Blick auf die übrigen Instrumente werfen, die Suardi's reicher Erfindungsgabe entsprangen. Er construirte ein Instrument zur Beschreibung der Nikomed'schen Conchoide, das sich mit einer kleinen Abänderung auch zum Zeichnen der Kreisconchoide einrichten lässt, deren Erfindung er sehr galant der Contessa Maria Gaetani Agnesi zuschreibt, die sich mit Mathematik beschäftigte*). Ferner ersann er einen Apparat zum Zeichnen der Cissoide, der auf dem Princip der Newton'schen Erzeugungsweise dieser Curve beruht, dann einen solchen zur Erzeugung einer gewissen blattförmigen Curve vierter Ordnung mit zwei Spitzen, deren Gleichung er selbst aufstellte, endlich Instrumente für die Quadratrix des Dinostratus und für die Cardioide. Diese herzförmige Curve, die auch als eine Epicykloide aufgefasst werden kann, als welche sie Gabriel Cramer**) erzeugte, rührt von einem sonst unbekannten Mathematiker, Namens *Koërsma* her und wurde zuerst von dem französischen Akademiker *Carré* untersucht***). Ihren Namen erhielt sie von *Castillione* †).

---

*) Maria Gaetani Agnesi. Institutiones Analiticae Lib. I. § 4. cap. 5. probl. 4. — M. Curtze in seinen Reliquiae Coppernicanae Zeitschr. f. M. u. Phys. Bd. 19. pg. 450. macht es sehr wahrscheinlich, dass schon Nikomedes diese Curven kannte.

**) Gabriel Cramer. Introduction à l'analyse des lignes courbes. Genève 1750. pag. 431. Er bemerkte jedoch nicht, dass diese Curve die unter dem Namen Cardioide bekannte ist.

***) Caré Mémoires de l'Académie 1705. pg. 71.

†) Philosophical Transactions. 1741. pg. 778.

Mehr Interesse verdient ein Instrument zum Zeichnen der logarithmischen Linie sowie zur Erzeugung der Tractrix von Huygens. Die erstere Curve, welche seit der Erfindung der Logarithmen eine gewisse Rolle spielte, besitzt bekanntlich die Eigenschaft eine constante Subtangente zu haben. Darauf beruht die Construction von Suardi's einfachem Instrument, welches in Fig. 23 abgebildet ist. Während das prismatische Lineal A c, das in g einen festen Stift und in d c eine verstellbare Schiene c T trägt, an dem Handgriff MA gegen E gezogen wird, läuft das horizontal stehende Rädchen K längs Tc hin, indem es von dieser Schiene beständig berührt wird, wobei sich das geschlitzte Lineal OD vermöge des verticalen Rades R längs des Stiftes g verschiebt, und da hiebei Rg die Tangente der von dem Berührungspunkt des Rädchens R beschriebenen Curve und R d die Ordinate ist, so ist die constante Strecke d g die Subtangente; somit verzeichnen die spitzen Zähne, mit denen das Rad R versehen ist, die verlangte Curve. Um die Eindrücke der Zähne deutlich zu machen, ist das Rad durch eine Kugel bei K beschwert. Schiebt man dagegen den Stift g durch das Loch O der Schiene OD, entfernt den Arm cT als überflüssig und benützt das Instrument wie vorhin, so erhält man als Spur des Rädchens R die gewöhnliche Tractrix.

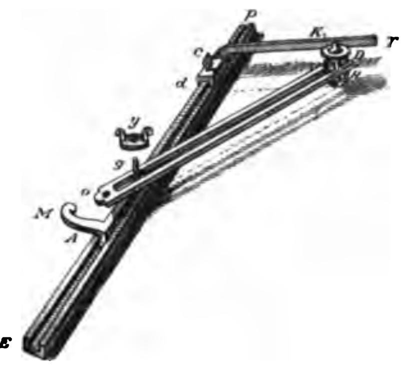


Fig. 23.

Als mit der Erfindung und dem Ausbau der Infinitesimalrechnung die Probleme des Tangentenziehens, der Quadratur und Rectification mit einem Schlage in ihrer Allgemeinheit lösbar geworden waren, und ausserdem die analytische Methode Descartes namentlich auch durch Newton*) an Ausbildung gewonnen hatte, treten uns diese beiden Zweige der Wissenschaft fast beständig

*) Arithmetica universalis. Lugd. Batav. 1732.

vereint entgegen und beherrschen von der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts an fast allein die Fortentwicklung der Mathematik. Nur eine kleine Anzahl von Gelehrten, darunter allerdings sehr bedeutende, interessirten sich noch für die rein geometrische Forschungsweise der Alten, und ihre Bemühungen, die Methoden derselben zu verallgemeinern, stützten sich dabei auf die Vorarbeiten von Desargues, Pascal und de la Hire. Auch auf das uns speciell interessirende Problem der Curvenerzeugung übten diese Bestrebungen ihren Einfluss aus, den wir noch kurz charakterisiren wollen.

Schon Newton hatte in seiner Enumeratio linearum curvarum tertii ordinis. 1706*) gelegentlich gezeigt, dass man sämtliche Kegelschnitte erhalten könne, indem man zwei unveränderliche Winkel mit gleicher Geschwindigkeit um ihre Scheitel sich drehen lässt: bewegt sich der Schnittpunkt des einen Schenkelpaares hiebei beständig auf einer Geraden, so beschreibt der Schnittpunkt des anderen Paares die verlangte Curve. Ferner hatte er auch ohne Beweis angegeben, dass wenn der erstere Schnittpunkt sich auf einem Kegelschnitt bewegt, der des zweiten Paares eine Curve dritter oder vierter Ordnung erzeugt, die in jenem Drehpunkt einen Doppelpunkt besitzt, durch den der Kegelschnitt etwa geht.

Diese Bemerkungen genügten, den schottischen Mathematiker *Colin Mac-Laurin* (1698—1746) zur Schaffung seiner „Geometria organica seu descriptio linearum curvarum universalis. Lond. 1720" zu veranlassen, worin er Newtons Gedanken zu einer vollständigen Theorie der Erzeugung höherer Curven erweiterte. Zu diesem Zwecke liess er einerseits den Schnittpunkt des einen Schenkelpaares auf verschiedenen Curven laufen und untersuchte die Erzeugnisse des zweiten Schenkelpaares, andererseits vermehrte er die Anzahl der Pole, indem er die Schnittpunkte der einzelnen Schenkelpaare auf Curven führte und die Curven bestimmte, die der Schnittpunkt des letzten Paares durchläuft. Auch setzte er an Stelle der Winkel Gerade, deren gegenseitige Bewegung ebenfalls durch Führung ihrer Schnittpunkte auf festen Curven geregelt wird. Durch seine Betrachtungen gelang ihm auch die Lösung eines

*) Newton opera omnia t. I. pg. 556—557.

von Newton als schwierig bezeichneten Problemes, nämlich eine höhere Curve zu erzeugen, die keinen Doppelpunkt besitzt. In einem Supplemente zu diesem Werke, von dem er in den Philosophical Transactions. Vol. 39. 1732 *) spricht, das aber nicht mehr erschien, zeigt er ferner, dass eine unbegrenzte Vermehrung der Pole, wie sie sein Zeitgenosse *Braikenridge* **) vorgeschlagen hatte, im Allgemeinen keine Erhöhung des Grades der erzeugten Curve verursache. So kann man, um ein bekanntes Beispiel anzuführen, die n Seiten eines Polygons um n feste Pole sich drehen und n—1 seiner Ecken auf ebensovielen Geraden fortrücken lassen, dann beschreibt der letzte Eckpunkt doch nur eine Curve zweiter Ordnung, wie gross auch n genommen wird.

Alle diese jetzt dem Gebiete der sogenannten neueren synthetischen Geometrie zugehörigen Betrachtungen haben eine rein wissenschaftliche Bedeutung, da eine Realisirung dieser Bewegungen in exacter Weise wohl nicht möglich ist.

Blicken wir nun zum Schlusse noch einmal zurück auf den ausgedehnten Weg, den wir mit flüchtigen Schritten durcheilt haben, so sehen wir zunächst, wie die alten Griechen nur allmählich und durch ihre Probleme gezwungen den Begriff einer andern als der Kreiserzeugung in der Geometrie zuliessen, wie dann die Araber sich schon mit grösserer Freiheit der mechanischen Erzeugung der Kegelschnitte und überhaupt einer gewissen „Geometrie der Bewegung" bedienten, wie im Mittelalter die Anforderungen der Praxis zur Vermehrung der Curven beitrugen, und endlich im 17. Jahrhundert Descartes und Newton die organische Beschreibung beliebiger *algebraischer* Curven in der Geometrie zuliessen. Allmählich fand dann auch die organische Beschreibung *transcendenter* Curven in der Geometrie Eingang und mechanische und geometrische Anschauungen verbanden sich. Die ersten, die diese wieder zu trennen und jede der beiden Wissenschaften in

*) Ein anderes Princip zur punktweisen Erzeugung von Curven aus gegebenen, das der harmonischen Mittel, gibt Mac-Laurin in der Schrift: De linearum geometricarum proprietatibus gener. 1748, die man gewöhnlich als Anhang seines Treatise of Algebra. Lond. 1748 findet.

**) Philosophical Transactions Nr. 436. pg. 25. A general method of describing Curves, by the intersection of right lines.

ihre natürlichen Grenzen zu bannen suchten, waren *D'Alembert**) und *Euler*, welche scharf hervorhoben, dass die Geometrie nur den von einem bewegten Punkte durchlaufenen Weg in's Auge zu fassen habe, während die Mechanik die Zeit und die Kräfte in Rechnung zieht, in welcher und durch welche diese Bewegung vor sich geht. Damit waren der geometrischen Untersuchung alle Bewegungen als solche ohne Rücksicht auf die sie erzeugenden Kräfte zugewiesen, und es war das Gebiet umgrenzt, das man später mit dem Namen Phoronomie belegte und das in unserem Jahrhundert zu einer eigenen Wissenschaft sich ausbildete.

---

*) Traité de dynamique. Paris 1758. Discours préliminaire pag. VII. — Euler: Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. 1775. pag. 199, und deutsche Ausgabe der Theoria motus corporum rigidorum p. 557. —

Über die Methoden der theoretischen Physik.

Von L. Boltzmann in München.

Von der Redaction des Katalogs aufgefordert, dieses Thema zu behandeln, sah ich alsbald, dass nur wenig Neues zu sagen bleibt; so vieles und gediegenes wurde gerade in neuerer Zeit hierüber geschrieben. Ist ja doch für unsere Zeit eine fast übertriebene Kritik der Methoden der naturwissenschaftlichen Forschung charakteristisch; eine potenzirte Kritik der reinen Vernunft möchte man sagen, wenn dieses Wort nicht vielleicht all zu unbescheiden wäre. Es kann auch nicht meine Absicht sein, diese Kritik nochmals zu kritisiren; nur einige orientirende Worte will ich für jene bringen, welche diesen Fragen ferner stehen, aber doch Interesse dafür hegen.

In der Mathematik und Geometrie war es zunächst unzweifelhaft das Bedürfnis nach Arbeitersparnis, welches von den rein analytischen wieder zu den constructiven Methoden sowie zur Veranschaulichung durch Modelle führte. Scheint dieses Bedürfnis auch ein rein praktisches, selbstverständliches, so befinden wir uns doch gerade hier schon auf einem Boden, wo eine ganze Gattung modern methodologischer Speculationen emporwuchs, die in der präcisesten, geistreichsten Weise von *Mach* zum Ausdrucke gebracht wurden. Dieser behauptet geradezu, der Zweck der Wissenschaft sei nur Arbeitersparnis.

Fast mit gleichem Rechte könnte man, bemerkend, dass bei Geschäften die grösste Ersparnis wünschenswert ist, diese einfach für den Zweck der Verkaufsbuden und des Geldes erklären, was ja in gewissem Sinne in der That richtig wäre. Doch wird man nur ungern, wenn die Distanzen und Bewegungen, die Grösse, physikalische und chemische Beschaffenheit der Fixsterne ergründet,

wenn Mikroskope erfunden und damit die Urheber unserer Krankheiten entdeckt werden, dies als blosse Sparsamkeit bezeichnen.

Allein es ist am Ende Sache der Definition, was man als Aufgabe, was als Mittel zu deren Erreichung bezeichnet. Hängt es ja sogar von der Definition der Existenz ab, was existirt, ob die Körper, ob deren lebendige Kraft, oder überhaupt deren Eigenschaften, so dass wir vielleicht noch einmal unsere eigene Existenz einfach hinweg definiren können.

Doch genug hievon; das Bedürfnis nach der äussersten Ausnützung der Mittel unserer Auffassungskraft existirt, und da wir mit dem Auge die grösste Fülle von Thatsachen auf einmal erfassen (wir sagen charakteristisch genug übersehen) können, so folgt hieraus das Bedürfnis, die Resultate des Calcüls anschaulich zu machen und zwar nicht blos für die Phantasie, sondern auch sichtbar für das Auge, greifbar für die Hand, mit Gips und Pappe.

Wie wenig geschah in dieser Beziehung noch in meinen Studienjahren! Mathematische Instrumente waren fast unbekannt, und die physikalischen Experimente wurden häufig so angestellt, dass niemand davon etwas sah, als der Vortragende selbst. Da ich obendrein wegen Kurzsichtigkeit auch die Schrift und Zeichnung auf der Schultafel nicht sah, so wurde meine Einbildungskraft stets in Atem gehalten, fast hätte ich gesagt zu meinem Glücke. Doch letztere Behauptung liefe ja dem Zweck dieser Katalogstudie zuwider, der nur die Anpreisung des unendlichen Rüstzeuges von Modellen in der heutigen Mathematik sein kann, und sie wäre auch vollständig unrichtig. Denn hatte auch meine Vorstellungsgabe gewonnen, so war es doch nur auf Kosten des Umfangs der erworbenen Kenntnisse geschehen. Damals war die Theorie der Flächen zweiten Grades noch der Gipfelpunkt geometrischen Wissens und zu ihrer Versinnlichung genügte ein Ei, ein Serviettenreif, ein Sattel. Welche Fülle von Gestalten, Singularitäten, sich aus einander entwickelnder Formen hat der Geometer von heute sich einzuprägen, und wie sehr wird er dabei durch Gipsformen, Modelle mit fixen und beweglichen Schnüren, Schienen und Gelenken aller Art unterstützt.

Daneben gewinnen aber auch die Maschinen immer mehr an Boden, welche nicht zur Versinnlichung dienen, sondern an

Stelle des Menschen die Mühe der Ausführung wirklicher Rechnungsoperationen übernehmen, von den vier Species bis zu den complicirtesten Integrationen.

Dass beide Gattungen von Apparaten auch von den an die stete Handhabung von Instrumenten ohnedies gewöhnten Physikern in der ausgedehntesten Weise verwendet werden, ist selbstredend. Alle möglichen mechanischen Modelle, optische Wellenflächen, thermodynamische Flächen aus Gips, Wellenmaschinen aller Art, Apparate zur Versinnlichung der Gesetze der Lichtbrechung und anderer Naturgesetze sind Beispiele von Modellen erster Art. In der Construction von Apparaten zweiter Art ging man soweit, dass Versuche gemacht wurden, die Werte der Integrale von Differential-Gleichungen, welche in gleicher Weise für ein schwer zu beobachtendes Phänomen, wie die Gasreibung, und ein leicht messbares, wie die Verteilung des elektrischen Stromes in einem leitenden Körper von entsprechend gewählter Gestalt, durch Beobachtung des letzteren Phänomens einfach abzulesen und dann zur Berechnung der Reibungsconstante aus dem ersteren Phänomen zu verwerten. Man erinnere sich auch der graphischen Auswertung der in der Theorie der Gezeiten, in der Elektrodynamik etc. vorkommenden Reihen und Integralen durch Lord *Kelvin*, welcher in seinen „lectures of molecular dynamics" sogar die Idee der Gründung eines mathematischen Instituts für solche Rechnungen ausspricht.

In der theoretischen Physik kommen jedoch noch Modelle zur Verwendung, welche ich einer dritten besondern Gattung zuzählen möchte, da sie ihren Ursprung einer besonderen Methode verdanken, die gerade in jenem Wissenszweige immer mehr zur Anwendung kommt. Ich glaube, dass dies mehr dem praktisch physikalischen Bedürfnisse als erkenntnis-theoretischen Speculationen zu verdanken ist. Trotzdem aber hat diese Methode vielfach ein eminent philosophisches Gepräge, und wir müssen daher neuerdings den Boden der Erkenntnistheorie betreten.

Auf der von *Galilei* und *Newton* geschaffenen Grundlage hatten namentlich die grossen Pariser Mathematiker um die Zeit der französischen Revolution und später eine scharf definirte Methode der theoretischen Physik geschaffen. Es wurden mechanische

Voraussetzungen gemacht, woraus mittels der zu einer Art von geometrischer Evidenz gelangten Principien der Mechanik eine Gruppe von Naturerscheinungen erklärt wurde. Man war sich zwar bewusst, dass die Voraussetzungen nicht mit apodiktischer Gewissheit als richtig bezeichnet werden konnten, aber man hielt es doch bis zu einem gewissen Grade für wahrscheinlich, dass sie der Wirklichkeit genau entsprächen und nannte sie deshalb Hypothesen. So dachte man sich die Materie, den zur Erklärung der Lichterscheinungen notwendigen Lichtäther und die beiden elektrischen Fluida als Summen mathematischer Punkte. Zwischen je zwei solchen Punkten dachte man sich eine Kraft wirksam, deren Richtung in ihre Verbindungslinie fällt und deren Intensität eine noch zu bestimmende Function ihrer Entfernung sein sollte (*Boscovic*). Ein Geist, dem alle Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten aller dieser materiellen Teilchen, sowie alle Kräfte bekannt wären und der auch alle daraus resultirenden Differentialgleichungen zu integriren verstünde, könnte den ganzen Weltlauf voraus berechnen, wie der Astronom eine Sonnenfinsternis (*Laplace*). Man stand nicht an, diese Kräfte, welche man sich als das ursprünglich Gegebene, nicht weiter Erklärbare dachte, als die Ursachen der Erscheinungen, die Berechnung derselben aus den Differentialgleichungen als ihre Erklärung zu bezeichnen.

Dazu kam später die Hypothese, dass diese Teilchen auch in ruhenden Körpern in Bewegungen begriffen seien, welche zu den Wärmeerscheinungen Veranlassung geben und deren Natur besonders in den Gasen sehr genau definirt wurde (*Clausius*). Ihre Theorie führte zu überraschenden Vorausberechnungen, so der Unabhängigkeit der Reibungsconstante vom Drucke, gewisser Beziehungen zwischen Reibung, Diffusion und Wärmeleitung etc. (*Maxwell*).

Die Gesamtheit dieser Methoden war so erfolgreich, dass es geradezu als Aufgabe der Naturwissenschaft bezeichnet wurde, die Naturerscheinungen zu erklären und die früher so genannten beschreibenden Naturwissenschaften triumphirten, als ihnen die Hypothese *Darwins* erlaubte, die Lebensformen und Erscheinungen nicht blos zu beschreiben, sondern ebenfalls zu erklären. Sonder-

barerweise machte fast gleichzeitig die Physik die entgegengesetzte Schwenkung.

Namentlich *Kirchhoff* schien es zweifelhaft, ob die bevorzugte Stellung, welche man den Kräften dadurch zuwies, dass man sie als Ursachen der Erscheinungen bezeichnete, eine berechtigte sei.

Ob man mit *Kepler* die Gestalt der Bahn eines Planeten und die Geschwindigkeit in jedem Punkte oder mit *Newton* die Kraft an jeder Stelle angebe, beides seien eigentlich nur verschiedene Methoden, die Thatsachen zu beschreiben und das Verdienst *Newtons* sei nur die Entdeckung, dass die Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper besonders einfach wird, wenn man die zweiten Differentialquotienten ihrer Coordinaten nach der Zeit angibt (Beschleunigung, Kraft). Mit einer halben Seite waren die Kräfte aus der Natur hinwegdefinirt und die Physik zur eigentlich beschreibenden Naturwissenschaft gemacht. Das Gebäude der Mechanik war zu fest, als dass diese Veränderung der Aussenseite sein Inneres hätte wesentlich beeinflussen können. Auch die auf die Vorstellung von Molekülen verzichtenden Elasticitätstheorien waren schon älter (*Stokes, Lamé, Clebsch*). Doch auf die Entwickelung anderer Zweige der Physik (Elektrodynamik, Theorie der Pyro- und Piëzoelektricität etc.) gewann die Ansicht grossen Einfluss, dass es nicht Aufgabe der Theorie sein könne, den Mechanismus der Natur zu durchschauen, sondern bloss von möglichst einfachen Voraussetzungen ausgehend (dass gewisse Grössen lineare oder sonst einfache Functionen seien etc.), möglichst einfache Gleichungen aufzustellen, die die Naturerscheinungen mit möglichster Annäherung zu berechnen erlauben; wie sich *Hertz* charakteristisch ausdrückt, nur die direct beobachteten Erscheinungen nackt durch Gleichungen darzustellen, ohne die bunten, von unserer Phantasie ihnen umgehängten Mäntelchen der Hypothesen.

Indessen waren mehrere Forscher schon früher dem alten Systeme von Kraftcentren und Fernkräften von einer andern Seite noch empfindlicher zu Leibe gegangen; man könnte sagen von der entgegengesetzten, weil sie das bunte Mäntelchen der mechanischen Veranschaulichung besonders liebten; man könnte

sagen von benachbarter, da sie ebenfalls auf die Erkenntnis eines den Erscheinungen zu Grunde liegenden Mechanismus verzichteten und in den von ihnen ersonnenen Mechanismen nicht diejenigen der Natur erblickten, sondern blosse Bilder oder Analogien.*) Mehrere Männer, an der Spitze *Faraday*, hatten sich eine ganz verschiedene Naturanschauung gebildet. Während das alte System blos die Kraftcentra für das Reale, die Kräfte für mathematische Begriffe gehalten hatte, sah *Faraday* deutlich das Weben und Wirken der letzteren von Punkt zu Punkt im Zwischenraume; das Potential, früher eine nur die Rechnung erleichternde Formel, war ihm das im Raume real existirende Band, die Ursache der Kraftwirkung. *Faraday's* Ideen waren viel unklarer, als die früheren mathematisch genau präcisirten Hypothesen und mancher Mathematiker aus der alten Schule schätzte *Faraday's* Theorien gering, ohne jedoch durch die Klarheit seiner Anschauungen zu gleich grossen Entdeckungen zu gelangen.

Bald wurde namentlich in England allenthalben nach möglichst anschaulicher und greifbarer Darstellung der Begriffe und Vorstellungen getrachtet, die früher nur in der Analyse eine Rolle gespielt hatten. Diesem Streben nach Anschaulichkeit entsprang die graphische Darstellung der Grundbegriffe der Mechanik in *Maxwell's* „matter and motion", die geometrische Darstellung der Superposition zweier Sinusbewegungen, alle durch die Quaterionentheorie bedingten Veranschaulichungen, so die geometrische Deutung des Symbols

$$\triangle = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \text{ **)}.$$

*) Man vergleiche die fast ätherisch fein ausgearbeitete, krystallklare aber farblose Elasticitätstheorie in *Kirchhoff's* Vorlesungen mit der von *Thomson* im 3. Bande der math. and phys. papers gegebenen derb realistischen Theorie nicht des idealen elastischen Körpers, sondern des Stahls, Kautschuks, Leims, oder mit der oft kindlich naiven Sprache *Maxwell's*, der mitten in den Formeln eine wirklich gute Methode, Fettflecken auszuputzen, zum Besten gibt.

**) Maxwell, treat. on el. and magn. 1873, vol. I art. 29: nature of the operator ∇ and ∇^2; dieselbe wurde später auch von anderen bemerkt: Mach, Über Hrn. Guebhards Darstellg. der Äquipotentialcurven, Wien, Sitzungsber., Bd. 86, pg. 8, 1882. Vgl. auch Wied. Beibl., Bd. 7, pg. 10, c. r. der Pariser Acad., Bd. 95, pg. 479.

Dazu kam ein zweiter Umstand. Die überraschendsten und weitgehendsten Analogien zeigten sich zwischen scheinbar ganz disparaten Naturvorgängen. Die Natur schien gewissermassen die verschiedensten Dinge genau nach demselben Plane gebaut zu haben oder, wie der Analytiker trocken sagt, dieselben Differentialgleichungen gelten für die verschiedensten Phänomene.

So geschieht die Wärmeleitung, die Diffusion und die Verbreitung der Elektricität in Leitern nach denselben Gesetzen. Dieselben Gleichungen können als Auflösung eines Problems der Hydrodynamik und der Potentialtheorie betrachtet werden. Die Theorie der Flüssigkeitswirbel, sowie die der Gasreibung zeigt die überraschendste Analogie mit der des Elektromagnetismus etc. Vergl. hierüber auch *Maxwell* „scient. pap.", vol. 1, pag. 156.

Solche Einflüsse drängten auch *Maxwell*, als er an die mathematische Ausarbeitung der *Faraday*'schen Vorstellungen ging, von vorne herein in eine ganz neue Bahn. Schon *Thomson* *) hatte eine Reihe von Analogien zwischen Problemen der Elasticitätstheorie und solchen des Elektromagnetismus hervorgehoben. *Maxwell* erklärte schon in seiner ersten Abhandlung über Elektricitätslehre **), dass er keine Theorie der Elektricität zu geben beabsichtige, d. h. dass er selbst nicht an die Realität der incompressibeln Flüssigkeit und der Widerstandskräfte glaube, die er dort annimmt, sondern dass er bloss ein mechanisches Beispiel zu geben beabsichtigt, welches grosse Analogie mit den elektrischen Erscheinungen zeigt und die letzteren auf eine Form bringen will, in der sie der Verstand möglichst leicht erfassen kann. ***) In seiner zweiten Schrift †) geht er noch viel weiter und construirt aus Flüssigkeitswirbeln und Frictionsrollen, die sich innerhalb Zellen mit elastischen Wänden bewegen, einen bewunderungswürdigen Mechanismus, welcher als mechanisches Modell für den Elektromagnetismus dient. Dieser Mechanismus wurde

---

*) Cambridge a. Dublin math. journal, 1847; math. and phys. pap., vol. I.

**) Maxwell, On Faradays lines of force. Cambr. phil. trans., vol. X. Scient. pap., vol. I, pg. 157.

***) Maxwell, Scient. pap., vol. I, pg. 157.

†) Maxwell, On physical lines of force. Scient. pap., vol. I, pg. 451. Phil. mag. (4), vol. 21, pg. 161, 281, 338, 1861, vol. 23, pg. 12, 85, 1862.

natürlich von Jenen verspottet, welche ihn wie *Zöllner* für eine Hypothese im alten Sinne des Wortes hielten und meinten, *Maxwell* schreibe ihm Realität zu, was dieser selbst doch so entschieden ablehnt und nur bescheiden hofft, „dass durch derartige mechanische Fictionen weitere Forschungen auf dem Gebiete der Elektricitätslehre mehr gefördert als gehindert sein würden". Und sie waren gefördert; denn *Maxwell* gelangte durch sein Modell zu jenen Gleichungen, deren eigentümliche, fast unbegreifliche Zaubermacht der hiezu Berufenste, nämlich *Heinr. Hertz*, in seinem Vortrage über die Beziehungen zwischen Licht und Elektricität*) pag. 11 so drastisch schildert. Ich möchte den Worten *Hertz'* nur beifügen, dass *Maxwell's* Formeln lediglich Consequenzen seiner mechanischen Modelle waren und *Hertz'* begeistertes Lob in erster Linie nicht der Analyse *Maxwell's*, sondern dessen Scharfsinn in der Auffindung mechanischer Analogien gebührt.

Erst in *Maxwell's* dritter wichtiger Schrift**) und in seinem Lehrbuche***) schälen sich die Formeln mehr von dem Modelle los, welcher Process dann durch *Heavyside, Poynting, Rowland, Hertz, Cohn* vollendet wurde. *Maxwell* benutzt noch immer die mechanische Analogie oder, wie er sagt, die dynamische Illustration. Aber er specialisirt sie nicht mehr ins Detail, sondern er sucht vielmehr die allgemeinsten, mechanischen Voraussetzungen auf, welche auf Erscheinungen zu führen geeignet sind, die dem Elektromagnetismus analog sind. *Thomson* wurde durch Erweiterung seiner schon citirten Ideen auf den quasielastischen und den quasilabilen Äther, sowie auf dessen Veranschaulichung durch das gyrostatisch-adynamische Modell geführt.

Natürlich übertrug *Maxwell* die gleiche Behandlungsweise auch auf andere Zweige der theoretischen Physik. Als mechanische Analogien sind zum Beispiele auch *Maxwell's* Gasmoleküle aufzufassen, die sich mit einer der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstossen, und es fehlte

---

*) Bonn, bei Emil Strauss, 1890.

**) Maxwell, A dynamical theory of the el. magn. field. Scient. pap. I, pg. 526. Roy. soc. trans. vol. 155, pg. 459, 1865.

***) Treat on el. and magn. Oxford, Clar. press 1881.

in der ersten Zeit wieder nicht an Forschern, welche, *Maxwell's* Tendenz missverstehend, seine Hypothese für unwahrscheinlich und absurd erklärten.

Allmählich jedoch fanden die neuen Ideen in allen Gebieten Eingang. Aus dem Gebiete der Wärmetheorie erwähne ich hier nur *Helmholtz'* berühmte Abhandlungen über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. Ja, es zeigte sich, dass sie dem Geiste der Wissenschaft besser entsprachen, als die alten Hypothesen und auch für den Forscher selbst bequemer waren. Denn die alten Hypothesen konnten nur aufrecht erhalten werden, so lange alles klappte; jetzt aber schadeten einzelne Nichtübereinstimmungen nicht mehr, denn einer blossen Analogie kann man es nicht übel nehmen, wenn sie in einzelnen Punkten hinkt. Daher wurden bald auch die alten Theorien, so die elastische Theorie des Lichtes, die Gastheorie, die Schemata der Chemiker für die Benzolringe etc., nur mehr als mechanische Analogien aufgefasst und endlich generalisirte die Philosophie *Maxwell's* Ideen bis zur Lehre, dass die Erkenntnis überhaupt nichts anderes sei, als die Auffindung von Analogien. Damit war die alte wissenschaftliche Methode wieder hinwegdefinirt und die Wissenschaft sprach nur mehr in Gleichnissen.

Alle diese mechanischen Modelle bestanden vorerst freilich nur im Gedanken, es waren dynamische Illustrationen in der Phantasie und sie konnten auch in dieser Allgemeinheit nicht praktisch ausgeführt werden. Doch reizte ihre grosse Bedeutung dazu an, wenigstens ihre Grundtypen auch praktisch zu verwirklichen.

Über einen von *Maxwell* selbst und einen vom Schreiber dieser Zeilen unternommenen derartigen Versuch ist im zweiten Teile dieses Katalogs berichtet. Auch das Modell *Fitzgerald's* befindet sich gegenwärtig auf der Nürnberger Ausstellung, sowie das Modell *Bjerknes'*, welche ähnlichen Tendenzen ihren Ursprung verdanken. Weitere hieher zu zählende Modelle wurden von *Oliver Lodge*, Lord *Rayleigh* und andern construirt.

Sie alle zeigen, wie die neue Richtung den Verzicht auf vollständige Congruenz mit der Natur durch um so schlagenderes

Hervortreten der Ähnlichkeitspunkte wettmacht. Ihr gehört ohne Zweifel die nächste Zukunft; doch ebenso verfehlt, als es früher war, die alte Methode für die allein richtige zu halten, ebenso einseitig wäre es, sie, die so viel geleistet, jetzt für vollständig abgethan zu halten und nicht neben der neuen zu cultiviren.

München, August 1892.

Über mechanische Integrationen.

Von Dr. Alfred Amsler in Schaffhausen.

Alle mechanischen Integrationen von Functionen, welche sich auf Flächenelemente beziehen, lassen sich mit denselben Hilfsmitteln ausführen, mit denen man den Flächeninhalt einer geschlossenen Curve ermitteln kann.

Im folgenden sollen die Principien einiger der interessantesten mechanischen Integrationen, welche in der Wissenschaft und in der Technik Verwendung finden können, auseinandergesetzt werden.

Von mechanischen Hilfsmitteln, welche bei den verschiedenen Instrumenten die Integration besorgen, sind mir drei bekannt, nämlich

1) Eine *Rolle,* deren *rundlicher* oder *flacher* Rand mit sanftem Druck gegen eine Fläche anliegt. Der Rollenrand muss glatt sein oder darf doch wenigstens keine schiefen Kerben haben. Findet eine relative Bewegung zwischen Fläche und Rolle statt, so wird die Rolle durch Reibung von der Fläche in Umdrehung versetzt. Wird die Rolle so auf der Fläche bewegt, dass der Berührungspunkt einen Weg von der Länge s senkrecht zur Rollenaxe beschreibt, so *rollt* die Rolle auf der Fläche. Ist r der Radius der Rolle und ϑ der Winkel, um welchen sich die Rolle gedreht hat, so ist $r\vartheta = s$

Ich nenne die Grösse $r\vartheta$ die Abwicklung der Rolle und bezeichne sie mit u. In diesem Falle ist also $u = s$. Verschiebt man die Rolle in der Richtung ihrer Axe, so findet kein Rollen statt, sondern blosses Gleiten, ohne dass sich die Rolle dreht, dann ist $u = o$.

Bewegt man die Rolle so, dass ihr Berührungspunkt eine geradlinige Bahn beschreibt, welche mit der Rollenaxe den Winkel α bildet, so findet gleichzeitig Rollen und Gleiten statt und es wird

$$u = s \sin \alpha.$$

Ändert man die Richtung der Rollenaxe, ohne die Lage des Berührungspunktes der Rolle zu ändern, so findet weder Gleiten noch Rollen statt und die Rolle dreht sich nicht um ihre Axe.

Es sind dies alle Bewegungsarten, welche eine solche Rolle ausführen kann.

Beschreibt der Berührungspunkt auf der Fläche eine beliebige unendlich kleine Bahn ds, während die Rollenaxe gleichzeitig ihre Richtung ändert, so hat man daher $du = \sin \alpha \, ds$, und beschreibt der Berührungspunkt eine Bahn von endlicher Länge, so wird die Rollenabwicklung $u = \int \sin \alpha \, ds$.

Bei dieser Ableitung wurde nichts vorausgesetzt über die Beschaffenheit der Fläche, auf welcher die Rolle sich bewegt. Es ist auch weiter keine Voraussetzung nötig, als dass die Fläche keine Kanten und Ecken habe, und dass die Rollenaxe stets senkrecht sein soll zur Normalen, welche man im Berührungspunkt der Rolle auf die Fläche errichten kann.

Je nach dem Zweck, den man bei Anwendung dieses Integrationsprincips verfolgt, hat man durch passende kinematische Verbindungen dafür zu sorgen, dass sich der Winkel α in der richtigen Weise ändert. Bei wirklich ausgeführten Instrumenten kommt als Fläche, auf welcher die Rolle läuft, nur vor der Kreiskegel, die Ebene oder die Kugel.

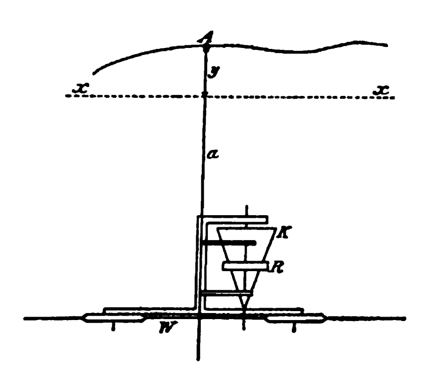
Mit diesen Hilfsmitteln kann man eine grosse Menge verschiedener Integrale auswerten; die Genauigkeit der Resultate genügt bei sachverständiger Ausführung der Instrumente den weitestgehenden Ansprüchen. Eine auf einer Fläche teils rollende, teils gleitende Rolle dürfte wohl das *einfachste* mechanische Integrationsmittel sein.

Das älteste Planimeter, von Gonnella im Jahre 1824 erfunden, enthält als Integrationsmechanismus eine Rolle, welche auf einem Kegel läuft. Das Instrument ist schematisch in nachstehender Figur dargestellt, und mag als Typus aller sogenannten Linear-

planimeter, oder besser Orthogonalplanimeter (im Gegensatz zu Polarplanimeter) gelten.

Dessen Einrichtung besteht im Wesentlichen in Folgendem:

Die Räder eines Wagens W laufen in der geraden Nuth eines auf der Zeichnungsebene ruhenden Lineals. Am Wagen



ist ein Arm angebracht, der einen drehbaren Kegel trägt, dessen Axe in einer zur Nuth senkrechten Ebene liegt und gegen die Zeichnungsebene so geneigt ist, dass die oberste Erzeugende des Kegels parallel zur Zeichnungsebene ist. Mit dem untersten Punkt des Endkreises ruht der Kegel auf der Zeichnungsebene. In einer Führung am Wagen lässt sich, senkrecht gegen die Nuth des Lineals und parallel zur Zeichnungsebene, eine Stange a verschieben, welche an einem Ende einen Fahrstift A und in der Mitte eine auf dem Kegel aufliegende Rolle trägt, deren Axe parallel zu a ist. Führt man den Fahrstift auf der Curve $y = f(x)$ von A_1 bis A_2, so verschiebt sich der Wagen um die Strecke x; der Kegel dreht sich in Folge der Reibung auf der Zeichnungsfläche proportional zur Grösse der Verschiebung des Wagens. Dreht sich der Kegel um einen bestimmten Winkel, so dreht sich auch die darauf ruhende Rolle und zwar ist die Drehung der letztern proportional zur Entfernung des Berührungspunktes der Rolle mit dem Kegel von der Kegelspitze. Diese Entfernung ist aber gleich y, und die Drehung des Kegels ist proportional zum Zuwachs von x, folglich ist die Drehung der Rolle proportional zu $\int y\,dx$.

Wird an Stelle des Kegels eine horizontale Scheibe gebracht, welche sich unter Anwendung passender Hilfsmittel proportional zur Verschiebung des Wagens W dreht, so ist die Drehung der Rolle, welche auf dem Durchmesser der Scheibe senkrecht zum Wagen verschiebbar ist, proportional zur Entfernung des Berührungspunktes der Rolle mit der Scheibe vom Centrum der Scheibe, und die Rollendrehung wird wieder proportional zu $\int y\,dx$, wenn der Punkt A eine Curve durchläuft.

Diese Construction wurde im Jahre 1825 ebenfalls von Gonnella ausgeführt.

Das aus dem Jahre 1827 datirende Oppikofer'sche Planimeter ist identisch mit dem Kegelplanimeter Gonnella's. Das unter dem Namen Wetli'sches Planimeter bekannte Instrument ist ähnlich der zweiten Planimeterconstruction Gonnella's. Die Frage, wem die Priorität der Erfindung des ersten mechanischen Planimeters zukommt, findet sich ausführlich erörtert in *Antonio Favaro*, Beiträge zur Geschichte der Planimeter, Separat-Abdruck aus der „Allgemeinen Bauzeitung" Wien 1873. Ebendaselbst findet man auch eine reichhaltige Zusammenstellung der Originalliteratur über die verschiedenen Planimeterconstructionen bis 1873.

Die Polarplanimeter, welche heutzutage im allgemeinen Gebrauch sind und deren Theorie als Ausgangspunkt für anderweitige Integrationen folgen wird, haben als Integrationsmechanismus die Combination von Rolle und Ebene, die complicirteren auch wohl von Rolle oder Cylinder und Kugel.

Vergl. *J. Amsler*, Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter, Schaffhausen 1856; Separat-Abdruck aus der „Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich"; sowie die französische Zeitschrift „Cosmos" des Abbé Moigno, 29. Februar 1856.

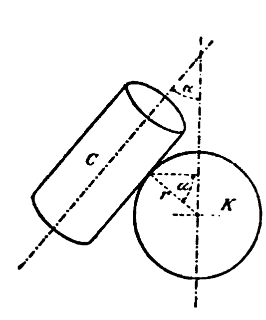
2) Ein zweiter Integrationsmechanismus, welcher dem zuerst beschriebenen nahe verwandt ist, ist eine Combination von irgend *zwei Flächen*, welche sich aufeinander *wälzen*.

Bei wirklich ausgeführten Instrumenten kommen nur folgende Flächen vor: Kugel, Kreiscylinder, Ebene, Kreiskegel. Der

Zweck, welcher durch Anwendung dieser complicirten Mittel verfolgt wird, ist die Vermeidung gleitender Reibung, wie sie bei dem zuerst beschriebenen Integrationsmittel vorkommt.

Wendet man Kugel und Cylinder an, so bleibt die Betrachtung genau dieselbe wie bei Anwendung einer Kugel, auf welcher eine Rolle läuft; nur hat man dort an Stelle von Rolle den Ausdruck Cylinder zu setzen und zu beachten, dass, wenn sich der Berührungspunkt von Cylinder und Kugel in der Richtung der Cylinderaxe verändert, der Cylinder in seine neuen Lagen durch Walzen anstatt durch Gleiten kommt.

Weniger allgemein aufgefasst und für alle ebenen Integrationen noch hinreichend, kann man den Mechanismus auch folgendermassen definiren. Die Rotationsaxen der Kugel K und des Cylinders C sollen in einer und derselben Ebene liegen und den veränderlichen Winkel α mit einander bilden. Dreht sich die Kugel um einen unendlich kleinen Winkel φ um ihre Rotationsaxe und bezeichnet r den Radius der Kugel, so ist die Abwicklung du des Cylinders C



$$du = r\ \varphi\ \cos\alpha.$$

Ändert man den Winkel α, so wälzt sich der Cylinder auf der Kugel, ohne sich zu drehen. Ändert man den Winkel α, während man die Kugel dreht, so wird nach einer relativen Bewegung des Systems von endlicher Grösse die Cylinderabwicklung $u = r \int \cos\alpha\ \varphi$.

Durch passende kinematische Verbindungen hat man dann wieder für die zweckdienliche Herstellung des Winkels zu sorgen. Ein Planimeter mit diesem Integrationsmechanismus ist beschrieben in der Abhandlung „Neuere Planimeter-Constructionen" von J. Amsler-Laffon, Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 1884. Es ist dies meines Wissens die einzige Planimeterconstruction, bei welcher gar kein Gleiten vorkommt.*) Die Bedingung des

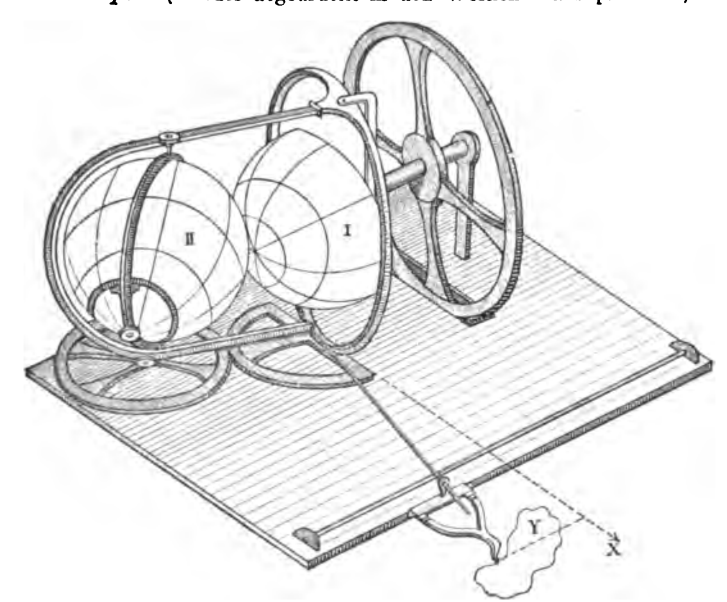
*) Es sei gestattet hier die folgende historische Bemerkung einzufügen: Bereits zu Anfang des Jahres 1855, kurz nachdem die ersten (Sang's) Planimeter nach England kamen, hat *Clerk Maxwell* ein *Planimeter ohne*

blossen Wälzens ohne Gleiten ist bei den sogenannten Kugelplanimetern von Coradi nur *annähernd* erfüllt.

Da Planimeter dieser Kategorie seit einiger Zeit auch in praktischen Gebrauch gekommen sind, will ich hier das oben citirte Instrument meines Vaters als Typus dieser Gattung Instrumente kurz beschreiben.

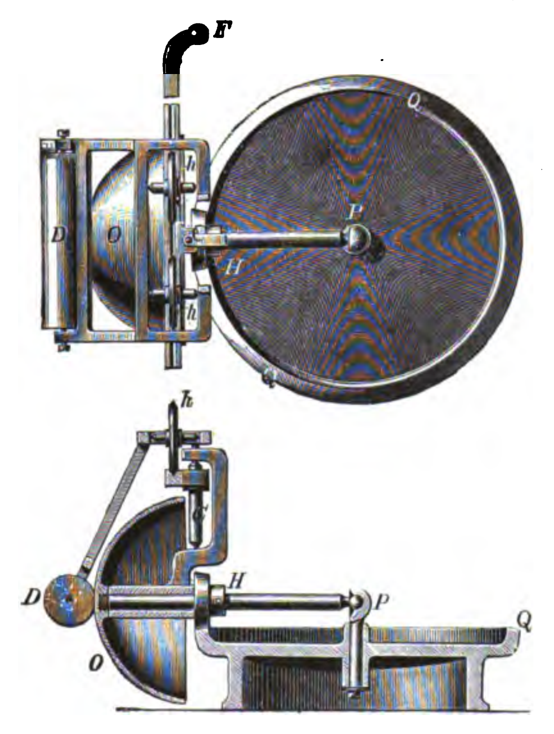
---

gleitende Reibung construirt, bei welchem sich zwei Kugeln von gleichem Radius aufeinander abwälzen. Die betr. Publication Maxwell's, datirt vom 22. Januar 1855, findet sich in den Transactions of the Royal Scottish Society of Arts vol. IV, part. IV, und ist betitelt: „*Description of a new form of the Platometer, an Instrument for measuring the Areas of plane figures drawn on Paper*“ (Wieder abgedruckt in den Werken Bd. I p. 230 ff.).



Die Charakteristik des Instrumentes (das unseres Wissens nie ausgeführt worden ist) ist kurz die folgende: Eine Kugel I mit horizontaler Axe dreht sich proportional der Bewegung eines Wagens in der Richtung der x-Axe (vergl. nebenstehende, der genannten Abhandlung entnommene Figur). Eine zweite Kugel II, um eine verticale und eine horizontale Axe wird dagegen gepresst. Die Umdrehung dieser zweiten Kugel um ihre horizontale Axe ist proportional der Drehung der ersten Kugel und der Entfernung der Berührpunkte beider Kugeln von der Drehaxe der ersten Kugel. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Kugeln wird stets senkrecht geführt zu einem

Die Axe H trägt eine Kugelcalotte O und ein konisches Zahnrädchen, welches auf dem horizontalen gezahnten Kreis Q läuft. Der Fahrstift F ist an einem Arm befestigt, der um die



verticale Axe C drehbar ist. Letztere geht durch das Centrum der Kugel O. Auf der obern Seite des Fahrarms ist parallel zur Richtung C F eine Nuth angebracht, in welcher die beiden

---

Stabe, welcher den Mittelpunkt der ersten Kugel mit einem in der Richtung der y-Axe gleitenden Schlitten verbindet, welcher den Fahrstift trägt. Man beweist leicht, dass das y der Curve dann stets proportional ist der Entfernung des Berührungspunktes beider Kugeln von der Drehaxe der ersteren. Die Umdrehung der zweiten Kugel um ihre horizontale Axe ist dann proportional dem umfahrenen Flächenstück.

Maxwell hat auch (in eben dieser Abhandlung) ein *Polarplanimeter* angegeben, bei welchem die Bewegung des in einer Hülse verschiebbaren Fahrarms durch einen auf einer Hyperbel gleitenden Hebel auf den Integrator übertragen wird. Dieser letztere ist von der oben beschriebenen Art.

Die Redaction.

Räder h eines Wagens laufen. Der Wagen trägt den Cylinder D, welcher die Kugel auf dem horizontalen grössten Kreis mit leichtem Druck berührt. Bewegt man den Fahrstift F auf einem Kreisbogen, dessen Centrum P ist, so dreht sich die Kugelcalotte um einen Betrag, der proportional ist zu der Länge des von C durchlaufenen Weges, welchen ich wieder mit s bezeichne. Ist F C senkrecht zu P C, so rotirt der Cylinder D nicht. Bildet F C den Winkel α mit jener ursprünglichen Lage, so berührt der Cylinder die Kugel in einem Punkt, dessen Abstand von der Rotationsaxe der Kugel gleich ist $r \sin \alpha$, wenn r den Radius der Kugel bedeutet. Dreht man nun das Instrument in dieser Lage um den Punkt P, ohne die relative Lage von F C und C P zu verändern, so rotirt der Cylinder D proportional zu $r \sin \alpha$ und zu s. Die Drehung des Cylinders wird mithin gleich $c r \sin \alpha$, wobei c eine Constante bedeutet, welche von den Dimensionen des Instruments abhängt.

Führt man den Fahrstift F auf einem Kreisbogen, dessen Centrum C ist, so dreht sich die Kugelcalotte nicht, dagegen ändert der Cylinder seine Lage auf der Kugel. Der Cylinder wälzt sich, ohne zu gleiten, in seine neue Lage, wobei der Wagen sich auf der Nuth des Fahrarms etwas verschiebt. Der Cylinder rotirt bei dieser Bewegung nicht. Beschreibt der Fahrstift F irgend eine Curve, so findet gleichzeitig Drehen der Kugel und Wälzen des Cylinders statt und letzterer rotirt dabei um einen Betrag der gleich ist $c r \int \sin \alpha \, ds$, welcher Wert proportional ist zum Flächeninhalt der von F beschriebenen Curve. Wäre der Rahmen, welcher den Cylinder D trägt *nicht* beweglich in der Richtung des Fahrarms, so würde das Instrument trotzdem noch obiges Integral richtig angeben. Allerdings könnte dann der Cylinder seine Lage auf der Kugel nicht mehr ändern, ohne zu gleiten. Auch ist es theoretisch durchaus nicht nötig, dass die Axe C durch den Kugelmittelpunkt geht, wenn sie nur die Rotationsaxe der Kugel schneidet. Selbstverständlich muss dafür gesorgt sein, dass unter allen Umständen der Cylinder die Kugel stets berührt.

Ferner ist es nicht nötig, dass der Cylinder die Kugel in einem grössten Kreis berühre, der Cylinder kann sogar während

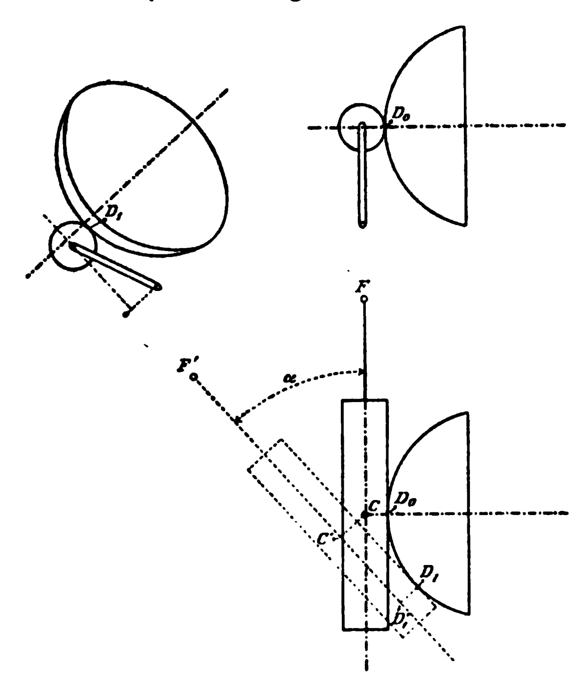
der Bewegung des Instruments seine Lage auf der Kugel *beliebig* verändern, wenn dabei nur seine Axe sich selbst parallel bleibt. Liegen jedoch die Rotationsaxe des Cylinders und die Rotationsaxe der Kugel nicht in ein und derselben Ebene, so findet bei jeder Rotation der Kugel ein Gleiten des Cylinders auf der Kugel statt.

Soll nämlich blosses Rollen von Cylinder auf Kugel stattfinden, so muss die Fortbewegungsrichtung der beiden materiellen Punkte, in welchen die beiden Flächen sich berühren, für beide Punkte dieselbe sein. Denkt man sich also im Berührungspunkt eine Tangente an den Parallelkreis der Kugel gelegt, so muss diese Linie auch gleichzeitig Tangente des Cylinderkreises sein, der durch den Berührungspunkt geht. Dieses ist aber nur möglich, wenn sich die Rotationsaxen von Kugel und Cylinder schneiden. Liegen die beiden Rotationsaxen nicht in einer Ebene, so bilden die Tangenten der beiden Berührungskreise einen Winkel ψ miteinander. Bedeutet u_1 den Weg, welchen der Berührungspunkt auf dem Parallelkreis der Kugel bei deren Rotation zurücklegt, und u_2 den resultirenden Weg des Berührungspunktes auf dem Cylinderkreis, so ist $u_2 = u_1 \cos \psi$.

Es findet also eine schiefe relative Bewegung statt, welche Gleitung bedingt. Sollte keine Gleitung stattfinden, so müsste die Bedingung $u_2 = u_1$ erfüllt sein.

Würde bei dem beschriebenen Planimeter der Cylinder die Kugel nicht in dem horizontalen grössten Kreis berühren, sondern höher oder tiefer, so wäre die Entfernung des Berührungspunktes von der Rotationsaxe der Kugel *nicht* gleich, sondern grösser als $r \sin \alpha$, nämlich gleich $\frac{r \sin \alpha}{\cos \psi}$. Es würde mithin $u_1 = c \frac{r \sin \alpha}{\cos \psi} ds$ und $u_2 = u_1 \cos \psi = cr \sin \alpha \, ds$ sein,
womit nachgewiesen ist, dass auch in diesem Fall das Instrument richtige Resultate giebt. Ohne den Cylinder oder den ihn tragenden Rahmen in der Richtung der Rotationsaxe des Cylinders beweglich zu machen, ist es nicht möglich, ein Gleiten des Cylinders auf der Kugel zu vermeiden, wohl aber kann man durch zweckmässige Wahl der verticalen Axe C des Fahrarms die Gleitung bedeutend reduciren, was beim Kugelplanimeter von Coradi in

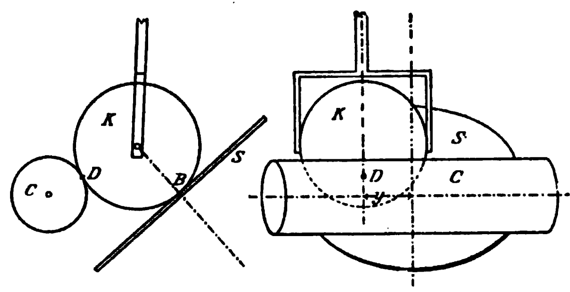
geschickter Weise durchgeführt ist. Dort ist die Axe C durch den Schnittpunkt der Rotationsaxen von Kugel und Cylinder gerichtet. Das den Cylinder tragende Rähmchen ist drehbar um



eine Axe parallel zum Fahrarm. Dreht man den Fahrarm um den Winkel α aus seiner ursprünglichen Lage heraus, so kommt der Cylinder durch unvollkommenes Wälzen in seine neue Lage. Der Betrag, um welchen der Cylinder dabei gleitet, ist gleich der Differenz der krummlinigen, auf der Kugel gemessenen Entfernung D_0 D_1 und der Entfernung der Projectionen der Punkte C und D_1 auf die schiefe Cylinderaxe C_1 D_1. Bei kleinen Werten von α ist jene Differenz verschwindend klein. Bei jeder schiefen Lage des Cylinders berührt dieser die Kugel in einem Punkt, der tiefer liegt als D_0, es wird in Folge dessen bei einer Rotation der Kugelcalotte ebenfalls ein partielles Gleiten des Cylinders stattfinden. Da nun bei kleinen Werten von α der Berührungspunkt wenig tiefer als D_0 liegt, so ist auch das resultirende Gleiten des Cylinders sehr unbedeutend.

Die Combination von Kugel und Ebene, oder Kugel und Kreiskegel, genügt für sich allein nicht zur Auswertung eines Integrals. Um ein Resultat zu bekommen, muss man noch einen Cylinder zu Hilfe nehmen.

Man denke sich eine ebene Scheibe S und einen Cylinder C dessen Axe parallel zur Scheibenebene gerichtet ist. Eine Kugel K liege gleichzeitig gegen den Cylinder und die Scheibe an und



zwar so, dass die Kugel die Scheibe in einem Punkt eines Durchmessers berührt. Die Berührungspunkte der Kugel mit der Scheibe und dem Cylinder seien resp. B und D.

Eine Vorrichtung soll gestatten, die Kugel in der Richtung der Cylinderaxe so zu verschieben, dass sich dabei die Kugel frei drehen kann und Cylinder und Scheibe stets berührt. Dreht sich die Scheibe um ihre Axe um den Winkel φ während die Lage der Kugel unverändert bleibt, so dreht sich letztere um eine Axe, welche parallel zur Cylinderaxe ist. Diese Drehung wird von der Kugel direct auf den Cylinder übertragen. Bezeichnet y die Entfernung des Scheibenmittelpunkts vom Berührungspunkt der Kugel mit der Scheibe, so wird der vom Cylinder abgewickelte Bogen

$$du = y\, d\varphi.$$

Verschiebt man die Kugel in der Richtung der Cylinderaxe, so rollt sie einerseits der Scheibe entlang, andererseits dem Cylinder entlang; eine Drehung des Cylinders findet nicht statt.

Bringt man daher die Scheibe in Drehung, während man die Lage der Kugel passend verändert, so erhält man nach einer Bewegung des Systems von endlicher Grösse als Cylinderabwicklung

$$u = \int y\, d\varphi.$$

Bringt man diesen Mechanismus z. B. an Stelle des Kegels oder der Scheibe im Gonnella'schen Planimeter und die Kugel an Stelle der Rolle, so hat man ein Linearplanimeter ohne Gleitung. Will man wirklich keine Gleitung haben, so muss die Gabel, welche die Kugel hin- und herschiebt, mit Führungsrollen versehen sein, deren Axen parallel zur Verbindungslinie von B und D gerichtet sind.

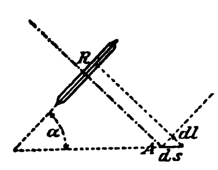
Dieser Integrationsmechanismus ist zwar complicirt, hat aber, wie die Linearplanimeter die Eigentümlichkeit, in jedem Augenblick das fertige Resultat anzugeben, ohne dass man das System in die Anfangslage zurückbringen muss. Der Mechanismus wurde von Sir W. Thomson bei einem Apparat zur Auswertung der Coëfficienten periodischer Reihen angewendet.

(Siehe W. Thomson, Natural Philosophy.)

3) Der dritte Integrationsmechanismus ist von den beiden vorhergehenden wesentlich verschieden. Der Mechanismus besteht in einer *Rolle* mit *scharfem Rand*, welche auf einer Fläche rollt, ohne seitlich gleiten zu können; dagegen muss sie sich um ihren Berührungspunkt auf der Fläche drehen können. Statt einer scharfkantigen Rolle kann man auch irgend eine sich nicht drehende Schneide auf der Fläche laufen lassen. Die Abwicklung kommt hier nicht in Betracht; die Rolle soll nur eine gewisse *Lage* oder eine gewisse *Richtung* fixiren.

Zur Erkenntnis der Wirkungsweise der Rolle im ersten Fall, denke man sich eine scharfkantige Rolle R, welche sich auf ihrer Drehungsaxe verschieben lässt.

Bewegt sich ein Punkt A der Drehungsaxe parallel zur Ebene der Rolle und sorgt man dafür, dass sich die Richtung der Rollenebene nicht ändern kann, so rollt die Rolle auf der Fläche in der Richtung der Rollenebene; die Entfernung des Punktes A von der Rollenebene, auf welche es nun ankommt, ändert sich dagegen nicht. Bewegt man dagegen den Punkt A in der Richtung der Rollenaxe, so bleibt die Rolle stehen und die Axe gleitet ein Stück weit durch die Rolle. Ich nenne diese Strecke l. Bewegt man den Punkt A auf der beliebigen unendlich



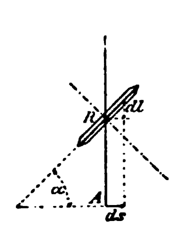
kleinen Bahn ds, und sorgt dafür, dass sich der Winkel α welchen die Rollenebene mit der Bewegungsrichtung von A bildet, nicht ändert, so wird $dl = ds \sin \alpha$. Ändert sich der Winkel gleichzeitig unendlich wenig, so hat dies auf die Länge dl keinen Einfluss. Bewegt man den Punkt A auf einem endlichen Curvenstück, so wird

$$l = \int \sin \alpha \, ds.$$

Durch passende kinematische Verbindungen hat man dann wieder für die Herstellung des Winkels α zu sorgen.

Das einzige mir bekannte Instrument, welches auf diesem Princip basirt, ist ein Polarplanimeter meines Vaters (siehe J. Amsler, Vierteljahrschrift 1856.)

Um die Wirkungsweise einer scharfkantigen Rolle, welche eine gewisse *Richtung* fixiren soll, einzusehen, denke man sich eine Stange R A so mit der Rolle verbunden, dass der Berührungspunkt der Rolle auf der Fläche sich nur in der Richtung der Stange verschieben lässt, und dass die Richtung der Rollenebene gleichzeitig beliebig verändert werden kann. Verschiebt man nun die Stange A R parallel zu sich selbst, so dass A die zu A R senkrechte Bahn ds beschreibt, so rollt die Rolle in der Richtung ihrer Ebene. Dabei verschiebt sich der Punkt R auf der Stange um die Strecke dl. Es ist $dl = \operatorname{tg} \alpha \, ds$. Durchläuft A ein endliches Curvenstück und sorgt man durch passende kinematische Verbindungen für die Herstellung des Winkels α, so erhält man $l = \int \operatorname{tg} \alpha \, ds$.

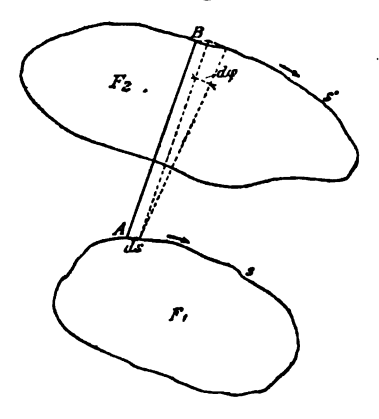


Ein Instrument, welches auf diesem Integrationsprincip basirt, ist das zeichnende Planimeter (Integraph genannt) von Abdank-Abakanowicz.

Es soll nun gezeigt werden, wie man die besprochenen Integrationsmechanismen angewendet hat und anwenden kann, um Integrale von praktischer Bedeutung auszuwerten. Ich beschränke mich der Einfachheit wegen auf die Anwendung des erstgenannten Integrationsmittels, nämlich einer Rolle, welche auf einer Fläche teils rollt, teils gleitet, bemerke jedoch, dass man dasselbe auch

leisten könnte mit Zugrundelegung der andern Integrationsprincipien.

Ich betrachte zunächst eine begrenzte Gerade a, deren Endpunkte A und B auf zwei beliebigen, in derselben Ebene liegen-



den festen Curven s und s' gleiten. Bei einer unendlich kleinen Parallelbewegung bestreicht die Gerade a die Fläche

$$a \sin \alpha \, ds$$

wenn α den Winkel bedeutet, welchen a mit der Bewegungsrichtung des Punktes A und ds die Länge der Bahn von A bedeutet.

Dreht sich die Gerade a um den Punkt A um den Winkel $d\varphi$, so bestreicht a die Fläche $\frac{a^2 \, d\varphi}{2}$.

Finden beide Bewegungen gleichzeitig statt, so ist das bestrichene Flächenelement

$$dF = a \sin \alpha \, ds + \frac{a^2}{2} \, d\varphi.$$

Führt die Gerade a eine endliche Bewegung aus, so ist daher die von a bestrichene Fläche

$$F = a \int \sin \alpha \, ds + \frac{a^2}{2} \varphi$$

wobei das Integral über den ganzen vom Punkt A durchlaufenen Weg auszudehnen ist; φ ist der Winkel zwischen Anfangs- und

Endlage der Geraden a. Fallen diese zusammen, so ist entweder $\varphi = o$ oder $= 2\pi$ je nachdem die Gerade a während der Bewegung *keine* oder *eine* ganze Umdrehung gemacht hat; und es wird dementsprechend

$$F = a\int \sin\alpha \, ds$$

$$\text{oder } F = a\int \sin\alpha \, ds + a^2\pi$$

Sind F_1 und F_2 die Flächeninhalte von s resp. s', und nehme ich den künftig blos in Betracht kommenden Fall an, dass A und B die beiden Curven in demselben Sinn durchlaufen, so ergibt eine einfache Betrachtung, die ich hier nicht näher ausführen will, dass

$$F = F_2 - F_1$$

$$\text{mithin } F_2 - F_1 = a\int \sin\alpha \, ds$$

$$\text{oder } F_2 - F_1 = a\int \sin\alpha \, ds + a^2\pi.$$

Gleitet der Punkt auf s hin und her, so ist

$$F_1 = o \text{ und } F_2 = a\int \sin\alpha \, ds.$$

Denkt man sich nun, dass die Gerade a eine Stange vorstellt, welche eine Rolle trägt, die auf der Zeichnungsebene ruht und deren Axe parallel zu a ist, so hat man ein Instrument, um Flächeninhalte zu messen. Wird nämlich der Punkt A durch eine kinematische Verbindung auf der Curve s und der Punkt B mit der Hand auf der Curve s' geführt, so gibt die Rolle den Wert des Integrals $\int \sin\alpha \, ds$ an, wenn die Stange a wieder in die Anfangslage zurückgekehrt ist.

Bezeichne ich wie früher die Rollenabwicklung mit u, so hat man

$$u = \int \sin\alpha \, ds$$

$$\text{und} \quad F_2 = au$$

Wählt man für die Curve s einen Kreis, so kommt man zu dem bekannten Polarplanimeter von *J. Amsler Laffon.**)

*) Siehe *J. Amsler,* Vierteljahresschrift 1856.

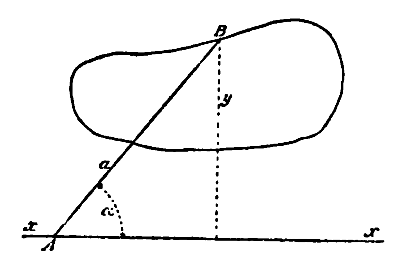
Ich nehme nun an, der Punkt A werde auf einer Geraden x geführt. Für den Inhalt der von B umfahrenen Figur hat man wieder

$$au = a\int ds \sin\alpha.$$

Setze ich $ds = dx$, $a \sin\alpha = y$, so wird

$$au = \int y\, dx,$$

worin y als Function von x anzusehen ist.



Durch die Substitutionen $y = a \sin\alpha$, $dx = ds$ kann ich umgekehrt jedes Integral von der Form

$$\int y^n\, dx,$$

welches sich über eine geschlossene Curve $y = f(x)$ erstreckt, und worin n eine positive ganze Zahl bedeutet, durch Integrale von der Form

$$\text{const.} \int ds \sin\beta$$

ausdrücken, also durch Integrale, welche mit den bisher angewandten Hilfsmitteln mechanisch ausgewertet werden können, wenn man nur im Stande ist, jederzeit den Winkel β, der eine Function von α ist, durch einen Mechanismus herzustellen. Macht man jene Substitution, so wird

$$\int y^n\, dx = a^n \int ds \sin^n\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Nun ist

für $n = 2p + 1$

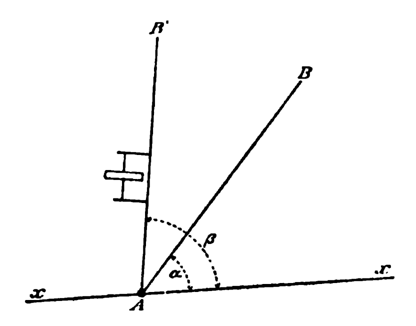
$$(-1)^p\, 2^{2p} \sin^{2p+1}\alpha = \sin(2p+1)\alpha - \frac{2p+1}{1}\sin(2p-1)\alpha + \ldots,$$

und für $n = 2q$

$$(-1)^q 2^{2q-1} \sin^{2q} \alpha = \cos 2q\alpha - \frac{2q}{1} \cos(2q-2)\alpha + \ldots.$$

Setzt man für $\sin^n \alpha$ diese Werte in $\int ds \sin^n \alpha$ ein, so erhält man für $\int y^n dx$ einen Ausdruck, der nur noch Integrale von der Form $c \int \sin m\alpha \, ds$ oder $c \int \sin(\frac{\pi}{2} - m\alpha) \, ds$ enthält (m bedeutet eine positive ganze Zahl, c eine Constante), sodass also $\beta = m\alpha$ oder $\beta = \frac{\pi}{2} - m\alpha$ wird.

Ist mit der Stange AB eine zweite Stange AB' bei A durch ein Scharnier verbunden, und durch einen Mechanismus dafür gesorgt (was auf verschiedene Arten möglich ist), dass in jedem Moment der Bewegung der Winkel β, welchen AB' mit der Ge-



raden x bildet, gleich $m\alpha$ ist, so wickelt, wenn man mit B die geschlossene Figur $y = f(x)$ umfährt, eine an der Stange AB' angebrachte Rolle einen Bogen ab, der gleich ist

$u' = \int \sin \beta \, ds$, wenn die Rollenaxe parallel zu AB',

$u' = \int \cos \beta \, ds$, wenn dieselbe senkrecht zu AB' an der Stange befestigt ist.

Zur Auswertung eines jeden in dem für $\int y^n dx$ substituirten Ausdruck vorkommenden Integrals ist eine Stange mit daran befestigter Rolle erforderlich; alle Stangen müssen in A scharnierartig mit einander verbunden sein und jederzeit mit der Geraden x

einen Winkel bilden, der gleich ist einem ganzen Vielfachen von α. Die Summe der mit den entsprechenden Constanten multiplicirten Róllenabwicklungen ergibt dann den Wert des Integrals

$$\int y^n \, dx,$$

welches sich über den ganzen von B durchlaufenen geschlossenen Weg erstreckt.

Ein Beispiel dieser Art Instrumente ist der Integrator von *J. Amsler-Laffon*, welcher die Integrale

$$\int y \, dx, \int y^2 \, dx \text{ und } \int y^3 \, dx,$$

gleichzeitig auswertet (Vergl. *J. Amsler*, Vierteljahresschrift).

Nachdem es gelungen ist, das Integral $\int y^n \, dx$ mit denselben Hilfsmitteln auszuwerten, mit denen sich $\int y \, dx$ mechanisch bestimmen lässt, kann man sich fragen, ob es nicht auch gelingt, durch Umfahren einer Figur Integrale von der Form $\int y^n x^m \, dx$ mechanisch auszuwerten. Es ist dies in der That möglich und auch für den Fall $m = 1$ von der Firma *J. Amsler-Laffon und Sohn* mehrfach ausgeführt worden zum Zweck der Untersuchung von Rotationskörpern aus deren Schnitt durch die Rotationsaxe (ballistische Untersuchungen). Eine Beschreibung dieses Instruments ist bis jetzt noch nicht publicirt worden.

Sind x und y die Coordinaten eines Punktes der ebenen Figur, welche durch Rotation um die x-Axe den Rotationskörper erzeugt, so ist das Volumen desselben

$$V = \pi \int y^2 \, dx,$$

das statische Moment des Körpers in Bezug auf die y-Ebene

$$M_y = \pi \int y^2 x \, dx,$$

das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe Ebene

$$I_y = 2\pi \int y^2 x^2 \, dx,$$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Rotationsaxe

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int y^4 \, dx.$$

Die Integrale erstrecken sich über die die Rotationsfläche erzeugende Curve und über die Rotationsaxe.

Die Ermittlung von V und I_x kann mit den bekannten Hilfsmitteln geschehen; anders verhält es sich mit M_y und I_y, welche die Bestimmung von Integralen der Form $\int y^n x^m dx$ erfordern. Zu diesem Ende muss man das bisherige Integrationsprincip etwas modificiren. Die Grösse $y^n x^m$ als variable Function und dx als Argument in den Mechanismus hineinzulegen, ginge aus kinematischen Gründen nicht an. Es bleibt daher nichts anderes übrig als y als Function von x und $x^m dx$ als variables Differential zu verwenden. Zur Erläuterung der Art, wie dies geschehen kann, diene die mechanische Integration im einfachsten Falle $\int y^2 x\, dx$.

Setzt man $y = 2a \sin \alpha$, so wird

$$y^2 = 4a^2 \sin^2\alpha = -2a^2 \cos 2\alpha + 2a^2$$

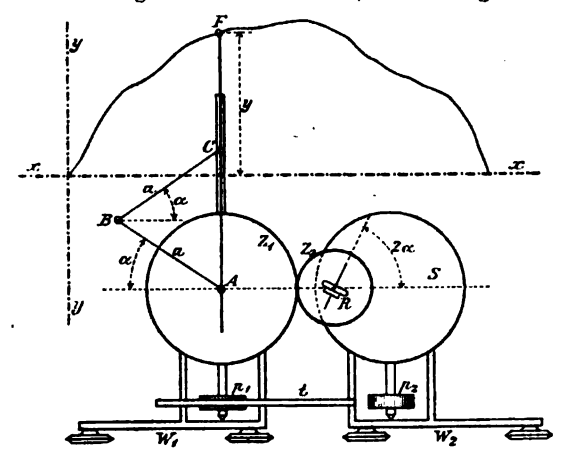
und

$$\int y^2 x\, dx = -2a^2 \int x \cos 2\alpha\, dx + 2a^2 \int x\, dx$$

Über eine geschlossene Curve ausgedehnt ist $\int x\, dx = o$, und es bleibt

$$\int y^2 x\, dx = -2a^2 \int x \cos 2\alpha\, dx$$

Um dieses Integral zu bestimmen, dient folgender Mechanis-



mus. In der Nuth eines Lineals parallel zur Rotationsaxe xx laufen die Räder zweier Wägen W_1 und W_2. Der Wagen W_1

gibt einer Stange senkrecht zu xx Führung. Am Ende trägt die Stange den Fahrstift F. AB und BC sind zwei gleich lange Stangen, welche in B durch ein Scharnier verbunden sind. Die Stange AB dreht sich um den Punkt A und dreht ein damit starr verbundenes Zahnrad z_1, welches in ein halb so grosses Zahnrad z_2 eingreift. Letzteres Zahnrad trägt eine Rolle R, deren Axe mit der Linie xx den Winkel 2α bildet, wenn AB (oder BC) den Winkel α mit xx bildet. Die Rolle R liegt mit sanftem Druck auf einer drehbaren ebenen Scheibe S auf, welche vom Wagen W_2 getragen wird. Der Wagen W_2 wird vom Wagen W_1 in Bewegung gesetzt und zwar so, dass sich die Entfernung der beiden Wagen in gleichem Verhältnis ändert, als der Wagen W_1 sich längs des Lineals bewegt. Gleichzeitig erhält die Scheibe S eine Drehung proportional zur Fortbewegung des Wagens W_2. Es geschieht dies folgendermassen. Am Wagen W_2 ist eine horizontale Zahnstange t befestigt, welche auf einem verticalen Zahnrad p_1 ruht, dessen Axe senkrecht zum Lineal vom Wagen W_1 getragen wird und welches auf einer Zahnung des Lineals läuft. Bewegt sich der Wagen W_1, so rollt das Zahnrad p_1 auf dem Lineal und treibt die Zahnstange und damit den Wagen W_2 von W_1 weg, so dass die Entfernung von W_1 und W_2 proportional ist zu x. In Folge dessen wird auch die Entfernung des Punktes, in welchem die Rolle R die Scheibe S berührt, vom Mittelpunkt der Scheibe in gleichem Verhältnis wachsen wie x.

Der Wagen W_2 trägt ebenfalls ein verticales Zahnrad p_2, welches auf dem Lineal rollt. Von der Axe dieses Zahnrades aus wird die Scheibe S durch ein konisches Räderpaar in Umdrehung versetzt. Die Bewegung des Wagens W_2 ist proportional zu x, also ist auch die Drehung der Scheibe S zu x proportional.

Nehmen wir an, die Rolle R berühre die Scheibe S im Centrum, wenn sich der Fahrstift auf der y-Axe befindet. Verschiebt man den Fahrstift um die Strecke x, so wird auch die Entfernung der Rolle R vom Mittelpunkt der Scheibe = const. x. Verschiebt man nun den Fahrstift um dx parallel zur x-Axe, so dreht sich die Scheibe S, und zwar so, dass ein Punkt des Kreises der Scheibe S, in welchem die Rolle R die Scheibe berührt, einen Weg beschreibt, der gleich ist const. x dx. Da

nun die Rollenaxe den Winkel 2α mit xx bildet, wird durch jene Drehung die Rolle um const. $x \cos 2\alpha\, dx$ gedreht. Ausser dieser Drehung erhält die Rolle noch eine weitere Drehung, welche von der relativen Bewegung von Rolle und Scheibe herrührt; dieser Teil der Drehung beträgt const. $\sin 2\alpha\, dx$. Bewegt man den Fahrstift in der Richtung der y-Axe, ohne x zu verändern, so dreht sich die Rolle um ihren Berührungspunkt, ohne jedoch zu rotiren. Bei einer endlichen Bewegung des Fahrstifts bekommt man daher als Gesamtrollendrehung

$$u = \text{const} \int x \cos 2\alpha\, dx + \text{const} \int \sin 2\alpha\, dx.$$

Das Integral $\int \sin 2\alpha\, dx$ lässt sich durch eine Rolle ermitteln, welche auf einer am Wagen W_1 angebrachten Scheibe läuft, so dass nun die Aufgabe, das Integral $\int x \cos 2\alpha\, dx$ zu ermitteln, gelöst ist.

Die Auswertung des Integrals $\int y^n x^m\, dx$, in welchem $m > 1$ ist, bietet deswegen grössere mechanische Schwierigkeiten, weil es nun darauf ankommt, die Entfernung des Wagens W_2 von W_1 so zu reguliren, dass sie proportional ist zu x^{m-1}, was aber immerhin möglich ist.

Es liegt nun nahe zu untersuchen, ob man nicht auch dadurch zur mechanischen Auswertung neuer Integrale von geometrischer oder mechanischer Bedeutung geführt wird, dass man annimmt, ein Endpunkt der Stange a, z. B. A durchlaufe eine geschlossene Curve s, während die Stange selbst stets durch einen festen Punkt P geht.

Trägt die Stange a (s. Fig. nächste S.) eine Rolle, deren Axe parallel zu a ist, so ist deren Abwicklung u, nachdem A die Curve s durchlaufen hat, wieder gleich

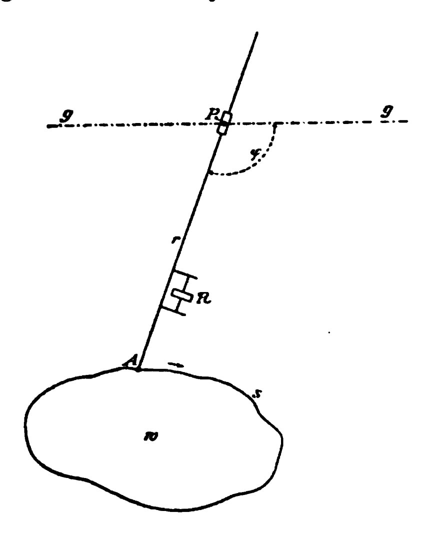
$$u = \int \sin \alpha\, ds + 2\, n\, b\, \pi,$$

wenn die Stange a n volle Umdrehungen gemacht hat.

b bedeutet den constanten Abstand des Punktes A von der Ebene des Rollenrandes; a hat die frühere Bedeutung.

Es seien r, φ die Polarcoordinaten des Punktes A in Bezug auf eine beliebige durch P gehende feste Gerade g als Polaraxe und P als Coordinatenanfangspunkt. Der Winkel φ soll während

der Bewegung von a abnehmen, wenn sin α positiv ist, wachsen, wenn sin α negativ wird. Bei jeder unendlich kleinen Bewegung



von a besteht dann die Relation

$$ds \sin \alpha = - r\, d\varphi.$$

Liegt P ausserhalb der von A durchlaufenen Curve s, was ich zunächst annehmen will, so ist $n = o$, und die Stange a oder deren Verlängerung schneidet die Curve s in jedem Augenblick in einer geraden Anzahl von Punkten. Ich fasse zwei benachbarte Lagen der Stange a ins Auge, welche die Curve s resp. in den Punkten A_1, A'_1 und A_2, A'_2 treffen mögen. Durchläuft der Punkt A die Strecke A_1, A_2, so wickelt die an der Stange a angebrachte Rolle einen Bogen ab, der gleich ist

$$du_1 = ds_1 \sin \alpha_1 = - r_1\, d\varphi$$

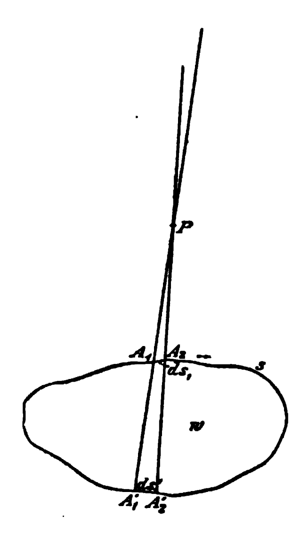
wenn $A_1 P = r_1$, $A_1 A_2 = ds_1$, $\alpha_1 =$ Winkel $P A_1 A_2$ gesetzt wird. Durchläuft A die Strecke A'_2 A'_1, so wickelt die Rolle den Bogen ab

$$du'_1 = ds'_1 \sin \alpha'_1 = r'_1\, d\varphi,$$

wobei ds'_1, α'_1, r'_1 ähnliche Bedeutung wie die nicht gestrichenen Buchstaben haben. Es ist daher

$$du_1 + du'_1 = ds_1 \sin \alpha_1 + ds'_1 \sin \alpha'_1 = (r'_1 - r_1)\, d\varphi = d\varphi \int_{r_1}^{r_1'} dr$$

wenn man unter r den Radiusvector irgend eines in dem Rechteck $A_1\ A_2\ A'_2\ A'_1$ liegenden Punktes versteht.



Da man in jedem Moment der Bewegung dieselbe Betrachtung anstellen kann, so ist die Richtigkeit folgender Gleichung evident:

$$u = \int ds \sin \alpha = \int\int dr\, d\varphi$$

Das Doppelintegral erstreckt sich über die ganze von s eingeschlossene Fläche. Setze ich noch $r\, dr\, d\varphi = dw$, so geht die Gleichung über in

$$u = \int \frac{dw}{r}.$$

Da dw das Element jener Fläche ist, welches die Entfernung r von P hat, so stellt das Integral das *Potential* der mit Masse von der Dichtigkeit 1 belegt gedachten von s eingeschlossenen Fläche in Bezug auf den Punkt P dar.

Liegt P innerhalb der Curve s und ist $n = 1$, so ist

$$du = ds \sin \alpha + b d\varphi = d\varphi \int_0^r dr + b d\varphi, \text{ mithin}$$

$$u = \int \frac{dw}{r} + 2 b\pi$$

also ist $u - 2 b \pi$ gleich dem Potential der von s begrenzten Figur in Bezug auf den Punkt P.

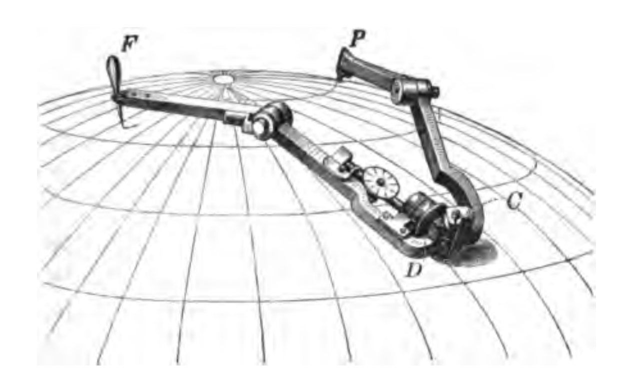
Mit folgendem einfachen Instrument ist man daher im Stand, das Potential einer ebenen Figur in Bezug auf irgend einen in ihrer Ebene gelegenen Punkt P durch blosses Umfahren derselben zu messen. Eine Hülse ist um eine durch P gehende und auf der Zeichnungsebene senkrecht stehende Axe drehbar. In der Hülse lässt sich die Stange a verschieben, welche einen verticalen Stift A zum Umfahren der Figur und eine auf der Zeichnungsebene mit Reibung aufliegende Rolle trägt, deren Axe parallel zur Stange ist.

Die Lösung des Problems, das Potential einer ebenen Figur in Bezug auf einen Punkt ihrer Ebene mechanisch auszuwerten, führt unmittelbar zu der Frage, ob es möglich ist, den gefundenen Mechanismus so zu erweitern, dass man mit seiner Hilfe das Potential auch in Bezug auf einen ausserhalb der Ebene der Figur liegenden Punkt bestimmen kann.

Die Lösung dieser Aufgabe, sowie die sich unmittelbar daraus ergebenden Probleme den Flächeninhalt einer sphärischen Figur aus ihrer stereographischen Projection, oder aus ihrer ebenen Projection vom Mittelpunkt der Kugel als Projectionscentrum mechanisch zu bestimmen, würde hier zu weit führen und ich verweise daher auf die Originalpublicationen (*A. Amsler*, Mechan. Bestimmung des Potentials und der Anziehung; Carl's Repertorium für Physik, Band XV und *Alfred Amsler*, Über den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen, und über mechanische Integrationen, Schaffhausen 1880).

Ich bemerke noch, dass alle Sätze, welche sich auf den Flächeninhalt durch Bewegung erzeugter Curven in der Ebene

beziehen, auch noch Geltung haben auf der *Kugel*, wenn man die bewegliche Gerade durch ein Stück eines grössten Kreises ersetzt. Auch das Planimeter kann verwendet werden zur Messung der wirklichen Flächeninhalte einer auf einem Globus gezeichneten Figur.



Vorstehende Figur zeigt ein Polarplanimeter, welches zur Messung sphärischer Figuren eingerichtet ist. (Siehe *J. Amsler-Laffon*, Neuere Planimeter-Constructionen, Zeitschrift für Instrumentenkunde 1884.)

Mechanische Integration von Differentialgleichungen zwischen zwei Variablen.

Die bisher besprochenen Integrationsmethoden und kinematischen Verbindungen lösten allgemein die Aufgabe mit Hülfe eines Mechanismus aus der Gleichung

$$dy = f(x)\, dx.$$

zu jedem Wert von x den zugehörigen Wert von y zu bestimmen, wenn das Gesetz f(x) durch eine gezeichnete Curve gegeben ist oder in der Bewegung eines Gliedes einer kinematischen Verbindung liegt, und ausserdem ein zusammengehöriges Wertepaar (x_0 y_0) bekannt ist.

So wenig als dort von einem analytischen Ausdruck für *y* die Rede sein konnte, wird dies hier der Fall sein, sondern

man wird sich begnügen müssen, für discrete Werte der einen Variablen jeweils die zugehörigen numerischen Werte der andern zu erhalten; oder aber man wird statt eines analytischen Ausdrucks entweder wieder eine Curve erhalten, die durch den Mechanismus gezeichnet wird, oder das Gesetz der Abhängigkeit der beiden Variablen wird wieder ausgesprochen sein in der Bewegung einzelner Teile des Mechanismus.

Nach diesen Bemerkungen ist ersichtlich, dass auch bei der mechanischen Integration von Differentialgleichungen von der Voraussetzung ausgegangen werden muss, dass die in den Differentialgleichungen vorkommenden Functionen durch eine kinematische Verbindung ausgedrückt werden können oder graphisch gegeben seien, was eigentlich dasselbe besagt, da in letzterem Fall die Hand, die mit einem Teil des Mechanismus die gezeichnete Curve verfolgt, die kinematische Verbindung ersetzt. Ferner ist klar, dass man mittelst eines Mechanismus nicht das allgemeine Integral, sondern nur particuläre Integrale einer Differentialgleichung erhalten kann, und dass daher ausser der Differentialgleichung selbst noch so viele zusammengehörige Wertepaare der beiden Variablen gegeben sein müssen, dass im Integral der Differentialgleichung keine willkürlichen Constanten vorkommen können.

Da die Mechanismen zur Auflösung der Differentialgleichungen der Natur der Sache nach so complicirt sind, dass sie schwerlich je in praktischen Gebrauch kommen werden und zudem für jede Art von Differentialgleichungen wieder ein anderes Instrument hergestellt werden müsste, will ich nicht näher, weder auf diesen Gegenstand, noch auf die mehrfachen Integrationen eingehen, sondern mich mit dem Hinweis auf die diesbezüglichen Mitteilungen in meiner Abhandlung „Über den Flächeninhalt etc.“ begnügen.

Über Instrumente zur Harmonischen Analyse.

Von O. Henrici in London.

Nach *Fourier* kann jede periodische Bewegung eines Punktes mit der Periode T in eine endliche oder unendliche Anzahl von einfachen periodischen Bewegungen mit den Perioden T, $^1/_2$T, $^1/_3$T . . . zerlegt werden.

Diese einfachen periodischen Bewegungen sind die Sinus-Bewegungen, wie sie bei den kleinen Schwingungen eines Pendels ausgeführt werden. Sir *Wm. Thomson* (jetzt Lord *Kelvin*) nennt sie einfach harmonische Bewegungen.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig auf einem Kreise, so beschreibt seine Projection auf irgend einem Durchmesser eine einfache harmonische Bewegung. Eine solche kann man mechanisch in folgender Weise hervorbringen. Eine, sagen wir horizontale, Axe trägt eine excentrische Scheibe. Über diese greift von oben eine Gabel, in der verticalen Ebene der Scheibe liegend. Die Gabel kann sich nicht vertical, wohl aber horizontal in ihrer eigenen Ebene bewegen. Wird nun die Axe gleichförmig gedreht, so beschreibt jeder fest mit der Gabel verbundene Punkt eine horizontale einfach harmonische Bewegung. Einen solchen oder einen ähnlichen Mechanismus wollen wir immer voraussetzen, wenn in den zu beschreibenden Mechanismen von einfach harmonischen Bewegungen die Rede ist.

Die harmonische Analyse einer gegebenen periodischen Bewegung besteht nun in der Bestimmung der Amplituden und Phasen der componirenden einfach harmonischen Bewegungen oder, analytisch ausgedrückt, in der Bestimmung der Coëfficienten welche in der Entwickelung einer Function in eine Fourier'sche Reihe auftreten.

Setzen wir die Periode T hier der Einfachheit wegen gleich 2π und schreiben

$$f(t) = \tfrac{1}{2}t_0 + A_1 \cos t + A_2 \cos 2t + \dots$$
$$+ B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \dots,$$

so ist für jedes n

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt.$$

Es handelt sich also um die Ermittelung dieser beiden Integrale. Instrumente zur harmonischen Analyse sind daher Integratoren, welche Integrale der obigen Form ermitteln.

Eine solche harmonische Analyse ist für viele praktische Untersuchungen nötig. Thomson's Instrument ist zunächst ersonnen, um die täglichen Änderungen der Temperatur und des Luftdruckes zu analysiren. Diese Arbeit ist für eine Reihe von Jahren in der Meteorological Office in London ausgeführt und veröffentlicht. Als andere Anwendungen erwähne ich die Entwickelung der Intensität eines alternirenden elektrischen Stromes in eine Fourier'sche Reihe, sowie eine ähnliche Entwickelung des Temperaturzustandes im Innern des Cylinders einer Dampfmaschine zur Bestimmung der Wärme, welche durch die Wandung des Cylinders strömt. In letzterem Falle ist das Indicatordiagramm harmonisch zu analysiren.

W. Thomson's Analysator.

In Sir *Wm. Thomson's* (Lord *Kelvin*) Harmonic Analyser, dem ersten ausgeführten Instrumente dieser Art, ist die zu analysirende Curve auf einem Cylinder verzeichnet, der der Curvencylinder heissen mag. Während dieser gedreht wird, erhält eine Zahnstange durch passenden Mechanismus eine einfach periodische Bewegung. Diese wird auf eine Scheibe übertragen, deren gezahnter Rand in die Zahnstange eingreift. Die Scheibe oscillirt also harmonisch um ihren Mittelpunkt, und zwar n-mal während einer Umdrehung des Cylinders. In dem ausgestellten Modell hat n die Werte 0, 1, 2, in dem Instrument, welches in der Meteorological Office in London gebraucht wird, hat n auch den Wert 3.

Diese Scheiben sind doppelt vorhanden mit Ausnahme der ersten, für welche $n = o$, ihre Phasen unterscheiden sich um einen rechten Winkel. Die Axen der Scheiben sind rechtwinklig zur Cylinderaxe und unter einem Winkel (45°) gegen die Horizontalebene geneigt.

Vor jeder Scheibe liegt, ohne sie zu berühren, ein horizontaler Cylinder, dessen Umdrehung die Werte der Integrale gibt. Sie mögen Registrir-Cylinder genannt werden.

Zwischen Scheibe und Cylinder liegt eine frei bewegliche Kugel, welche mittelst einer von oben darüber greifenden Gabel hin und her bewegt werden kann. Der Berührungspunkt mit dem Cylinder beschreibt hierbei eine Erzeugende, derjenige mit der Scheibe den horizontalen Durchmesser. Es schadet jedoch nicht, wenn der Berührungspunkt nicht genau den Durchmesser, sondern eine Sehne bestreicht. Hier soll aber angenommen werden, dass er auf dem Durchmesser liegt.

Wird die Scheibe gedreht, während die Kugel ihren Mittelpunkt berührt, so wird der Cylinder nicht gedreht. Ist aber die Kugel um die Strecke y vom Mittelpunkt der Scheibe verschoben, so erhält, für eine Drehung der Scheibe um den Winkel $d\varphi$, der Cylinder eine solche Drehung, dass der Berührungspunkt die Strecke $y\,d\varphi$ beschreibt und der Cylinder sich um den Winkel $d\psi = \frac{y}{c}\,d\varphi$ dreht, wo c noch den Radius des Cylinders bedeutet.

Die Maschine arbeitet nun in folgender Weise. Der Curvencylinder wird mit der einen Hand gedreht, während die andere den Fahrstift so führt, dass er auf der Curve bleibt. Der Fahrstift, der sich auf der oberen Erzeugenden des Cylinders bewegt, ist fest verbunden mit einer horizontalen Stange, welche die Gabeln der verschiedenen Kugeln trägt. Wenn also der Fahrstift um die Strecke y verschoben ist, so sind alle Kugeln um die gleichen Strecken vom Mittelpunkt ihrer Scheiben verschoben. Ist der Curvencylinder um einen Winkel ϑ gedreht, so hat eine Zahnstange die Strecke $a \sin n\vartheta$ eine andere die Strecke $a \cos n\vartheta$ durchlaufen. Die der ersten Stange entsprechende Scheibe, deren Halbmesser b sei, hat sich daher um einen Winkel φ gedreht, so dass

$$b\varphi = a \sin n\vartheta \text{ und } b\,d\varphi = na \cos n\vartheta\, d\vartheta.$$

Die Drehung des entsprechenden Registrir-Cylinders ist also nach dem obigen für eine Drehung $d\vartheta$ des Curven-Cylinders

$$d\psi = \frac{na}{bc} y \cos n\vartheta \, d\vartheta.$$

Für eine volle Umdrehung des Curven-Cylinders ist also

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos n\vartheta \, d\vartheta = C \,.\, \psi,$$

wo C eine Constante bedeutet, welche von den Dimensionen des Instruments abhängt.

Die Übertragung der Bewegung von der Scheibe auf den Registrircylinder mittelst einer frei beweglichen Kugel ist von dem kürzlich verstorbenen Prof. *James Thomson*, Bruder Lord Kelvin's, erfunden. Sie hat den Zweck, alle bei anderen Integratoren auftretenden gleitenden Reibungen zu vermeiden. Dieser Mechanismus ist seitdem von Prof. *Hele Shaw* benutzt worden zur Construction verschiedener Integratoren; auch von Rev. *Fred. Smith* in Oxford, dessen in Abteilung I ausgestellter Integrator ohne gleitende Reibung arbeitet. Prof. Hele Shaw hat jedoch gefunden, dass seine bisher ausgeführten Instrumente an neuen Fehlern leiden. Diese rühren teilweise daher, dass die Kugel eine bedeutende Masse hat und daher bei rascher Bewegung ein bedeutendes Moment erhält, welches Gleiten verursacht; teilweise wohl auch daher, dass die Berührung der Kugel mit anderen Körpern nicht in geometrischen Punkten stattfindet. Lord Kelvin's Harmonic Analyser zeigte den Fehler, dass sich der Registrircylinder drehte, wenn die Kugel bei ruhender Scheibe hin und her bewegt wird, und zwar tritt dieser Fehler immer in demselben Sinne auf. Diesem ward dadurch abgeholfen, dass die Axen der Cylinder durch kleine Gewichte vorwärts, von der Scheibe weg, gedrückt werden.

Unter diesen Umständen scheint es zweifelhaft, ob James Thomson's Mechanismus wirklich viel mehr leistet wie Amsler's Instrumente mit Registrirrollen, welche gleichzeitig rollen und gleiten, so lange wenigstens, als glattes Papier benutzt wird oder

wenn die Rollen, wie in Coradi's Planimeter, immer auf speciell präparirten Flächen laufen.

Es scheint daher, dass die neuen zu beschreibenden Instrumente zur harmonischen Analysis, das von mir und namentlich das von Mr. Sharp angegebene, wenn sie sorgfältig ausgeführt werden, für manche praktische Zwecke ebenso brauchbare Resultate geben werden, als die *sehr viel* teurere und nicht leicht transportable Maschine von Lord Kelvin.

Neues Instrument.

Betrachten wir hier zuerst die Integrale, für welche $n = 1$ ist. Wir haben dann, wenn wir noch $t = x$, $f(x) = y$ setzen,

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos x \, dx, \qquad B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \sin x \, dx.$$

Um diese Integrale zu bestimmen, kann man die Curve $y = f(x)$ zwischen den Werten von $x = o$ bis $x = 2\pi$ auf die Oberfläche eines Cylinders vom Radius 1 zeichnen.

Diesen Cylinder denken wir uns horizontal gelegt und um seine Axe drehbar. Die obere Linie des Cylinders enthält dann in jeder Lage einen Punkt der Curve. Die Curve läuft in sich zurück. Der dem Werte $x = o$ entsprechende Punkt soll der Nullpunkt heissen. Jeder andere Punkt P der Curve ist dann durch den Wert eines x bestimmt, welcher hier als der Winkel ϑ erscheint, um den der Cylinder gedreht werden muss, um statt des Nullpunktes den Punkt P nach oben zu bringen.

Die Tangentialebene, welche den Cylinder oben berührt, wird dann horizontal liegen. Dieser Ebene erteilen wir jetzt eine horizontale einfach harmonische Bewegung rechtwinklig zur Axe, d. h. wenn der Cylinder sich um den Winkel x gedreht hat, soll die Ebene um die Strecke $z = c \sin x$ sich vorwärts bewegen, so dass nach einer vollen Umdrehung des Cylinders die Ebene in ihre Anfangslage zurückkehrt.

Der Punkt P auf der Curve beschreibt dann auf der Tangentialebene eine Curve, welche dasselbe y hat als die gegebene Curve, während die Abscisse statt x den Wert $z = c \sin x$ hat.

Ein Flächenelement der neuen Curve hat daher den Wert $y\,dz = c\,y \cos x\,dx$, und die ganze Curve schliesst die Fläche

$$U = c \int_0^{2\pi} y \cos x \, dx$$

ein. Diese Fläche dividirt durch $c\pi$ ist also gleich dem gewünschten Coefficienten A_1. Hierbei ist der Wert von c beliebig. Derselbe kann also so gewählt werden, wie es bei der Ausführung eines Instrumentes passend erscheint. Ein auf diese Betrachtungen gegründetes Instrument habe ich in folgender Weise ausgeführt. Eine der Cylinderaxe α parallele Axe β wird durch Zahnräder so mit α verbunden, dass beide gleichzeitig eine Umdrehung machen. Die Axe β trägt eine excentrische Scheibe, welche mittelst einer darüber gehenden Gabel einer horizontalen Platte die gewünschte harmonische Bewegung erteilt. Die obere Fläche dieser Platte liegt in der Tangentialebene des Cylinders. Auf der Verlängerung dieser Platte wird also die Curve beschrieben, deren Inhalt U zu bestimmen ist. Dies geschieht mittelst eines gewöhnlichen Amsler'schen Planimeters. Der Pol wird in die Platte gesetzt und bewegt sich mit ihr. Der Fahrstift wird längs eines Lineals, welches über der oberen Linie des Cylinders liegt, so bewegt, dass er immer auf der Curve bleibt, während der Cylinder gedreht wird. Dies gibt sofort U und daher A_1. Wird bei Beginn der Bewegung die excentrische Scheibe um einen rechten Winkel gedreht, so erhält man den Coëfficienten B_1 statt A_1. Um auch A_n und B_n zu bestimmen, setzen wir $n t = x$ und erhalten

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} f(t) \cos x \, dx \ .$$

Hier ist $t = x/n$. Wird die Curve $y = f(t)$ in der Richtung des t auf das n-fache ausgedehnt, so wird eine neue Curve erhalten $y = f(x)$, welche für jedes x das zugehörige y gibt. Diese Curve wird n-mal den Cylinder umschliessen und mittelst dieser können nun A_n und B_n erhalten werden. Durchläuft der Fahrstift diese Curve, so dreht sich β n-mal. Dies kann man jedoch einfacher dadurch erreichen, dass man β sich n-mal drehen lässt, während der Cylinder mit der ursprünglichen Curve sich einmal

dreht. Dies ist durch Einschalten passender Räder leicht bewerkstelligt.

Das ausgeführte Modell erlitt während der Anfertigung verschiedene Änderungen. Dadurch ward es schliesslich zu complicirt und arbeitete nicht gut. Es wäre aber leicht, ein Instrument auszuführen, welches diese Übelstände nicht zeigt. Ein Übelstand ist, dass für jeden Coëfficienten die Curve einmal mit dem Fahrstift durchlaufen werden muss.

Anderes Instrument.

Man erhält durch teilweise Integration der Integrale

$$\int_0^{2\pi} y \cos nx \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} y \sin nx \, dx$$

$$A_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \sin nx \, dy; \quad B_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx \, dy.$$

Der Mechanismus zur Ermittelung dieser Integrale wird nun ein ganz anderer. Die Anwendung einer harmonischen Bewegung ist nicht nötig. Sei die Curve $y = f(x)$ wieder auf dem Cylinder verzeichnet. Wir brauchen dann die Summe aller dy, jedes multiplicirt mit $\sin nx$ oder mit $\cos nx$, d. h. wir haben in jedem Augenblick dy zu zerlegen in zwei rechtwinklige Componenten, deren einer den Winkel nx mit dy macht. Bewegt man eine Rolle, wie sie in Amsler's Planimeter die Integration registrirt, in einer geraden Linie, während die Axe der Rolle einen Winkel ϑ mit der Geraden macht, so registrirt diese Rolle die Länge $l \sin \vartheta$, wo l die wirklich beschriebene Länge bezeichnet. Ähnlich reregistrirt eine Rolle, welche ihre Axe rechtwinklig zur ersten hat, die Länge $\pm\, l \cos \vartheta$.

Ein auf diese Principien basirtes Instrument ist das in Abt. I ausgestellte von *Henrici*. Ein Wagen, parallel der Axe des Cylinders beweglich, trägt einen Fahrstift, der die obere Erzeugende des Cylinders bestreicht. Während der Cylinder mit der einen Hand gedreht wird, führt die andere den Fahrstift längs der Curve, bei welcher Bewegung der Wagen mit bewegt wird. Der Wagen trägt ferner an einer verticalen Axe ε zwei Registrirrollen R_1

und R_2, deren Axen einen rechten Winkel einschliessen. Diese rollen auf einer horizontalen Platte und zwar immer auf derselben. Diese kann daher aus passendem Material hergestellt werden. Wird der Cylinder um den Winkel x gedreht, so dreht sich die Axe ε durch passenden Mechanismus um den Winkel nx. Bei einer kleinen Drehung des Cylinders um den Winkel dx bewegt sich der Fahrstift um die Strecke dy parallel zur Cylinderaxe. Die Registrirrollen drehen sich daher um die Winkel dy cos nx und dy sin nx. Sie geben also während einer vollen Drehung des Cylinders die Integrale $\int_0^{2\pi} dy \,.\, \cos nx$ und $\int_n dy \;\sin nx$, und daher sofort die Coëfficienten A_n und B_n.

Hierbei ist zu bemerken, dass die Registrirrollen nur dann richtige Resultate geben, wenn ihre Berührungspunkte in der geometrischen Axe von ε liegen, oder wenn die Ebenen dieser Rollen durch ε gehen. Sonst ist eine Correctur nötig. Wenn ε sich einmal dreht, so wird die Rolle einen Kreis durchrollen, welcher eine Ablesung C ergibt. Diese ist durch Umdrehung um ε leicht zu ermitteln. Von der Ablesung der Rolle nach Umfahrung der Curve ist also nC abzuziehen.

Es wäre nicht schwierig, mit dem Wagen statt einer Axe ε eine Reihe ε_1, ε_2, ε_3 . . . solcher Axen zu verbinden, welche sich 1, 2, 3 . . . mal drehen, wenn der Curvencylinder eine Umdrehung gemacht hat. Trägt jede dieser Axen ein Paar Registrirrollen, so ergibt deren Ablesung sofort die entsprechenden Coëfficienten A_n und B_n.

In dem ausgestellten Modell ist die Übertragung der Drehung des Cylinders auf die Axe ε in folgender Weise hergestellt. Der Cylinder trägt auf der Verlängerung seiner Axe eine Scheibe V, welche auf einer horizontalen Scheibe H ruht. Die Umdrehung des Cylinders bewirkt daher auch eine Umdrehung der Scheibe H. Um diese Drehung der Scheibenaxe auf die Axe ε der Registirrollen zu übertragen, sind beide durch zwei Gelenkstangen A_1 A mit einander verbunden, welche in B durch ein Charnier verbunden sind. Die Enden können sich frei um ε respective um die Scheibenaxe drehen. Diese Axen sowie die Charnieraxe

tragen, fest mit ihnen verbunden, Scheiben, um welche endlose Stahlbänder gelegt sind. Schematische Zeichnung des Apparates vergl. Teil II pag. 212.

Es ist für gute Arbeit des Instrumentes nötig, dass die letzt erwähnten drei Axen parallel sind. Das Modell leidet hier an dem Fehler, dass diese Bedingung nicht genau erfüllt ist.

Um endlich zu bewirken, dass Axe s n Umdrehungen macht bei einer Umdrehung des Cylinders, kann die oben erwähnte Scheibe V auf der Axe des Cylinders verschoben werden, so dass sie auf einem kleineren oder grösseren Kreise der Scheibe H rollt.

Statt das die Curve tragende Papier auf dem Cylinder zu befestigen, kann man es lose auf den Cylinder legen, wenn eine Vorrichtung getroffen wird, mittelst welcher der Cylinder das Papier während seiner Drehung mit sich zieht. Dies ist in Sir Wm. Thomsons Maschine der Fall.

Man kann nun aber auch den Process umkehren, indem man das Papier auf ein Zeichenbrett befestigt und den Cylinder auf dem Papier rollen lässt.

Man könnte dies auf folgende Weise realisiren. Ein Wagen läuft auf drei Rädern. Das eine ist nur ein Laufrad. Die beiden andern haben den Durchmesser des Curvencylinders und laufen in Richtung der x-Axe. Die zu analysirende Curve muss also ihre Basislänge gleich dem Umfang dieser Räder haben. Der Wagen trägt ferner die Axe s mit den Registrirrollen, welche durch die Wagenaxe getrieben wird, ähnlich wie im ausgestellten Modell. Eine Bewegung des Fahrstiftes treibt den Wagen um die gleiche Strecke in derselben Richtung vorwärts. Eine Bewegung in Richtung der y dagegen lässt den Wagen ruhen, treibt aber die Axe s mit den Registrirrollen auf dem Wagen entlang. Die Registrirrollen selbst laufen dabei auf einer präparirten Fläche.

Bei einer solchen Anordnung hat man den Vorteil, dass man nur mit einer Hand zu arbeiten hat, da die Bewegung des Fahrstifts längs der Curve den ganzen Mechanismus in Bewegung setzt. Dies wäre beim Gebrauch ein grosser Gewinn.

Sharp's Analyser.

Mr. Sharp hat jedoch ganz kürzlich eine Modification des von mir ausgestellten Instruments ersonnen, welche einen einfacheren Mechanismus hat und, wenn richtig ausgeführt, nicht nur gute Resultate erwarten lässt, sondern auch leichter zu handhaben sein wird.

Ein Wagen läuft hier in Richtung der y, geführt in ähnlicher Weise wie einer von Coradi's Planimetern, oder wie dessen Integraph. Er konnte vielleicht besser auf einer Schiene laufen wie Amsler's Integrator. Dieser Wagen trägt in Richtung der x eine Zahnstange, welche in dieser Richtung sich frei hin und her bewegen kann. Mit dieser verbunden ist der Fahrstift. Ein auf dem Wagen ruhendes Zahnrad Z greift in die Zahnstange ein und treibt direct oder durch eingeschaltetes Räderwerk die Axe ε mit den zwei Registrirrollen. Letztere laufen auf dem Papier oder auf einer präparirten Platte, welche an der Seite der gezeichneten Curve auf dem Papier ruht.

Wird der Fahrstift in der Richtung der x um die Strecke x bewegt, so bleibt der Wagen in Ruhe, die Zahnstange verschiebt sich um die Länge x und dreht das Rad um einen Winkel x, falls der Radius von Z der Einheit gleich ist. Eine Axe ε, welche n Umläufe für einen des Zahnrades macht, dreht sich also um den Winkel n x. Die Registrirrollen registriren hierbei nichts. Wird jetzt der Fahrstift und mit ihm der Wagen um die Strecke dy verschoben, so registriren die Rollen die Werte, welche $dy \cos nx$ und $dy \sin nx$ proportional sind.

Ist nun die Basis der zu analysirenden Curve von der Länge 2π, so geben die Registrirollen die Werte der Integrale

$$\int_0^{2\pi} dy \cos nx \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} dy \sin nx$$

und daher die Werte von A_n und B_n.

Ist die Basis der Curve, also die Periode von $y = f(x)$, nicht gleich 2π, so hat man sie dem Umfange des Rades Z gleich zu machen, oder vielmehr die Curve in der Richtung der x so zu dehnen, dass ihre Periode dem Umfange des gegebenen Zahnrades gleich wird.

Während der Fahrstift die Curve durchläuft, bewegt sich der Wagen bei wachsendem y vorwärts, bei abnehmendem rückwärts. Die Zahnstange aber geht immer vorwärts in Richtung des x welches immer wächst, da ja y eine einwertige Function von x sein muss, wenn eine Entwickelung in eine Fourier'sche Reihe möglich ist.

Dieser Umstand ist sehr wichtig für die leichte Handhabung des Instruments. Wm. Sharp schlingt um die Axe ε eine Schnur, führt diese horizontal über eine Rolle und spannt sie durch ein herabhängendes Gewicht, welches die Zahnstange in Richtung der x zu bewegen strebt. Es ist so zu reguliren, dass es der Reibung im Räderwerk fast das Gleichgewicht hält. Der Fahrstift kann also sehr leicht in der x-Richtung bewegt werden. Man kann daher, ohne die Leichtigkeit der Handhabung zu zerstören, eine Anzahl Axen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ anbringen, welche sich während einer Umdrehung des Zahnrades ein, zwei, drei ... mal drehen. Wenn jede dieser Axen sodann ein Paar Registirrollen trägt, so ergibt ein einmaliges Durchlaufen der Curve sofort die Coëfficienten erster, zweiter, dritter ... Ordnung.

Lässt man alle Registrirrollen auf einer präparirten Platte laufen, welche auf dem Papier ausserhalb der zu analysirenden Curve liegt, so dürfte die Genauigkeit des Instruments für die meisten praktischen Zwecke vollauf genügend sein.

Der Coëfficient A_0 ist nicht auf diese Weise bestimmbar. Sein Wert ist

$$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \, dx$$

Er gibt den Mittelwert aller y und erfordert die Ermittelung der Fläche zwischen der x-Axe und der Curve $y = f(x)$. Sie kann also mit Hilfe eines gewöhnlichen Planimeters gefunden werden.

In Sir Wm. Thomson's Analyser gibt einer der Registrircylinder sofort dies Integral. Mr. Sharp hat ebenfalls eine Vorrichtung angegeben, welche denselben Zweck erreicht.

Hat man die Coëfficienten A_n, B_n durch das Instrument gefunden, so bleibt noch übrig die Amplitude und Phase zu be-

stimmen, welche die durch $y = A_n \cos nx + B_n \sin nx$ bestimmten Curven besitzen. Setzt man

$$A_n \cos nx + B_n \sin nx = a_n \cos (nx + \alpha)$$

so ist

$$a^2_n = A^2_n + B^2_n \text{ und } \tan \alpha = \frac{B_n}{A_n}, \sin \alpha = \frac{B_n}{a_n}.$$

Zur Bestimmung dieser Grössen a_n und $\sin \alpha$ hat Gen.-Lieut. *Strachey* einen Rechenschieber construirt, welcher in Abteilung I ausgestellt ist.

Man erhält also schliesslich die Reihe

$$\eta = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos (x + \alpha_1) + a_2 \cos (2x + \alpha_2) + \ldots$$

Ist diese erhalten, so ist es von Interesse, alle durch die verschiedenen Glieder einzeln repräsentirten, einfach harmonischen Curven in richtiger Lage auf der Basis der gegebenen Curve zu verzeichnen. Hierzu dient der gleichfalls in Abteilung I ausgestellte Apparat des Gen.-Lieut. *Strachey*, durch welchen einfach harmonische Curven von gegebener Amplitude und Phase gezeichnet werden können.

Zweiter Teil.

I. Abteilung.

Arithmetik; Algebra, Functionentheorie; Integralrechnung.

Erster Abschnitt. Arithmetik.

A. Rechenapparate.

1 **Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe etc.** von **J. H. Lambert**, Augsburg 1772, und **Zusätze zu den logarithmischen Tabellen etc.** von **J. H. Lambert**, Berlin 1770.
Ausgestellt von Prof. **Ch. A. Vogler**, Berlin.

2 **Sammlung von Rechenschiebern und Anlegemasstäben** aus dem **Math.-mech. Institut von Dennert & Pape**, Altona.

3 **Rechenschieber** von **Albert Nestler**, Lahr in Baden.

Preise im Einzelverkauf:

Rechenschieber aus *Buchsholz* in den Längen	21 cm	26 cm	52 cm
ohne Läufer	ℳ 5.—	ℳ 5.—	ℳ 18 —;
desgl. mit Läufer	„ 6.—	„ 6.—	„ 21.—;
desgl. mit Läufer und *Lupe*	„ 12.—	„ 12.—	„ 30.—;
Rechenschieber mit *Celluloidauflage* in den Längen		26 cm	52 cm
ohne Läufer		ℳ 6.—	ℳ —
desgl. mit Läufer		„ 7.50	„ 36.—.

4 **Rechenschieber** von **A. Hasselblatt**, Prof. am technologischen Institut in St. Petersburg. Veröffentlicht 1890.

Dieser Rechenschieber ist aus vier auf einander geleimten und zusammengepressten Lagen Carton hergestellt und durch einen wasserdichten Überzug gegen die Einflüsse der Wärme und Feuchtigkeit geschützt. Er ist kürzer, aber breiter und dünner als die üblichen Rechenschieber aus Holz (208 × 71 × 5 mm statt 260 × 32 × 10 mm). Die aus zwei Cartonlagen bestehende „Zunge“ trägt an beiden Rändern dieselbe, einmal wiederholte, logarithmische Teilung von 100 mm Länge, während von den benachbarten Rändern des „Stabes“ („Lineales“) der

obere eine ebensolche, der untere eine logarithmische Teilung im doppelten Masstabe hat. Dieser mittlere Teil ist demnach wie die Vorderseite eines gewöhnlichen Rechenschiebers *ohne Läufer* eingerichtet. Die Teilungen für sin, tang und log, welche sich bei anderen Rechenschiebern gewöhnlich auf der Rückseite der Zunge befinden, sind auf der Vorderseite des Stabes angebracht und noch um eine Vorrichtung zur Bestimmung der Cuben und Cubikwurzeln vermehrt. Letztere besteht aus einer, die ganze Länge einnehmenden, logarithmischen Teilung und einer ihr gegenüber gestellten, dreimal wiederholten logarithmischen Teilung mit nur ein Drittel so grosser Längeneinheit. Die abgeschrägten Kanten des Rechenschiebers enthalten Teilungen in Millimeter und Sechszehntel Zoll engl., auf der Rückseite stehen mathematische und physikalische Constanten, Tabellen für Massverwandlungen, Gewichtsberechnungen u. s. w.

(Preis in Russland 2½ Rubel.)

(Hasselblatt, Mehmke.)

5 **Logarithmisch-graphische Rechentafel** von Steuerrat **Scherer** in Cassel.

Die Tafel besteht aus einer Grundplatte von Stahlblech und einem Schieber von Glimmer. Auf der Grundplatte mit den Abmessungen 33×21 cm sind in 20 parallelen Linien die 10 Stücke einer logarithmischen Teilung von 1,5 m Länge zweimal von unten nach oben abgetragen. Um in allen Lagen des Schiebers ablesen zu können, ist in der Verlängerung jedes Stückes das nächstfolgende noch einmal angetragen. Eine ebenso grosse logarithmische Teilung ist in Streifen von 5 mm Breite und 5 mm Zwischenraum auf die Unterseite des Schiebers gedruckt, der 18 × 12 cm Grösse hat. Auf der Grundplatte sind rechts und links noch zwei gewöhnliche Masstäbe von je 15 cm mit Teilstrichen von 1—100 angebracht, auf welchen man die 2.—4. Stelle der Mantisse des Logarithmen irgend einer Zahl der Tafel ablesen kann, während die erste Stelle unter der betreffenden Reihe der Teilung angeschrieben ist. Der Apparat entspricht somit einem Rechenschieber von 3 m Länge und einer vierstelligen Logarithmentafel. Zur Berechnung von l sin α und l cos α — α in Graden neuer Teilung ausgedrückt —, dient ein besonderer Sinus-Schieber. An der Innenseite des beigegebenen Umschlages sind an zwei senkrechten Linien die Wurzelzahlen von 0,00 bis 100,00 und ihnen gegenüber die Quadratzahlen masstäblich aufgetragen.

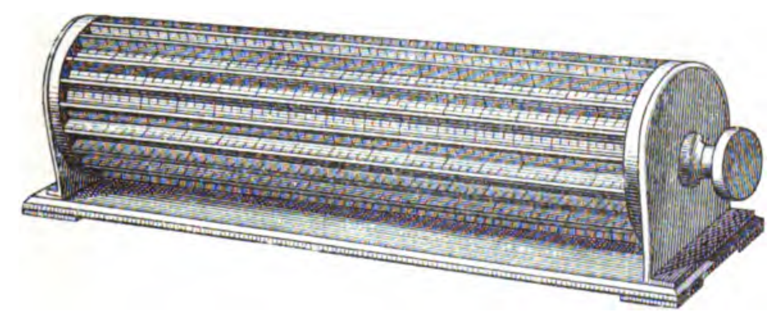
Preis (ohne Sinus-Schieber) M. 12—, Sinus-Schieber (Kreis 400°). M. 5—

(Scherer.)

6 **Thacher's Calculating Instrument** (cylindrical slide-rule). Verfertigt und ausgestellt von **W. F. Stanley**, Math. mech. Institut, London.

Das 1881 patentirte Instrument beruht auf denselben Principien, wie der logarithmische Rechenschieber und wird in entsprechender Weise gehandhabt. Die einmal wiederholte, mit A bezeichnete Hauptteilung ist 30 engl. Fuss = 9,144 m lang und in zwanzig gleich lange Stücken zer-

legt, welche auf der Oberfläche eines Metall-Cylinders parallel mit dessen Axe untergebracht sind. Dieser Cylinder entspricht dem „Schieber" (der „Zunge") eines Rechenstabes. Aus zwei, durch zwanzig parallele Metall-Rippen verbundenen Ringen ist ein durchbrochener Hohlcylinder gebildet, der innerhalb zweier festen Ringe um seine eigene (wagerechte) Axe gedreht werden kann und in welchem der erstgenannte Cylinder sich verschieben und drehen lässt. Der Querschnitt einer jeden Rippe



ist ein gleichschenkliges Dreieck mit nach aussen gekehrter Spitze. Die schiefen Seitenflächen der Rippen tragen zwei logarithmische Teilungen, von welchen die mit B bezeichnete an A grenzt und mit A congruent ist, die mit C bezeichnete, weiter aussen angebrachte, den doppelten Masstab von B hat und demnach zu jeder in B aufgesuchten Zahl die Quadratwurzel liefert. Die Teilungen sind auf Pergament gedruckt.

Preis M. 150.— Im übrigen sei hier und bei den folgenden Apparaten *Stanley's* auf dessen Preisliste verwiesen

(Mehmke.)

7 **Sheppard's slide rule for cubing quantities,** ausgestellt von **W. F. Stanley,** math.-mech. Institut, London.

Rechenstab mit zwei neben einander gleitenden Schiebern zur augenblicklichen Bestimmung eines Productes aus drei Factoren.

24" duodecimal rule (für engl. Fuss und Zoll), aus Buchsbaumholz M. 24—;

11" decimal rule (für metrisches Mass). aus Buchsbaumholz M. 24—.

8 **Universal-Proportion-Tables,** Rechenschieber in Rost- bez. in cylindrischer Form nach **J. D. Everett** und **Hannyngton**. Ausgestellt von Prof. **J. D. Everett,** F. R. S., Queens College, Belfast, Ireland.

1. Everett's Table. Ein Rechenschieber, von dem jeder der beiden Teile aus einer Anzahl paralleler Streifen besteht. Der bewegliche Teil greift dabei in die Zwischenräume des festen Teiles ein. Die Tafeln sind aus Carton (Bristol board) mit Überdruck von Kupferplatten. Preis 20 Mark.

2. Dieselbe, construirt nach Major General *Hannyngton* aus Holz mit Abänderungen, die durch das Material bedingt sind. Um die doppelte

Scala auf dem Schlitten zu vermeiden, ist die Scala auf dem festen Stück zum Teil vierfach, ein beigefügter Schlitten gestattet die Berechnung von Quadraten und Quadratwurzeln. Preis in der ausgestellten Grösse ungefähr 60 Mark. Die Rechenschieber werden auch in grösserem und kleinerem Masstabe ausgeführt.

3. Dieselbe in Cylinder-Form aus Holz. Die Scala auf dem festen Teile ist doppelt wie in der gewöhnlichen Form, die auf dem Schlitten einfach. Nicht zum Verkaufe construirt.

Die Modelle 1 und 3 wurden von Everett ungefähr 1865 ausgeführt und sind im Philosophical Magazine beschrieben. Die Anordnung von Hannyngton datirt ungefähr 10 Jahre später.

(Everett.)

9 **Prof. Fuller's calculating slide rule**, ausgestellt von **W. F. Stanley**, math.-mech. Institut, London.

Die auf einem Cylindermantel in einer Schraubenlinie aufgetragene logarithmische Teilung ist 500 engl. Zoll = 12,7 m lang, das Instrument entspricht also einem Rechenschieber von 25,4 m Länge.

Preis M. 60—.

10 **Alex. E. M. Boucher's Calculator**, ausgestellt von **W. F. Stanley**, math.-mech. Institut, London.

Die äussere Form ist diejenige einer Remontoir-Taschenuhr. Die auf 4 concentrischen Kreisen untergebrachte logarithmische Teilung hat eine Gesamtlänge von 15 engl. Zoll = 38 cm, weshalb das Instrument an Genauigkeit einem Rechenschieber von 76 cm Länge gleichkommt. Auf der Rückseite sind Teilungen für goniometrische Functionen und Logarithmen vorhanden.

Preis in vernickeltem Neusilbergehäuse M. 31,60.

11 **Weber's Rechenkreis** von **R. Weber**, Prof. Forstakademie Aschaffenburg (jetzt Univ. München). Ausgestellt von Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt.

Zwei niedrige Cylinder von etwa 13 cm Durchmesser, die unabhängig von einander um ihre gemeinsame Axe gedreht werden können, tragen auf ihren Umfängen beide dieselbe logarithmische Teilung. Bei aufrechter Stellung der Ziffern ist die Axe senkrecht. Der Gebrauch ist derselbe, wie bei Sonne's Rechenscheibe.

12 **Rechenscheibe** von Geh. Baurat Prof. **Ed. Sonne**, Darmstadt. Jahr der Veröffentlichung 1864. Hergestellt von **Landsberg & Wolpers**, Hannover.

Eine feststehende Kreisscheibe von etwa 14 cm Durchmesser ist von einem um sie drehbaren Kreisringe eingeschlossen. Der Rand der Scheibe und der ihn berührende innere Rand des Ringes sind mit einer den ganzen Umfang ausfüllenden logarithmischen Teilung versehen. Die Scheibe trägt noch einen concentrischen, gleichmässig geteilten Kreis,

welcher zur Bestimmung der Logarithmen gegebener Zahlen dient. Ein um den Mittelpunkt der Scheibe drehbarer Zeiger vermittelt den Übergang von irgend einer der drei Teilungen zu einer andern. Der Gebrauch ist demjenigen des Rechenschiebers ähnlich.

13 **Rechenscheibe mit Kennzifferzählwerk,** von demselben. Hergestellt von **Landsberg & Parisius,** Hannover.

Durchmesser der Scheibe 11,5 cm. Der gleichmässig geteilte Kreis fehlt. Ein Zählwerk gibt die Zahl der vollen Umdrehungen an, welche der Zeiger während einer nur aus Multiplicationen und Divisionen zusammengesetzten Rechnung gemacht hat und dient so zur Bestimmung der Stellenzahl des Ergebnisses der Rechnung.

14 **A. Beyerlen's drehbarer Rechenschieber (Rechenrad),** D.R.P. Nr. 31889, von **A. Beyerlen & Co.** in Stuttgart.

Zwei neben einander befindliche, mittelst zweier Handscheiben um ihre gemeinsame, wagerechte Axe drehbare Räder von 125 mm Durchmesser tragen auf ihren Stirnen an den inneren Kanten eine logarithmische, an den äusseren eine gleichmässige Teilung mit dem Umfange eines Rades als Längeneinheit. Beim Drehen der kleineren Handscheibe dreht sich nur das Rad rechts, beim Drehen der grösseren bewegen sich beide Räder übereinstimmend, so dass ihre gegenseitige Stellung unverändert



bleibt. An einem festen Träger befindet sich vorne, an den Rädern anliegend, ein Stück Gelatinepapier mit einer zur Axe parallelen roten Linie. Um $x = \frac{a}{b} c$ zu finden, dreht man erst beide Räder zusammen und dann das rechte Rad allein so, dass die Stelle a der logarithmischen Teilung links, und die Stelle b derjenigen rechts unter die rote Linie

kommen, dann wieder beide zusammen, bis die Stelle c der logarithmischen Teilung rechts unter der roten Linie erscheint, dann steht links hiervon das Ergebnis. Die beiden äusseren Teilungen dienen zum Addiren und Subtrahiren wie auch in Verbindung mit den inneren Teilungen zur Bestimmung des Logarithmus einer gegebenen Zahl oder umgekehrt der Zahl zu einem gegebenen Logarithmus. Die Teilungen sind auf Papier gedruckt.

Preis ℳ 20.—.

15 **Zwei Rechenschieber zur Berechnung specieller trigonometrischer Formeln** von General-Lieut. **R. Strachey**, London.

Der erste dieser Rechenschieber dient zur Berechnung der Formeln:

$$\frac{p}{q} = \text{tg}\, x$$

$$P = \frac{p}{\sin x}$$

(Vgl. den Schluss des Aufsatzes von *Henrici* im ersten Teil des Kataloges.

Der zweite dient zur Berechnung der Formel:

$$h = \frac{\sin a}{\sin (a' - a)}\, b. \,\text{ctg}\, z.$$

16—20 **Serie von Rechenschiebern, speciell für technische Zwecke**, ausgestellt von **W. F. Stanley**, math.-mech. Institut, London.

16 **Ganga Ram's slide rule.**

No. 1. Zur Bestimmung der Dimensionen von Haupt- und Querbalken für alle Spannweiten; M. 21—.

No. 2. Zur Berechnung der Stärken von Stützmauern unter den verschiedenen Bedingungen; M. 12—.

No. 3. Zur Berechnung der Spannungen in Trägern aller Formen und Spannweiten; M. 16—.

17 **Hudson's horse power scale** zur Berechnung der Leistungen und Dimensionen von Dampfmaschinen.

Aus Buchsbaumholz in Futteral M. 12,60; aus Carton in Lederfutteral M. 6—.

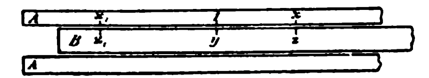
18 **Hudson's computing scale** for pumps, zur Berechnung einfach und doppelt wirkender Pumpen, aus Carton in Futteral M. 6—.

19 **Hudson's computing scale** for girders, beams and shafts, zur Berechnung von Trägern, Balken und Wellen, aus Carton in Futteral M. 6—.

20 **Froude's displacement slide rule.** M. 40—.

Näheres vergleiche den *Specialkatalog* von Stanley.

21 Modell des doppellogarithmischen Rechenschiebers von Ing. **F. Blanc** in Hamburg.



Derselbe dient hauptsächlich zur mechanischen Bestimmung von Potenzen und Wurzeln mit beliebigen Exponenten, sowie von Logarithmen, die zu einer beliebigen Basis gehören.

Die beiden Ränder (A) des Stabes tragen übereinstimmende logarithmische Teilungen, wie solche am gewöhnlichen Rechenschieber sich finden, so dass allgemein die Entfernung des mit x bezeichneten Teilstriches von dem mit 1 bezeichneten gleich log x Längeneinheiten ist. Die Ränder des Schiebers (B) dagegen sind mit „doppellogarithmischen“ Teilungen versehen. Bei der oberen dieser Teilungen nämlich beträgt die Entfernung des Teilstriches, an welchem die Zahl z steht, von dem Teilstriche 10 allgemein log log z Längeneinheiten, wobei naturgemäss immer $z > 1$ ist; bei der unteren ist als Basis der Logarithmen nicht 10, sondern $\frac{1}{10}$ und als Anfang der mit 0,1 bezeichnete Punkt genommen, so dass hier die an den Teilstrichen stehenden Zahlen alle < 1 sind und überdies jede von ihnen gleich dem reciproken Werte der senkrecht über ihr auf der oberen Teilung stehenden Zahl ist. Zur Abkürzung sind bei den Schieberteilungen die ganzzahligen Potenzen von 10 mit römischen Ziffern bezeichnet worden; so hat man für I, II, III, . . . und -I, -II, -III . . . zu lesen: 10, 100, 1000 . . . und 0,1, 0,01, 0,001, . . .

Stehen nun bei irgend einer Stellung des Schiebers den Zahlen x und x_1 einer Teilung A die Zahlen z und z_1 der angrenzenden Teilung B gegenüber, dann ist offenbar

$$\log x - \log x_1 = \log\log z - \log\log z_1,$$

woraus die fundamentale Beziehung

$$\sqrt[x]{z} = \sqrt[x_1]{z_1} \qquad \text{oder auch} \qquad z^{x_1} = z_1^{x}$$

folgt. Sind also von vier in dieser Beziehung stehenden Zahlen drei gegeben, so kann die vierte abgelesen werden, nachdem der Schieber in die richtige Stellung gebracht ist. Wird insbesondere $x_1 = 1$ genommen und die gegenüberstehende Zahl y genannt, so ist

$$z = y^x,$$

woraus sich folgende Regeln ergeben: 1) Um die Potenz y^x zu berechnen, suche man die Basis auf dem Schieber, stelle sie der 1 der angrenzenden Teilung A gegenüber, suche auf letzterer Teilung den Exponenten x, dann steht diesem gegenüber das Ergebnis; 2) um die Wurzel

$$\sqrt[x]{z}$$

zu berechnen, suche man die Basis z auf dem Schieber, stelle sie dem

Wurzelexponenten x auf der benachbarten Teilung A gegenüber, dann kann gegenüber dem Striche 1 der letzteren Teilung das Ergebnis abgelesen werden; 3) um den Logarithmus der Zahl z für die Basis y zu berechnen, suche man die Basis auf dem Schieber, stelle sie der 1 auf der angrenzenden Teilung A gegenüber, dann findet sich das Ergebnis gegenüber dem Teilstriche z des Schiebers. Behufs Bestimmung natürlicher Logarithmen ist ein besonderer Teilstrich für die Zahl e angebracht. Der Schieber hat in der Mitte noch zwei Teilungen für die halbe Summe und halbe Differenz je zweier senkrecht über einander stehenden Zahlen seines oberen und unteren Randes. Mit Hilfe derselben können auf Grund der Regel 1) die Werte der Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\,(y^x + y^{-x}) \text{ und } \tfrac{1}{2}\,(y^x - y^{-x}),$$

und wenn man y = e nimmt, die Werte der hyperbolischen Functionen Cof x und Sin x gefunden werden.

(Blanc, Mehmke.)

22 **Réglettes calculatrices** von **H. Genaille** und **Ed. Lucas**, Paris 1885, ausgestellt von Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt.

a. Les *réglettes Népériennes*, neue Ausgabe der von Neper 1617 beschriebenen, auf Peter Apian's Multiplicationsmethode beruhenden Rechenstäbchen, welche die Multiplication mit einziffrigen Zahlen auf eine Addition zurückführen;

b. les *réglettes multiplicatrices*, stellen eine Vervollkommnung der Neper'schen Rechenstäbchen dar, indem bei ihrer Benützung die bei letzteren noch erforderliche Addition in Wegfall kommt;

c. les *réglettes multisectrices*, von ähnlicher Einrichtung wie die vorhergehenden; sie liefern durch ein mechanisches Verfahren den Quotienten und Rest bei der Division einer beliebigen Zahl durch eine einziffrige.

(Mehmke.)

---

23 **Rechenmaschine von Chr. L. Gersten** (von 1733 bis 1744 Professor der Mathematik in Giessen, erfunden 1722, im Besitz und ausgestellt vom **Grossherzogl. Hessischen Museum** in Darmstadt.

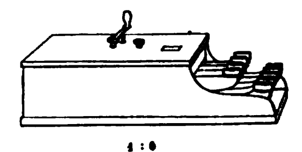
Die Maschine dient zum Addiren und Subtrahiren. Man stellt den einen Summanden resp. den Minuenden durch Drehen der Zifferscheiben über den vorhandenen senkrechten Schlitzen in der oberen resp. unteren wagerechten Reihe von Schaulöchern ein, die zu addirende resp. subtrahirende Zahl dagegen mit Hilfe von Schiebern in den genannten, seitlich mit Zähnen versehenen Schlitzen und bewegt hierauf jeden der vorhandenen Elfenbeinknöpfe senkrecht herunter, so weit es geht, und wieder zurück, dann erscheint in den oberen resp. unteren Schaulöchern die Summe resp. Differenz. Die addirte resp. subtrahirte Zahl zeigt sich in einer dritten wagerechten Reihe von Schaulöchern.

(Mehmke.)

24 **Webb's adder.** Additionsmaschine, ausgestellt von Ingenieur **A. Beyerlen** Stuttgart.

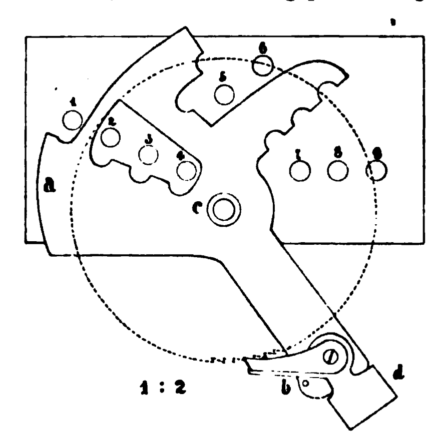
25 **Additionsmaschine** von **Max Mayer** D. R. P. Nr. 44398. Gefertigt von Mechaniker **A. Barthelmes,** München.

Die Maschine dient zur Addition grösserer Zahlenreihen. Jede der neun vorhandenen Tasten bewegt beim Niederdrücken den Bügel a und



1 : 6

mittelst des an diesem angebrachten Schaltzahnes b das mit 100 Zähnen versehene, in der Zeichnung punktirt angedeutete Zahlenrad. Gleichzeitig wird einer der mit 1—9 bezeichneten Stifte gehoben. Dadurch, dass der Bügel an diesen stösst und stehen bleibt, beschränkt sich die Bewegung des Zahlenrades auf so viel Zähne, als die Ziffer der niedergedrückten Taste angibt. Das Zahlenrad wird in seiner neuen Stellung festgehalten, während Bügel, Stift und Taste in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren. Ein Rädchen zählt die Umdrehungen des Zahlenrades und gibt so die Hunderter an. Sind mehrziffrige Zahlen zu addiren, so addirt man zuerst die Einer, dann unter Berücksichtigung des Uebertrages die Zehner u. s. w. Die Nullstellung erfolgt durch Drehung der Kurbel und des im Deckel angebrachten Knopfes.



1 : 2

Preis im Einzelverkauf M. 50.

(M. Mayer, Mehmke.)

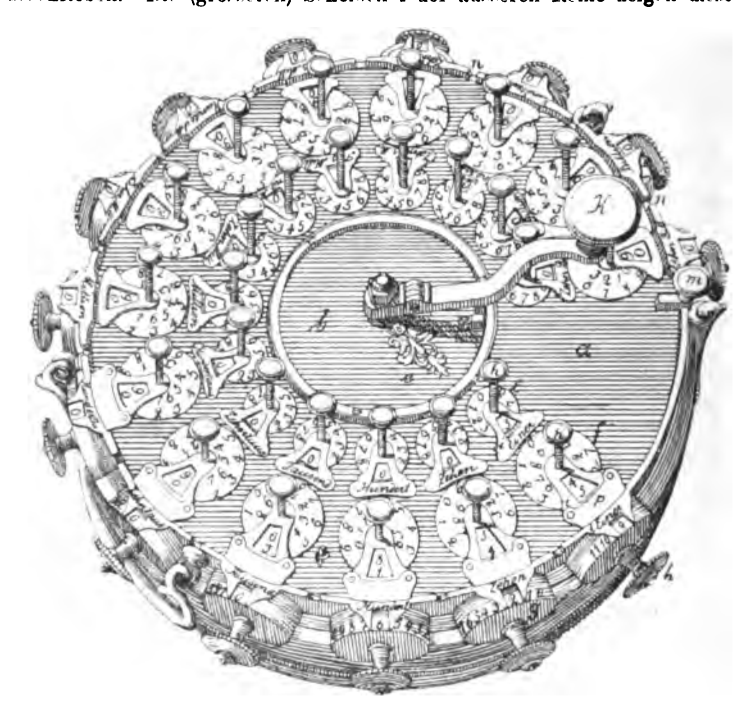
---

26 **Hahn'sche Rechenmaschine,** nach der Erfindung von Pfarrer **Hahn** in Echterdingen, ausgeführt 1809 von dessen Sohn, dem k. württembergischen Hofmechaniker **Hahn** in Stuttgart. Im Besitze und ausgestellt von Sr. Durchlaucht **Wilhelm, Herzog von Urach, Graf von Württemberg** in Stuttgart.

Die Maschine (in Cylinderform) ist das vierte Exemplar der Hahn'schen Maschinen; sie gestattet Berechnungen bis zu zwölf Stellen und ist noch jetzt in vollständig gangbarem Zustande.

27 **J. H. Müller's Rechenmaschine,** erfunden 1782 von Ingenieurhauptmann **J. H. Müller** in Giessen, ausgeführt in Darmstadt 1783. Im Besitz und ausgestellt vom **Grossherz. Hessischen Museum** in Darmstadt.

Das cylindrische Gehäuse von vergoldetem Messing hat ungefähr 28,5 cm im Durchmesser und 9,5 cm Höhe. Der wagerechte Deckel besteht aus dem drehbaren äusseren Ringe a und dem unbeweglichen kreisförmigen Teile b in der Mitte. Auf dem Ringe a befinden sich in zwei concentrischen Kreisen zwei Reihen von je 14 emaillirten Zahlenscheiben. Die (kleineren) Scheiben e der inneren Reihe sind mit den Ziffern 0, 1 . . . 9 beschrieben. Die (grösseren) Scheiben f der äusseren Reihe zeigen diese



Ziffern zweimal, schwarz am Umfange und rot in einem inneren Kreise, und zwar letztere in verkehrter Ordnung, so dass jede schwarze Ziffer mit der im gleichen Halbmesser stehenden roten die Summe 9 ergibt. An der unbeweglichen, gekrümmten Seitenwand des Gehäuses befinden sich ebenfalls 14 Zahlenscheiben g, welche auf ihrem emaillirten breiten Rande die Ziffern 0, 1 . . . 9 tragen, die 6 ersten Scheiben rechter Hand auch noch die Ziffern 10 und 11. Jede Zahlenscheibe kann mittelst eines Knopfes h gedreht werden, bis irgend eine gewünschte Ziffer in dem zu dieser Scheibe gehörigen „Fenster“ i erscheint. Um zwei Zahlen zu addiren, (bezw. von einander zu subtrahiren) setzt man die eine (bezw.

den Minuendus) mittelst schwarzer (roter) Ziffern auf den Scheiben f, die andere mittelst der Scheiben g zusammen und dreht die Kurbel K einmal herum, dann zeigt sich die Summe (Differenz) in schwarzen (roten) Ziffern auf den Scheiben f. Die Multiplication wird ausgeführt, indem man die Zahlenscheiben f alle auf schwarze Nullen, die Scheiben g auf den Multiplicandus stellt, hierauf die Kurbel so oft dreht, als der Multiplicator Einer hat, (wobei der auf dem inneren Teile b des Deckels befestigte Zeiger c auf die Einer-Scheiben der Zahlenreihen e und f weisen muss), dann unter Heben der Falle m den Ring a dreht, bis der Zeiger c auf die Zehner-Scheiben des Ringes weist und die Falle in den folgenden Einschnitt n kommt, nun die Kurbel so oft dreht, als der Multiplicator Zehner hat u. s. w. Es bildet sich hierbei der Multiplicator auf den Zahlenscheiben c der inneren Reihe. Bei der in einer wiederholten Subtraction bestehenden Division wird der Dividendus mit roten Ziffern auf die Scheiben f, der Divisor auf die Scheiben g gebracht; der Quotient erscheint auf den Zahlenscheiben e der inneren Reihe.

Wird die Maschine gezwungen, eine Zahl von einer kleineren abzuziehen, so ertönt ein Glöckchen; ebenso, wenn man eine Summe oder ein Product bilden will, das zu gross ist, um von der Maschine noch dargestellt werden zu können. Zum Zwecke des Rechnens mit benannten Zahlen können die 6 ersten Zahlenscheiben f rechter Hand herausgenommen und durch solche ersetzt werden, die anderen Grundzahlen, als 10, z. B. 4, 6, 9, 12, entsprechen. Die Elfenbeintäfelchen p dienen dazu, um darauf die Benennungen der Einheiten zu schreiben. (Mehmke.)

28 **Beireis'sche Rechenmaschine**, ausgestellt von Geh. Reg.-Rat Prof. **Reuleaux**, Techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg.

Die Maschine hat einer der Sammlungen des Hofrates und Prof. *Beireis* in Helmstätt (geboren 1730, gest. 1803) angehört und ist durch den Aussteller von dem Besitzer eines Teiles des Nachlasses erworben worden. Die Maschine ist verschieden von der Hahn'schen sowohl bezüglich des Schaltwerkes als der Zehner-Übertragung. Ihre Bauart ist nicht nachahmenswert. Beachtenswert ist die in der Urschrift beiliegende Anweisung zum Gebrauche der Maschine. (Reuleaux.)

29 **Schuster'(Hahn-)sche Rechenmaschine**, ausgestellt von Geh. Reg.-Rat Prof. **Reuleaux**, techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg.

Die Maschine ist eine *Hahn*'sche (Schuster war der Schwager des Pfarrers Hahn und Kleinuhrmacher in Ansbach und fertigte seine Maschinen genau nach den Hahn'schen.) Die ausgestellte Maschine ist in den Jahren 1789—90 hergestellt und war damals für 1000 Reichsthaler zum Verkaufe ausgeboten. Die Maschine ist in vollständig gangbarem Zustand und führt alle Rechnungsarbeiten aus, welche auf der *Thomas*'schen möglich sind.

(Reuleaux.)

30 **Schuster'(Hahn-)sche Rechenmaschine.** Aus der **geodätischen Sammlung der techn. Hochschule München.**

Die Rechenmaschine, vollständig gangbar, ist von **Chr. Schuster** in Ansbach in den Jahren 1807—1820 verfertigt und wurde 1821 vom bayer. Staate für 1000 Gulden erworben.

(M. Schmidt.)

31 **Rechenmaschine** von **A. Burkhardt** in Glashütte i. S.

In Bezug auf die Handhabung und äussere Gestalt stimmt diese Maschine mit dem bekannten „Arithmometer" von Thomas überein, das Innere weist jedoch Verbesserungen und Ergänzungen auf.



Preis:	6-stellig	M. 375.—,
	8-stellig	M. 475.—,
	10-stellig	M. 675.—.

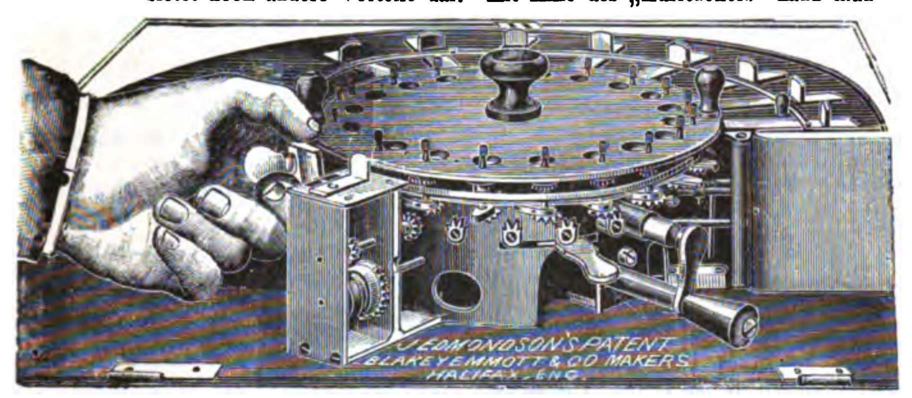
(Mehmke.)

32 **Unterrichtsmodell zur Thomas'schen Rechenmaschine,** ausgeführt von **A. Burkhardt** in Glashütte i. S. **Kinematische Sammlung der techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg**, Vorstand Geh. R. Professor **Reuleaux.**

33 **Circular Calculating-Maschine** von **Joseph Edmondson** in Halifax, England, ausgestellt von Prof. **O. Henrici**, City and guilds of London Institute.

Mittelst flacher Schieber wird der Multiplicand resp. Divisor auf der äusseren, unbeweglichen, halbkreisförmigen Stellplatte eingestellt, der drehbare innere Kreis nimmt gleichzeitig das Product und den Multiplicator resp. den Dividenden und Quotienten auf. Die kreisförmige Bauart gestattet, jede Ziffer des Productes (Dividenden) jeder Ziffer der Stellplatte gegenüber zu bringen, wodurch das bei geraden Maschinen zuweilen

nöthige Versetzen einer schon eingestellten Zahl vermieden wird, sie erlaubt ferner eine nicht aufgehende Division beliebig fortzusetzen und bietet noch andere Vorteile dar. Mit Hilfe des „Auslöschers“ kann man



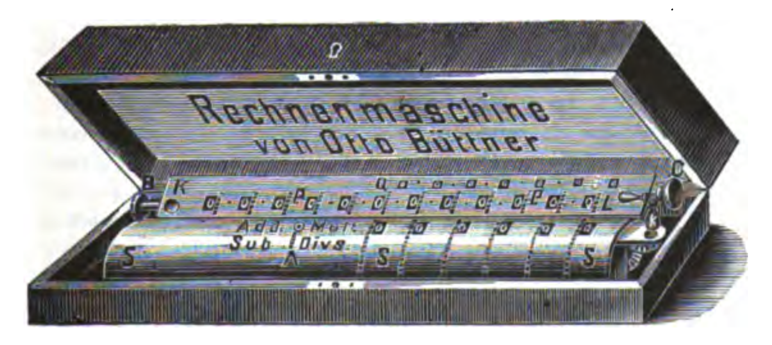
nach Belieben alle Ziffern des inneren Kreises, oder nur einen Teil derselben, auf Null bringen. Die Kurbel ist seitlich angebracht.

Preis M. 500.

(Mehmke.)

34 **Modell zur Erläuterung des Mechanismus der Edmondson'schen Rechenmaschine.** Ausgestellt von Prof. **O. Henrici**, City and guilds of London Institute, London.

35 **Büttner's** Rechenmaschine, D. R.-P. Nr. 47243, ausgestellt von der Firma **W. Brückner** in Dresden.



Diese Rechenmaschine gleicht äusserlich der bekannten von Thomas, nimmt aber weniger Raum ein und unterscheidet sich von ihr hauptsächlich in folgenden Punkten: 1. Bei der Subtraction und Division bedarf es keiner Umsteuerung, sondern man kann auch die Kurbel rückwärts drehen; 2. auch der „Quotient“ Q ist mit einer Vorrichtung zum

„Auslöschen“ versehen; 3. im „Stellwerk“ S stehen die Ziffern immer in einer geraden Linie nebeneinander, so dass jede eingestellte Zahl unmittelbar abgelesen werden kann; 4. das „Lineal“ L ist nach vorn geneigt, was die Übersicht erleichtert.

Preis: 6-stellig . . . . M. 325.—,
8-stellig . . . . M. 425.—,
10-stellig . . . . M. 625.—.

(Mehmke.)

36 **Rechenmaschine „Brunsviga“** patentirt, erfunden von **Odhner**, hergestellt von **Grimme, Natalis & Co.** in Braunschweig.

Um eine Zahl in die Maschine einzuführen, stellt man dieselbe mit Hilfe der in den Schlitzen der gebogenen Deckplatte beweglichen Hebel



ein und dreht hierauf die Kurbel, welche in der Ruhe senkrecht nach unten steht und in dieser Stellung durch einen federnden Eingriff festgehalten wird, einmal über vorne nach hinten (im Sinne des oberen Pfeiles). Die Zahl erscheint dann in den grossen Löchern des Zifferkastens. Will man eine zweite Zahl einmal oder mehrmals zu jener addiren, resp. von ihr subtrahiren, so stellt man sie auf der Deckplatte ein und dreht die Kurbel ebenso oft im Sinne des oberen resp. unteren Pfeiles herum, dann findet sich das Ergebnis wieder in den grossen Löchern des Zifferkastens, in dessen kleinen Löchern zugleich die Zahl der Drehungen angezeigt wird. Die Multiplication und Division erledigt man, wie bei andern Rechenmaschinen, durch wiederholtes Addiren resp. Subtrahiren; bei den Zehnern, Hundertern . . . ist dann der Zifferkasten um 1, 2 . . . Stellen nach rechts zu verschieben, was unter Niederdrücken des vorne angebrachten Hakens geschieht. Die Zahlen in den grossen resp. kleinen Löchern des Zifferkastens werden auf Null gebracht, indem man die Flügelschraube auf der rechten resp. linken Seite von vorne nach hinten dreht. Die Maschine ist nur 30 cm lang, 15 cm breit und 12 cm hoch.

Preis M. 150.

(Mehmke.)

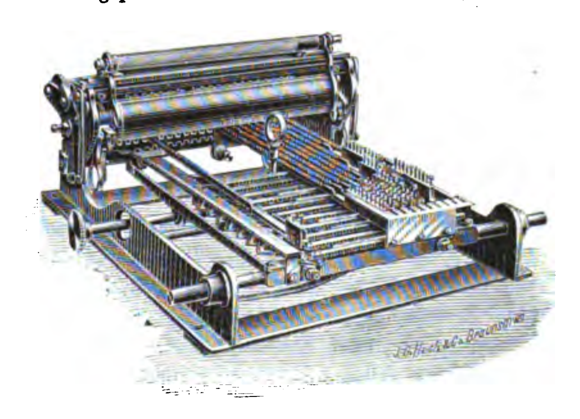
37 **Rechenmaschine** nach Prof. **Selling**, Univ. Würzburg, construirt von **Max Ott**, Werkstätte für Präcisionsmechanik in München.

Die Maschine verdankt ihre Entstehung der Absicht, die Mängel der Thomas'schen Rechenmaschine, — das einförmige Kurbeldrehen und die

stossweise Zehnerübertragung — zu umgehen und weicht sowohl in der Theorie als auch der Construction von allen bis jetzt vorhandenen Rechenmaschinen wesentlich ab.

Sie besteht aus zwei getrennten Mechanismen, welche während des Rechnens abwechselnd mit einander in Verbindung gebracht werden, und zwar dem „Scherensystem mit Claviatur und Zahnstangen“ und dem „Zahnradsystem mit den Zifferrädern“.

Zur Herstellung der Teilproducte ist die Nürnberger Schere benützt, deren Kreuzungspunkte ihren Abstand bekanntlich proportional verändern.



Durch den Weg, welchen diese Kreuzungspunkte (Multiplikand) zurücklegen, wenn die Schere um einen gewissen Abstand geöffnet oder geschlossen wird (Multiplicator) werden die Teilproducte gebildet und durch die, jene Bewegung aufnehmenden Zahnstangen auf die Radsysteme übertragen. Zur Verbindung der Zahnstangen mit den betreffenden Kreuzungspunkten (Schienen), d. h. zum Einstellen des Multiplikanden, genügt ein Druck auf die Tasten der Claviatur.

Die Radsysteme, welche die Längsbewegung der Zahnstangen aufnehmen und in eine rotirende verwandeln, bestehen aus je einem zusammengehörigen Zahn- und Zahlenrad und sind sämtlich unter sich durch sog. Planetenräder (Elemente von doppelter Bewegung) mit einander verbunden, welch letztere die Zehnerübertragung vermitteln.

Entsprechend dieser continuirlichen Zehnerübertragung stehen die einzelnen Ziffern beim Ablesen nicht genau am Indexstrich, sondern sind bereits um soviele Zehntel vorgerückt, als die nächstfolgende Ziffer Einheiten hat. Durch Hochheben eines Ringes wird die Nullstellung der Räder vor Beginn der Rechnung bewirkt.

Durch die Vermeidung von Federn und Hebeln ist ein fehlerhaftes Functioniren der Maschine ausgeschlossen.

(M. Ott.)

38 **Die analytische Maschine** von **Charles Babbage.** (Nicht vollendet.) In photographischer Abbildung ausgestellt vom **South Kensington Museum,** London.

Die Maschine dient zur Berechnung mathematischer und astronomischer Tabellen. Sie liefert Wertereihen beliebiger Functionen, indem sie deren Differenzenreihen selbständig bildet und addirt. 1823 auf Kosten der englischen Regierung begonnen, hatte sie bereits 340,000 Mark gekostet, als 1833 die Arbeit daran für immer eingestellt wurde. Sie hat der Maschine von Georg und Eduard Scheutz zum Vorbild gedient.

(Mehmke.)

B. Apparat zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

39 **Quicunx, zur Illustration des Fehlergesetzes,** von **Francis Galton** F. R. S.

Das Princip, auf welchem das Instrument beruht, besteht darin, dass jedes von vielen Objecten einer grossen Menge von kleinen und unabhängigen Zufällen ausgesetzt wird. Die Objecte sind hier fallende Schrotkörner und die Zufälle sind durch Reihen von Nadeln bewirkt, gegen welche die Körner fallen und gleich oft nach rechts oder links abgelenkt werden. Einzelne Körner können wieder und wieder nach derselben Seite abgelenkt werden; im allgemeinen jedoch werden Ablenkungen nach beiden Seiten gleich oft stattfinden.

Ein Kasten, dessen vordere Fläche aus einer Glasscheibe besteht, hat eine Tiefe von ungefähr 5 mm. Oben bilden Cartonstreifen einen Trichter. Unter der Öffnung desselben sind Reihen von Nadeln senkrecht in die Rückwand gesteckt.

Eine passende Quantität feinen Schrotes liegt im Kasten. Dieser läuft, wenn der Kasten umgestürzt wird, in den am oberen Ende befindlichen Behälter mit einer Öffnung über dem Trichter. Wird der Kasten wieder umgedreht, so fallen die Schrotkörner in den Trichter, durch dessen untere enge Öffnung auf die Nadeln und in interessanter Weise durch diese abwärts, bald rechts, bald links abgelenkt. Diese Nadeln sind quicunx-artig verteilt, so dass jedes Schrotkorn in jeder Reihe der Nadeln eine trifft. Beim Herabfallen verbreitet sich der Strom der Schrotkörner, bis diese schliesslich in den unten angebrachten Fächern zur Ruhe gelangen. Der Umriss der Schrothaufen in diesen Fächern bildet dann angenähert die bekannte Fehlercurve und reproducirt sich mit grosser Treue bei Wiederholung des Experiments. Wären die Reihen der Nadeln sehr zahlreich, so wäre die Ausbreitung des Schrotes proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Reihen; wobei die Ausbreitung gemessen wird durch den Abstand (gleich dem doppelten

des wahrscheinlichen Fehlers) zwischen denjenigen Verticalen, ausserhalb welcher an jeder Seite ein Viertel des Schrotes liegt.

Eine zweite Anordnung des Apparates illustrirt das Gesetz, wonach der wahrscheinliche Fehler eines Systemes, hervorgerufen durch die Wirkung zweier unabhängiger Ursachen, denen je für sich die wahrscheinlichen Fehler h und k zukommen, den Wert $\sqrt{h^2+k^2}$ hat. Das Quicunx in der ersten Anordnung wird durch eine auf halber Höhe angebrachte Reihe von Löchern in zwei Teile H und K geteilt. Denken wir uns nun diese Fächer zeitweilig unten geschlossen. Der durch H fallende Schrot wird dann in ihnen Haufen bilden, deren Höhe einem wahrscheinlichen Fehler h entspricht. Wird jetzt der Boden eines dieser Fächer geöffnet, so wird der Schrot durch K fallen und in den unteren Fächern eine Figur bilden, die einem wahrscheinlichen Fehler k entspricht. Dasselbe tritt für jedes Fach ein. Das Gesamtresultat, wenn alle oberen Fächer geöffnet werden, wird identisch sein mit demjenigen, welches erhalten würde, wenn der Schrot durch H und K fiele, ohne durch die oberen Fächer aufgehalten zu werden, in welchem Falle der wahrscheinliche Fehler $\sqrt{h^2+k^2}$ sein würde.

Durch andere Variationen des Apparates können andere Eigenschaften des Fehlergesetzes illustrirt werden; so die Identität des Resultates, wenn der Schrot durch H und dann durch K fällt, mit demjenigen, wenn er erst durch H und dann zurück durch H bis zu einer Entfernung gleich der Höhe von K fällt. Dies würde zeigen, dass $\sqrt{h^2+k^2}$ gleich anwendbar ist, ob das System der Fehlerquellen aus der Summe oder aus der Differenz zweier anderen zusammengesetzt ist.

(F. Galton.)

Zweiter Abschnitt. Algebra, Functionentheorie.

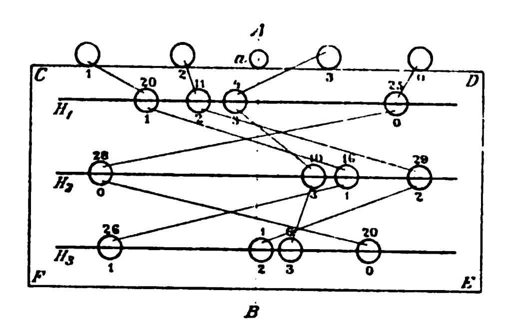
C. Apparate zur Auflösung von Gleichungen und zur Construction functioneller Abhängigkeiten.

40 **Apparat zur Auflösung linearer Gleichungen,** von Prof. **Veltmann,** Bonn-Poppelsdorf, ausgeführt von Mechaniker **Wolz** in Bonn, Aussteller: Prof. **Veltmann.**

So wie der Apparat hier ausgeführt ist, ist derselbe zur Auflösung von drei Gleichungen bestimmt

Über einem rechteckigen Kasten C D E F haben die Hebel H_1, H_2, H_3 ihre Drehpunkte und Schwerpunkte in einer horizontalen Linie A B und bewegen sich in Ebenen senkrecht zu dieser Linie. An jedem Hebel sind vier durch die Kreise angedeutete Blechcylinder von gleichem Durch-

messer, oben offen, unten geschlossen, aufgehängt. Die Aufhängepunkte befinden sich mit den Drehpunkten der Hebel in gerader Linie. Die Cylinder sind an jedem Hebel unterhalb der Kreise mit den Nummern



0 bis 3 bezeichnet. Die oberhalb stehenden Zahlen bedeuten die links positiv, rechts negativ zu nehmenden Hebelarme. Dieselben müssen übereinstimmen mit den Coëfficienten und Absolutgliedern der aufzulösenden Gleichungen. Der Apparat wäre also hier eingestellt zur Auflösung folgender Gleichungen:

$$
1)\quad \begin{aligned}
-25 + 20x_1 + 11x_2 + 4x_3 &= 0 \\
+28 - 16x_1 - 29x_2 - 10x_3 &= 0 \\
-20 + 26x_1 - 1x_2 - 6x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

An den Enden eines jeden Hebels hängt zur Tarirung mittels Gewichten je eine (hier fortgelassene) Wagschale, deren Aufhängepunkt mit denjenigen der Cylinder in gerader Linie liegt. Ausserhalb des Kastens sind an der Wand C D desselben ebenfalls durch Kreise angedeutete, unten geschlossene, oben offene vertical stehende mit Masstab versehene Glascylinder befestigt. Je zwei gleich nummerirte Cylinder an zwei benachbarten Hebeln sind, wie durch Linien angedeutet ist, unter sich sowie auch mit den Glascylindern von gleichen Nummern durch gläserne Heberröhren verbunden, deren verticale Schenkel bei horizontaler Stellung der Hebel in die Cylinder bis ungefähr 10 cm vom Boden hinabreichen. Je vier auf diese Weise durch Röhren verbundene gleich nummerirte Cylinder wollen wir als eine Cylinderkette bezeichnen. In jeder der vier Cylinderketten wird dann, wenn eine Flüssigkeit in dieselbe gebracht wird, diese wegen der Communication durch die Heberröhren in gleichem Niveau stehen. Die Röhren sind an einem (hier weggelassenen) auf dem Kasten stehenden Holzgestell befestigt. Der Kasten wird so weit mit Wasser gefüllt, dass die Cylinder bei horizontaler Stellung der Hebel ungefähr zur Hälfte eintauchen.

An der Wand C D des Kastens ist ausserhalb eine mit Teilung versehene Wasserstandsröhre a angebracht, welche mit dem Wasser im

Kasten communicirt. In die Cylinder wird eine Flüssigkeit gebracht, deren specifisches Gewicht sich zu dem des Wassers verhält, wie der äussere Querschnitt eines Metallcylinders zu dem inneren. Eine Flüssigkeitssäule in dem Cylinder (die Heberröhre wird hiebei nicht abgerechnet) hat dann dasselbe Gewicht, wie eine Wassersäule von gleicher Höhe und dem äusseren Querschnitt des Cylinders. Als Gewichtseinheit werde eine derartige Säule von der Höhe = 1 cm angenommen.

Unter diesen Voraussetzungen ändert sich die am Aufhängepunkte eines Cylinders angreifende Kraft nicht, wenn der Cylinder mehr oder weniger tief eintaucht, dabei aber der Unterschied des inneren und äusseren Niveaus constant bleibt. Denn wenn der Cylinder z. B. tiefer eintaucht, so verdrängt er eine höhere Wassersäule aus der Stelle; um ebenso viel hat aber auch die Höhe der Flüssigkeitssäule in dem Cylinder zugenommen. Hieraus folgt dann weiter, dass, wenn der Unterschied: innere Niveauhöhe minus äussere, sich ändert, die Kraft sich um ebensoviel ändert, gleichviel ob gleichzeitig die Tiefe des Eintauchens des Cylinders eine andere wird oder nicht.

Man bringe die Hebel in horizontale Stellung. Dann füge man in den Glascylindern soviel Flüssigkeit zu oder nehme durch Stechheber soviel weg, dass in allen Cylinderketten das Niveau mit dem im Kasten nahezu übereinstimmt. Jetzt tarire man die Hebel, sodass sie ungefähr in dieser Stellung ins Gleichgewicht kommen und lese das Niveau in den Glascylindern sowie im Kasten ab.

Hierauf füge man in sämtlichen Glascylindern oder auch nur einem Teil derselben eine angemessene Menge Flüssigkeit hinzu. Das Gleichgewicht wird hierdurch gestört; die Hebel entfernen sich aus der horizontalen Lage und zugleich treten die Heberröhren in Thätigkeit. Nach einiger Zeit stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand her, bei welchem die Hebel verschiedene Neigungen gegen den Horizont haben und die Flüssigkeit in den Cylindern eines Hebels verschieden hoch steht. In den Cylindern einer Kette aber ist das Niveau wieder überall dasselbe wegen der Communication durch die Heberröhren. Man lese wieder die Niveaus in den Glascylindern sowie im Kasten ab und subtrahire den früheren Überschuss des ersteren über dem letzteren von dem jetzigen.

Die Unterschiede in Centimetern seien resp. y_0, y_1, y_2, y_3, in den Cylindern 0, 1, 2, 3. Dann sind diese Grössen die an jedem Hebel neu in Wirkung getretenen Kräfte. Da dieselben an den in der Figur angegebenen Hebelarmen angreifend sich das Gleichgewicht halten, so genügen sie den Gleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} -25y_0 + 20y_1 + 11y_2 + 4y_3 &= 0 \\ +28y_0 - 16y_1 - 29y_2 - 10y_3 &= 0 \\ -20y_0 + 26y_1 - 1y_2 - 6y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Um also die Auflösung der gegebenen Gleichungen (1) zu erhalten, hat man nur zu setzen:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0},\ x_2 = \frac{y_2}{y_0},\ x_3 = \frac{y_3}{y_0}.$$

Diese Werte der x werden nicht genau sein. Die Fehler mögen f_1, f_2, f_3 sein, sodass die wahren Werte $x_1 + f_1, x_2 + f_2, x_3 + f_3$ sind. Setzt man diese in die Gleichungen (1) ein, so erhält man

$$3)\quad \begin{array}{l} (-25 + 20x_1 + 11x_2 + 4x_3) + 20f_1 + 11f_2 + 4f_3 = 0 \\ (\ \ 28 - 16x_1 - 29x_2 - 10x_3) - 16f_1 - 29f_2 - 10f_3 = 0 \\ (-20 + 26x_1 - 1x_2 - 6x_3) + 26f_1 - 1f_2 - 6f_3 = 0 \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen können die Correctionen f bestimmt werden. Man würde also die drei Gleichungen (3) mit den drei Unbekannten f aufzulösen haben, was wieder mit Hilfe des Apparats geschieht. Die Coëfficienten der Unbekannten sind dieselben wie in der Gleichung (1); die Hebelarme der Cylinder 1, 2, 3 können also unverändert bleiben. Die Absolutglieder sind andere, nämlich gleich den Ausdrücken in den Klammern, in welchen x_1, x_2, x_3 die erhaltenen Näherungswerte bedeuten. Sie werden sehr klein sein, weil die Näherungswerte x_1, x_2, x_3 nahezu eine richtige Auflösung der Gleichungen (1) darstellen. Man wird sie etwa 10mal grösser nehmen und dann die Gleichungen (3) durch Zurückführung auf homogene Gleichungen in derselben Weise mit Hilfe des Apparats auflösen, wie vorher die Gleichungen (1). Die erhaltenen Werte der f sind aber dann ebenfalls 10mal zu gross, müssen also durch 10 dividirt und dann zu den vorhin erhaltenen Werten von x_1, x_2, x_3 addirt werden. Hierdurch erhält man genauere Werte der x. Diese kann man in derselben Weise benutzen, um noch genauere Werte zu erhalten etc.

(Veltmann.)

41 **Modell eines Apparates zur Auflösung viergliedriger (insbesondere vollständiger cubischer) sowie fünfgliedriger Gleichungen.** 1889 vom **Aussteller** entworfen. Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt.

Der Apparat ist aus drei parallelen, nicht in einer Ebene liegenden, gleichmässig geteilten Axen — sie mögen die U-, V- und W-Axe heissen — und einer auf einem Cylinder gezeichneten cubischen Ellipse mit ungleichmässiger Teilung zusammengesetzt. Will man die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

auflösen, so verbindet man die mit a resp. b und c bezifferten Punkte der U-, resp. V- und W-Axe durch eine Ebene. An den Schnittpunkten derselben mit der genannten Curve können die Wurzeln der Gleichung abgelesen werden.

Bestimmt man die Lage einer veränderlichen Ebene durch die — von den Nullpunkten der Axen gerechneten und mit bestimmten Vorzeichen versehenen — Abschnitte u, v, w, welche sie auf den Axen bildet, so

stellt eine lineare Gleichung zwischen u, v, w einen Punkt vor. Die Gleichung des mit der Ziffer t versehenen Teilpunktes der genannten cubischen Ellipse ist

$$ut^2 + vt + w + t^3 = 0.$$

Zur Auflösung einer viergliedrigen Gleichung der Form

$$x^n + ax^m + bx^l + c = 0$$

benötigt man diejenige eingeteilte Raumcurve, bei welcher der zum Werte t gehörige Teilpunkt die Gleichung

$$ut^m + vt^l + w + t^n = 0$$

hat. Um auf ähnliche Weise die fünfgliedrige Gleichung

$$x^n + ax^m + bx^l + cx^k + d = 0$$

aufzulösen, benützt man diejenige Curvenschar — sie liegt auf einer Cylinderfläche mit zu den Axen parallelen Mantellinien — bei welcher der mit t bezeichnete Teilpunkt der zum Parameterwert λ gehörigen Curve der Schar die Gleichung

$$ut^m + vt^l + wt^k + (t^n + \lambda) = 0$$

hat. Man legt wieder durch die mit a resp. b und c bezeichneten Punkte der Axen eine Ebene und schneidet sie mit der zum Parameterwert d gehörigen Curve der Schar, dann lassen sich an den Schnittpunkten die gesuchten Wurzeln ablesen.

(Mehmke.)

42 Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung viergliedriger (insbesondere vollständiger cubischer) Gleichungen. 1886 vom **Aussteller** entworfen. Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule, Darmstadt.

Der Apparat besteht aus einer Glastafel mit einem auf der Unterseite eingeritzten Paar von sich rechtwinklig kreuzenden Geraden und aus einer Tafel von Pergament, auf die ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit gleichmässig geteilten Axen, sowie die Parabel, deren Gleichung in diesem Systeme $y = \frac{1}{4}x^2$ ist, unverwischbar gezeichnet sind. Behufs Auflösung der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

zeichnet man auf der Pergamenttafel mit Bleistift die zur Gleichung $x = -a$ gehörige Gerade G und markirt ferner den Punkt p mit den Coordinaten $(-a + c, b)$, legt das durchsichtige Geradenkreuz auf und bewegt es in der Weise, dass der Schnittpunkt seiner Geraden beständig auf G bleibt und die eine Gerade immer durch p läuft, und zwar so lange, bis die andere Gerade die Parabel berührt. Dann lässt sich am Schnittpunkt der letzteren Geraden mit der X-Axe eine Wurzel der

gegebenen Gleichung ablesen. Benützt man statt der Parabel die Curve zur Gleichung

$$\left(\frac{y}{n-2}\right)^{n-2} = \left(\frac{x}{n-1}\right)^{n-1},$$

so ergeben sich durch dasselbe Verfahren die (n—2)-ten Potenzen von den reellen Wurzeln der Gleichung

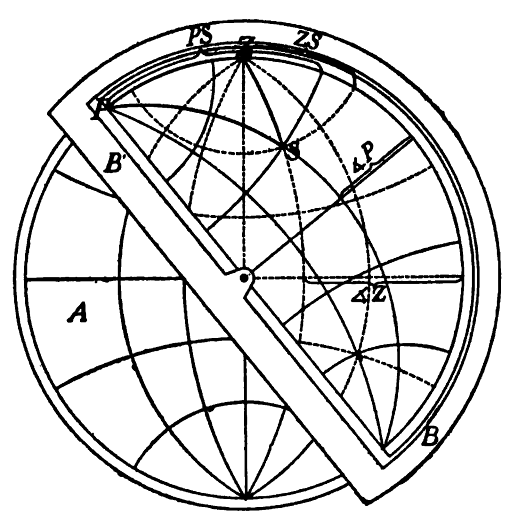
$$x^n + ax^2 + bx + c = o.$$

(Mehmke.)

---

43 **Trigonometer** von **C. Braun S. J.**, Mariaschein in Ungarn, angefertigt und ausgestellt von der Fabrik physikalischer Apparate von **A. Kreidl**, Prag.

Das Trigonometer besteht in der Hauptsache aus einer in grösserem Masstab ausgeführten *perspectivischen* Projection (A) einer halben Kugeloberfläche mit engmaschigem Gradnetz. Ich habe die stereographische Äquatoreal-Projection dafür gewählt. Denn obgleich auch die orthographische, oder die globulare (James'sche), oder ähnliche perspectivische Projectionen verwendet werden können, so hat doch die stereographische sehr wesentliche Vorzüge, namentlich die, dass sie nur Kreislinien enthält, somit leichter und genauer gezeichnet werden kann, und dass die Linien gegen den Rand hin nicht so eng zusammengedrängt erscheinen wie bei der orthographischen.



Über dieser Projection liegt, in einen transporteur-förmigen Rahmen (B) gespannt, eine zweite der unteren völlig gleiche Projection, welche

aber nur die Hälfte des Kreises füllt und auf Pauseleinen oder Pausepergament in roter Farbe gedruckt ist, so dass durch dieselbe hindurch die untere Zeichnung völlig scharf wahrgenommen wird.

Die Mittelpunkte beider Zeichnungen sind in solider Weise durch eine Axe verbunden. Die obere Zeichnung kann somit auf der unteren concentrisch gedreht werden, und die Drehung wird an dem eingeteilten Rand mittels kleiner Nonien abgelesen.

Es ist einleuchtend, dass bei dieser Anordnung jeder Punkt der Zeichnung sofort in *zwei* Systemen von Polar-Coordinaten dargestellt erscheint. Die numerirten Parallelkreise geben die Poldistanz des Punktes an, und die Meridiane den Winkel am Pol. Wenn also die Coordinaten eines Punktes in dem System der unteren Zeichnung notirt und durch eine aufgelegte Spitze markirt werden, so gibt dieselbe Notirung gleichzeitig in der oberen Zeichnung die Coordinaten in Bezug auf ein anderes System, welches gegen das erste unter einem beliebigen Winkel geneigt sein kann. Man kann aber die Auflösung der sphärischen Dreiecke auf eine Transformation der Coordinaten zurückführen, und somit können auch alle sphärischen Dreiecke mittels dieser Vorrichtung aufgelöst werden.

Um also ein sphärisches Dreieck, z. B. das von Pol, Zenith und Stern gebildete $\triangle$PZS aufzulösen, wenn beispielsweise die Seite PZ (Complement der Polhöhe), PS (Poldistanz) und ZS (Zenithdistanz), also drei Seiten gegeben sind, wird man die obere Zeichnung so auf der unteren drehen, dass der Winkel der beiden Durchmesser = PZ ist (cf. Fig.). Dann sucht man in der unteren Zeichnung am Rand die Zenithdistanz ZS und notirt den betreffenden Parallelkreis; ebenso in der oberen Zeichnung die Poldistanz PS und notirt den zugehörigen Parallelkreis. Dieser Durchschnittspunkt (S) ist der dritte Punkt des Dreieckes. Der durch denselben gehende Meridian der unteren Zeichnung gibt an dem Äquator derselben die Grösse des Winkels bei Z (respective dessen Supplement Z' oder das Azimuth des Sternes), und der durchgehende Meridian der *oberen* Zeichnung gibt an deren Äquator den Winkel bei P, d. h. den Stundenwinkel. In ganz ähnlicher Weise kann jedes sphärische Dreieck aufgelöst werden. Eine geringe Praxis reicht hin, um sich davon zu überzeugen.

Nur in dem einen Fall, wenn die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes gegeben sind, reicht der Apparat nicht aus. Dieser Fall kommt übrigens in der Praxis vielleicht *nie* vor. Nötigenfalls kann man aber auch dann sehr leicht zum Ziel kommen, wenn man statt des vorliegenden Dreieckes das zugehörige Polar-Dreieck auflöst.

Die Operationen gehen bei einiger Übung sehr rasch von Statten und gegenüber der Rechnung kann damit eine sehr grosse Zeitersparnis erzielt werden. Die mittlere Genauigkeit beträgt bei sorgfältiger Ablesung fünf Minuten. (Aus den „Math. naturwissensch. Ber. aus Ungarn").

(P. Braun.)

44 **Vier verschiedene Abacus** von **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des ponts et chaussées, Paris.

Ein Abacus oder eine graphische Rechentabelle setzt sich aus einer Vereinigung geometrischer, mit Zahlen bezeichneter Elemente (Punkte, Gerade oder Curven) zusammen, welche ein mathematisches Gesetz zwischen mehreren Variabeln darstellt, wobei jedem System von Zahlen die aufeinanderfolgenden Werte einer Variabeln entsprechen.

Herr *M. d'Ocagne* hat neuerdings eine allgemeine Theorie der Abacus begründet und sie in seinem Buche: „Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques", Paris, Gauthier-Villars 1891, veröffentlicht.

Unter den Methoden, welche er aus der allgemeinen Theorie ableitet, ist jene der „isoplethen Punkte", in Kapitel IV—VI des genannten Werkes enthalten, sein specielles geistiges Eigentum.

Die hier ausgestellten Abacus sind Anwendungen dieser Methode. Man hat dabei durch die Daten der betreffenden Aufgabe auf dem Abacus eine Gerade bestimmt, deren Schnitt mit einer geteilten Scala die gesuchte Unbekannte ergibt. Diese Abacus sind klarer, bequemer zu handhaben und leichter genau zu interpoliren, als die Abacus der isoplethen Geraden, aus denen sie dualistisch abgeleitet sind. Ausserdem gestatten sie einen mehr als doppelten Eingang (Abacus 3 und 4).

Um auf dem Abacus Gerade zu ziehen, kann man sich eines Lineals oder eines feinen Striches auf durchsichtigem Träger bedienen. Am bequemsten ist es aber, einen dünnen Faden zwischen den Punkten zu spannen, welche den Daten entsprechen.

Bezüglich der näheren Ausführungen vergleiche man die auf den einzelnen Abacus angebrachte Gebrauchsanweisung, sowie die Entwickelungen in Kapitel IV—VI (Fig. 28, 29, 34 Tafel VIII) des genannten Werkes.

1) Abacus zur Berechnung der Neigung der Stützmauer einer horizontalen Terrasse.

Man habe das rechteckige Profil ABCD der Stützmauer berechnet. Dieselbe soll durch eine nach innen geneigte BMNC ersetzt werden. Es sei p das Verhältnis der Gewichte gleicher Volumina Erde und Mauerwerk; $l = BM : BA$; $h = AP : AD$, dann muss zur Erzielung gleicher Stabilität die Bedingung:

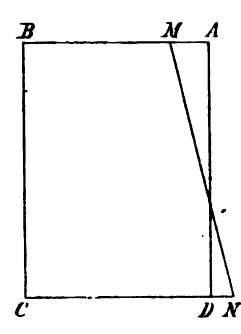
$$(1 + l)\, h^2 + l\,(1 + p)\, h - \tfrac{1}{3}\,(1-l)\,(1-2p) = 0$$

erfüllt sein.

Diese Bedingung wird durch einen Abacus mit 3 parabolisch gekrümmten Scalen für l, p und h ausgedrückt. Nimmt man p und l als gegeben an, so braucht man nur die entsprechenden Punkte der be-

treffenden Scalen mit einer Geraden (Faden) zu verbinden, dann schneidet diese die Scala der h in dem gesuchten Werte h.

2) Abacus zur Berechnung des Verhältnisses k der Profile der geraden und der schiefen Stützmauer (bezw. zur Auffindung der Stützmauer vom kleinsten Flächeninhalt des Profiles).



Hat man zu einem gegebenen Wertepaar p, l mittels des ersten Abacus h gefunden, so lässt sich mit diesem zweiten Abacus in ganz analoger Weise das Verhältnis:

$$k = \frac{\text{Inhalt ABCD}}{\text{Inhalt MBCN}} = 2h + 1 - 2hl$$

berechnen, welches möglichst gross werden soll.

3) Abacus der sphärischen Distanzen.

λ und λ' seien die geographischen Breiten zweier Orte auf der Erde, L ihr Längenunterschied. Die sphärische Distanz φ lässt sich dann durch die Formel:

$$2 \cos \varphi = (1 + \cos L) \cos (\lambda - \lambda') - (1 - \cos L) \cos (\lambda + \lambda')$$

ausdrücken.

Zur Berechnung derselben mittels des Abacus bilde man $\lambda + \lambda'$ und $\lambda - \lambda'$, suche ersteren Wert am linken, letzteren am rechten Rande auf und verbinde die betreffenden Punkte durch einen Faden. Dieser werde von der Senkrechten, die dem Werte von L an der oberen Scala entspricht, im Punkte P geschnitten. Geht man von P in einer Horizontalen an den rechten Rand, so liest man dort die gesuchte Distanz φ ab.

4) Abacus für die Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichung:

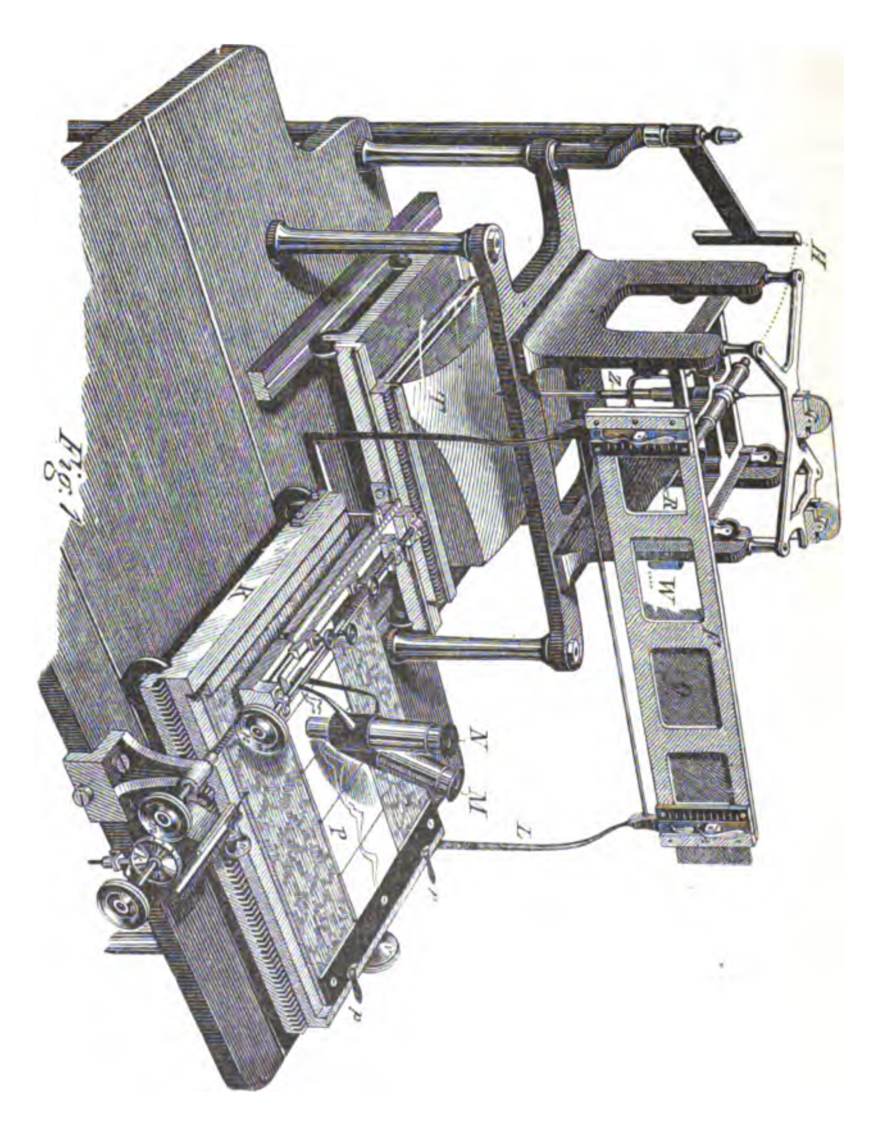
$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

Die Scalen für p und q sind am linken und rechten Rande des Abacus. Man verbindet die entsprechenden Punkte durch eine Gerade, sucht ihre Schnitte mit der Curve, die dem Werte n entspricht und geht von diesen Punkten in einer Verticalen zur horizontalliegenden Scala der z in der Mitte des Abacus über, wo man die positiven Wurzeln ablesen kann. Die negativen berechnen sich aus der Gleichung:

$$z^3 - nz^2 + pz - q = 0.$$

(M. d'Ocagne, Finsterwalder.)

45 Trace-Computer, Apparat zum Auftragen von Curven, deren Ordinaten gegebene Functionen zweier anderer Curven sind, von **F. Galton,** F. R. S. London, ausgeführt von **Beck,** London.



Das Instrument, gegenwärtig zum Entwerfen und Punktiren der Dampfspannungscurve aus den entsprechenden Curven der Thermometer

mit trockener und feuchter Kugel benutzt, kann zu ähnlichen Zwecken aller Art verwendet werden, wenn man nur geeignete modellirte Tafeln fertigen lässt. Man kann dasselbe zum Entwerfen und Punktiren einer Curve benutzen, deren Ordinaten gegebene Functionen der Ordinaten zweier beliebiger anderer Curven sind, während alle drei gemeinsame Abscissen haben.

Die Maschine besteht aus drei Teilen.

Der *erste Teil* ist ein auf Schienen beweglicher Wagen K (nur in der ersten Figur sichtbar); die Bewegung desselben wird durch Drehen der untersten von den drei rechts unten in der Zeichnung befindlichen Scheiben regulirt. Die Axe derselben ist mit einem Getriebe versehen, welches in eine Zahnstange, die am Wagen befestigt ist, eingreift. An derselben Axe ist noch eine zweite Scheibe angebracht, in der Figur mit K bezeichnet. Diese Scheibe ist mit Nuthen versehen, in welche eine schwache Feder als Sperrhaken einfallen kann, damit man den Wagen um bestimmte kleine Strecken fortbewegen kann. Auf dem Wagen K ist ein Gestell angebracht, welches auf demselben auf und ab gleitet, wenn man den mit V bezeichneten Schraubenkopf (rechts vom Wagen) umdreht. Dieses Gestell hat Klemmen p, p und ist noch sonst passend arrangirt, um eine Reihe von 5 Zinktafeln festzuhalten, die mit P bezeichnet sind, und in welche die Curven des trockenen und feuchten Thermometers zuvor mit dem von mir erfundenen (Report 1871 p. 31) Pantagraphen (siehe pag. 232 dieses Kataloges) eingeritzt wurden. An dem Wagen ist vertical ein Rahmenwerk F parallel zur Vorderseite des Instruments an zwei Ständern angebracht (der äussere ist in der Figur mit L bezeichnet). In das Rahmenwerk ist eine lange Zinkplatte Q eingeschoben, dazu bestimmt, die von der Maschine punktirte Curve aufzunehmen. Diese Platte ist nur zum Teil in der Figur ausgeführt, um den dahinter liegenden Mechanismus nicht zu verdecken. Es bewegen sich nun die Platte mit der Dampfspannungscurve und diejenige mit den beiden thermometrischen Curven miteinander, so zwar, dass alle drei, wenn sie durch eine zu den Seiten des Apparates parallele Verticalebene geschnitten werden, Ordinaten ergeben, die zu gleichen Abscissen gehören, und zwar befindet sich speciell die Lage der Fadenkreuze des Mikroskopes M, das auf die Curve des trockenen Thermometers gerichtet ist, und des Mikroskropes N, das auf die Curve des feuchten Thermometers gerichtet ist, mit dem Stift R, der die Dampfspannungscurve punktirt, immer in derselben Verticalebene, parallel zu den Seiten des Apparates. Der *zweite Teil* des Instrumentes, bezüglich dessen man Fig. 2 vergleichen möge, besteht aus einer Tafel T mit gekrümmter Oberfläche, die gleichfalls wieder auf einem Wagen seitlich verschoben werden kann, während dieser selbst senkrecht dazu auf Schienen beweglich ist. Der Wagen ist T förmig, an seinem Vorsprung nach vorne befindet sich eine Schraube m, durch deren Drehung der Wagen sich auf den Schienen vor- und

rückwärts bewegt. Das Mikroskop M, welches auf die Curve des trockenen Thermometers eingestellt ist (dasselbe besitzt eine Schlittenvorrichtung, die man vor dem Beginn der Operation einstellt), ist an dem Vorsprunge befestigt und nimmt deshalb an den Hin- und Her-Bewegungen der Tafel T teil. Kurz die Bewegung der Tafel in der Y-Richtung entspricht der Ordinate der Curve des trockenen Thermometers und einer Abscisse, die man erhält, wenn die Curve durch die

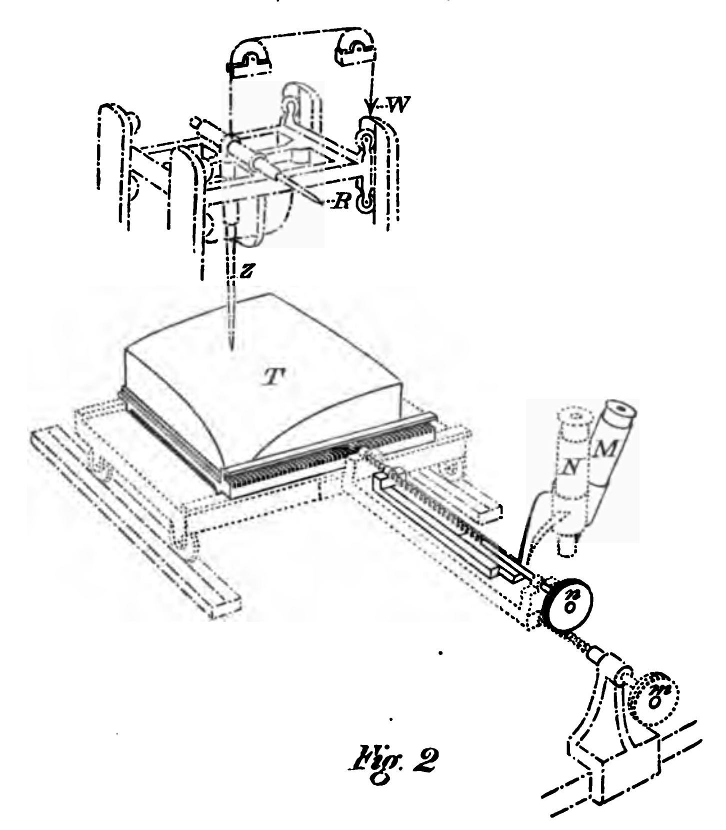


Fig. 2

oben angedeutete Verticalebene geschnitten wird. Ferner befindet sich an demselben Vorsprunge noch eine andere Schraube n, welche zweierlei Verrichtungen hat. Erstens schiebt sie das auf die Curve des feuchten Thermometers gerichtete Mikroskop hin und her und zweitens bewirkt sie durch ein Getriebe am Ende ihrer Axe, welches in eine Zahnstange eingreift, die mit der Tafel T in fester Verbindung steht, dass letztere auf dem Wagen in einer X-Richtung gleitet. Kurz, die Bewegung der Tafel in der X-Richtung entspricht der Ordinate der

Curve des feuchten Thermometers, genau wie die Bewegung der Tafel in der Y-Richtung der Ordinate der Curve des trockenen Thermometers für dieselbe Abscisse entsprach.

Die Tafel T ist eine krumme Oberfläche, die sich aus den Tabellen über Dampfspannung ergibt: Angenommen ihre rechte und linke Seite (Y-Richtung) wäre nach Temperaturgraden von 17° bis 93° geteilt und ihre Vorder- und Hinterseite (X-Richtung) nach den gewöhnlichen Differenzen zwischen den Temperaturen der feuchten und trockenen Kugel d. h. von 0° bis 23°, so ist die Höhe z eines beliebigen Punktes der Fläche, der zu den Ordinaten x, y gehört, den Tabellenwerten über Dampfspannung proportional gemacht worden, die der Temperatur y^0 des trockenen Thermometers und dem Überschuss von x^0 des trockenen über das feuchte entsprechen. Die mechanische Ausführung einer geeigneten Tafel für eine beliebige Function von zwei Variabeln ist bei der vortrefflichen Einrichtung unserer Mechaniker ersten Ranges weder schwierig noch teuer. Es werden circa 400 Löcher mit einem genau geteilten Bohrer eingebohrt bis zu einer Tiefe, welche den Tabellenwerten entspricht und die Fläche zwischen denselben wird weggefeilt und geglättet. Die Punkte, welche zwischen den wirklich gemessenen liegen, werden also thatsächlich graphisch interpolirt. Es war Gelegenheit, für dieses Instrument zwei Tafeln anzufertigen; beide wurden sorgfältig geprüft und ausserordentlich genau befunden*); trotzdem kosteten sie nicht mehr als 120 Mark das Stück.

Der *dritte Teil* des Apparates ist oben in Figur 2 deutlich zu sehen. Er besteht aus einem Griffel Z mit einem Gegengewichte W, der vertical und mit geringem Drucke auf der Tafel stehen kann. Der Griffel trägt oben ein horizontales Rohr, in welchem ein Stift R gleitet. Auf diesen schlägt, so oft es nötig ist, ein Hammer H, der, mit dem Fusse in Bewegung gesetzt, den in Figur 1 punktirt gezeichneten Bogen beschreibt; der Stift selbst punktirt auf der Platte G eine Curve, deren Ordinaten sich wie die Höhen der Tafel ändern, welche durch den aufsitzenden Griffel in dem Momente, in welchem der Hammer aufschlägt, markirt werden.

Die Wirkungsweise des Instrumentes ist nun leicht zu übersehen: Der Wagen läuft eine kurze Strecke, dann werden die Schrauben m und n gedreht, bis die Fadenkreuze der Mikroskope M und N auf den zugehörigen Curven stehen und schliesslich veranlasst ein Druck des Fusses den Stift, einen Punkt einzustossen. Das ist der ganze Vorgang; der eben erwähnte Sperrhaken regulirt die Bewegung derartig, dass die markirten Punkte halbstündigen Intervallen entsprechen, was

---

*) Siehe Report 1871, pag. 30 wegen Beschreibung der Prüfung der ersten Tafel. Diese Tafel wurde verworfen, weil man die absolute Scala, nach der sie construirt war, ungeeignet fand. Sie wurde durch die jetzt im Gebrauche befindliche, ebenso genaue ersetzt.

für den vorliegenden Fall als das zweckmässigste sich ergeben hat. So entsteht rasch eine Punktreihe, welche durch Gravirung verbunden die Original-Zinkplatte gibt, deren Zeichnung mit Wagner's Pantagraph auf die Kupferplatten des „Quarterly Weather Report“ übertragen wird.

Von kleineren Details des Apparates seien noch einige wichtigere Punkte hier erwähnt. Es kann der Rahmen F die Platte Q in verschiedenen Höhen festhalten, so dass eine Anzahl von Curven unter einander punktirt werden können. Auf diese Weise enthält jede einzelne Platte Q unserer sieben Stationen die Dampfspannungscurven der eingeführten fünftägigen Periode. Ferner ist es mitunter wünschenswert, das Instrument für andere Curven zu verwenden, bei denen z. B. x und y durch x — w und y — w ersetzt wird, wo w selbst variabel ist. Für diesen Fall ist noch vorne am Wagen ein Schlitten u angebracht, an dem man einen Zeiger in derselben Verticalebene mit dem Stift und der Lage der Fadenkreuze der beiden Mikroskope anbringen und einstellen kann. Angenommen, es wäre z. B. die Neigung der barometrischen Ebene durch drei Stationen gegen den Horizont darzustellen; dann müssten drei Reihen von Zinkplatten (jede Reihe für eine Station) übereinander gelegt werden. Die Mikroskope M und N und der Zeiger müssten einzeln auf die zuverlässigen Linien in jeder dieser Reihen eingestellt werden; dann wären für jede folgende Stellung des Wagens drei Operationen erforderlich: erstens müsste die Schraube (ganz rechts in Figur 1) gedreht werden, bis das Gestell mit allen Platten sich so bewegt, dass die Curve in der untersten Reihe unter den Zeiger zu stehen kommt; dann sind M und N bezüglich auf die Curven der oberen und mittleren Plattenreihe einzustellen und schliesslich ist die Punktirung wie zuvor auszuführen.

(F. Galton, aus dem Report of the meteorological comittee R. Soc. London. 1871.)

D. Modelle und Zeichnungen zur Algebra und Functionentheorie.

46 Geometrische Darstellung der Discriminanten der Gleichungen dritten und vierten Grades, von Gymnasiallehrer **G. Kerschensteiner** in Schweinfurt.

Die Gleichung dritten Grades:

$$G_3 \equiv x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = o$$

hat als Discriminante den Ausdruck

$$\Delta_3 \equiv c^2 - 3a^2b^2 + 4a^3c + 4b^3 - 6abc.$$

Deutet man a, b, c als Coordinaten, so stellt $\Delta_3 = o$ eine Fläche vierten

Grades dar. Da die vorgelegte Gleichung eine Gleichung allgemeiner Art ist, so kann sie nicht nur eine Doppelwurzel, sondern auch eine dreifache Wurzel besitzen. Alle Werte von a, b, c, für welche $G_3 = o$ eine dreifache Wurzel hat, genügen den Gleichungen

$$a = \lambda, \; b = \lambda^2, \; c = \lambda^3,$$

wovon man sich unmittelbar durch Substitution dieser Werte in $G_3 = o$ überzeugt. Eliminirt man aus diesen 3 Gleichungen die Grösse λ, so erhält man die beiden Cylinder

$$a^2 - b = o$$
$$b^3 - c^2 = o$$

deren einer eine gewöhnliche, deren anderer eine *Neil*'sche Parabel als Leitcurve besitzt. Die räumliche Curve, nach welcher sich diese beiden Cylinder schneiden, liegt notwendig auf der Fläche $\Delta_3 = o$, und da die Gleichung für die Coordinaten dieser Curve eine dreifache Wurzel hat, so muss dieselbe eine Rückkehrkante der Fläche sein. Wir können die Gleichung $\Delta_3 = o$ in der That leicht auf eine Form bringen, so dass diese Eigenschaft der Fläche, eine Rückkehrkante zu besitzen, unmittelbar zum Ausdruck kommt. Ordnet man nämlich $\Delta_3 = o$ nach Potenzen von c:

$$c^2 + 2c\,(2a^3 - 3ab) = 3a^2b^2 - 4b^3$$

und ergänzt die linke Seite zum vollen Quadrat, so kommt als neuer Ausdruck der Discriminantenfläche:

$$\Delta_3{}^{*)} \equiv [c + a(2a^2 - 3b)]^2 + 4\,(b - a^2)^3 = o$$

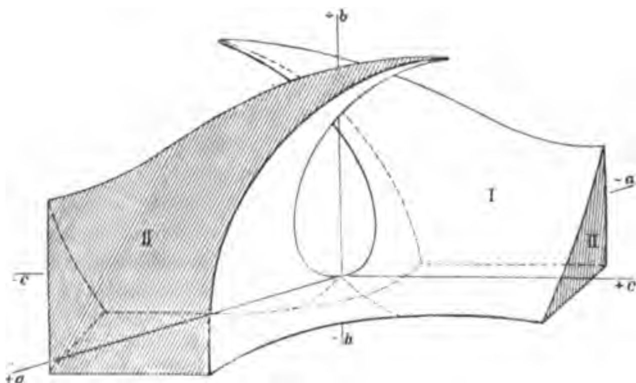


Fig. 1.

Die Discussion der Fläche selbst bietet nunmehr keine Schwierigkeiten. Fig. 1 stellt das zwischen $a = b = c = \pm$ const. liegende Stück derselben dar. Die Fläche teilt den ganzen Raum in 2 Räume R_1 und

*) Man beachte, dass $c + a\,(2a^2 - 3b)$ der Coefficient von x^3 in der Covariante Q, $b - a^2$ der Coefficient von x^2 in der *Hesse*'schen Covariante H ist; im Falle eben $G_3 \equiv (x - \lambda)^3$ ist, verschwinden sowohl Q als H identisch.

R_{II}, und für alle Punkte des Raumes R_I besitzt die Gleichung $G_3 = o$ eine, für die Punkte des Raumes R_{II} drei reelle Wurzeln, und zwar ist im Raume R_I der Ausdruck Δ_3 = positiv, in R_{II} dagegen negativ.

Die Gleichung vierten Grades besitzt vier Constante. Um also deren Discriminante geometrisch deuten zu können, wird man sie vorher so transformiren müssen, dass eine derselben einen bestimmten Wert annimmt. Für gewöhnlich transformirt man sie so, dass sie in die Hauptgleichung:

$$G_4 = x^4 + 6ax^2 + 4bx + c = o$$

übergeht. Die Discriminante dieser Gleichung hat *Kronecker* bereits vor 30 Jahren behufs Untersuchung der Realität der Wurzeln geometrisch discutirt. Ich will im Folgenden die Discussion der Discriminantenfläche selbständig kurz skizziren. Bekanntlich setzt sich die Discriminante einer Gleichung G_4 aus den beiden Invarianten i und j der Form G_4 in der Weise zusammen:

$$\Delta_4 = i^3 - 27 j^2$$

In den Grössen a, b, c ausgedrückt, erhält man:

$$\Delta_4 = (c + 3a)^3 - 27 (ac - a^3 - b^2)^2$$

Aus dieser Form erkennt man, dass die Fläche $\Delta_4 = o$ eine Rückkehrkante besitzt, welche sich als Schnitt der beiden Cylinder

$$c + 3a^2 = o \text{ (Gewöhnliche Parabel)}$$

$$b^2 + 4a^3 = o \text{ (Neil'sche Parabel)}$$

in ihrem räumlichen Verlauf leicht verfolgen lässt. Da aber $G_4 = o$ auch zwei Paar gleiche Wurzeln besitzen kann, so muss die Discriminantenfläche auch eine Doppelcurve haben, in welcher sich die Fläche selbst durchsetzt. In der That, entwickelt man in $\Delta_4 = o$ die beiden Potenzen, so reducirt sich die Gleichung der Discriminantenfläche auf

$$\Delta_4 = c (c - 9a^2)^2 - 27 b^2 (b^2 - 2ac + 2a^3) = o$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Fläche G_4 in der Ebene $b = o$ die Parabel $c - 9a^2 = o$ zur Doppelcurve hat. Während nun aber eine Rückkehrkante niemals isolirt verlaufen kann, ist das bei einer Doppelcurve sehr wohl möglich, und man hat nun zu untersuchen, inwieweit auf dieser Doppelcurve die Fläche sich wirklich selbst durchsetzt. Setzt man daher in der zuletzt erhaltenen Darstellung von Δ_4:

$$b = (b + \beta)_{b = o}$$

$$c = (c + \gamma)_{c = 9a^2}$$

wo β und γ unendlich kleine Grössen sind, vernachlässigt alle Glieder, die höhere als zweite Potenzen von β und γ zu Factoren haben, so erhält man nach geeigneter Reduction

$$\frac{\gamma}{\beta} = \pm 4 \sqrt{-3a}.$$

Daraus folgt, dass nur für negative a zwei reelle Fortschreitungsrichtungen existiren, dass also für positive a die Doppelcurve $c - 9a^2 = o$ isolirt verläuft.

Weitere singuläre Curven besitzt die Fläche nicht, da $G_4 = o$ nur dann eine vierfache Wurzel besitzt, wenn $a = b = c = o$.

Auf Grund der so ermittelten Eigenschaften der Fläche ist die weitere Discussion derselben sehr einfach. Fig. 2 stellt das zwischen den Ebenen $a = b = c = \pm$ const. liegende Stück derselben dar. Die Fläche teilt den Raum in 3 Räume R_I R_{II} R_{III}, für deren Punkte

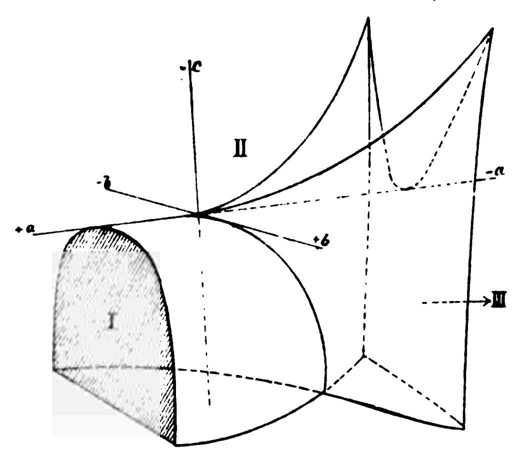


Fig. 2.

die Gleichung $G_4 = o$ der Reihe nach: 0, 2, 4 reelle Wurzeln besitzt. Man kann durch einfache Vorzeichencombinationen der Ausdrücke Δ_4, a und $P = c - 9a^2$ die drei Räume auch algebraisch definiren. Man hat nämlich:

Raum	reelle W.	Δ	a
R_I	0	+	+, oder wenn negativ P = +
R_{II}	2	—	
R_{III}	4	+	—, und auch P = —

Ungleich schwieriger wird die Discussion der Discriminantenfläche, wenn man nicht die oben benützte Hauptgleichung zu Grunde legt, sondern die Gleichung

$$G'_4 = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + 1 = o$$

In diesem Falle wird die Gleichung derselben:

$$\Delta'_4 = (1 - 4ac + 3b^2)^3 - 27(b + 2abc - b^3 - c^2 - a^2)^2 = o$$

Dieser Ausdruck lässt zwar die Existenz der Rückkehrkante erkennen, gestattet aber keineswegs a priori eine Vorstellung von dem räumlichen Verlauf derselben, wie dies im vorausgehenden Falle die beiden projicirenden Cylinder gewährten. Man kann sich nun, da die rationale Elimination einer der Coordinaten aus den Gleichungen $i = o$, $j = o$ in diesem Falle unausführbar ist, einen solchen Cylinder in folgender

Weise verschaffen. Wenn die Gleichung $G'_4 = o$ die dreifache Wurzel λ, die einfache Wurzel μ besitzt, so müssen die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} 3\lambda + \mu &= -4a \\ \lambda^2 + \lambda\mu &= 2b \\ \lambda^3 + 3\lambda^2\mu &= -4c \\ \lambda^3\mu &= 1 \end{aligned}$$

oder nach Elimination von μ:

$$1) \quad 3\lambda + \frac{1}{\lambda^3} + 4a = o$$

$$2) \quad \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 2b = o$$

$$3) \quad \lambda^3 + \frac{3}{\lambda} + 4c = o$$

Aus 2) folgt: $\lambda = \pm\sqrt{b + \sqrt{b^2 - 1}}$

Die vier Ausdrücke, welche man erhält, wenn man diese Werte von λ etwa in Gleichung 3 einführt, müssen identisch verschwinden. Also auch das Product dieser Ausdrücke, nämlich

$$o \equiv \Pi(\lambda^4 + Cc\lambda + 3) \equiv \Pi\,[(+\sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - 1}})^4 + 4c(+\sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - 1}}) + 3]$$

Dies liefert den projicirenden Cylinder:

$$P \equiv (4c^2 - b(b^2 + 3))^2 - (b^2 - 1)^3 = o,$$

welcher sehr leicht zu discutiren ist. da diese Gleichung sich nach c bequem auflösen lässt. Sie stellt zwei, bezüglich c symmetrisch gelegene Schnabelspitzen dar.

Um nun zum Ausdruck der Doppelcurve zu gelangen, hat man folgende Überlegung zu machen. Soll die Gleichung $G'_4 = o$, zwei Paar Doppelwurzeln besitzen, so muss, weil das constante Glied $= 1$ ist, sobald λ die eine Doppelwurzel ist, die andere entweder $+\frac{1}{\lambda}$ oder $-\frac{1}{\lambda}$ sein.

Im ersten Falle ist die Gleichung $G'_4 = o$ eine reciproke. Dann ist aber $a = c$, d. h., die Doppelcurve der Fläche liegt in der Ebene $a - c = o$. Die Discriminante einer reciproken Gleichung vom Grade $2n$ aber lässt sich, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, in sehr einfacher Weise durch die Discriminante ihrer Resolvente φ ausdrücken. Sind nämlich ξ_ι die Wurzeln der Gleichung G_{2n}, η_ι die Wurzeln ihrer Resolvente φ_n, so hat man:

$$\Pi(\xi_\rho - \xi_\mu)^2 = 16n(n-1)\,\varphi(+2)\,\varphi(-2).\left\{\Pi(\eta_\kappa - \eta_\iota)^2\right\}^2,$$

wo $\varphi(+2)$, $\varphi(-2)$ nichts anderes als die Substitutionsresultate von ± 2 in die Resolvente φ_n sind.

Diesen Satz benützend, erhält man als Schnitt der Ebene $a = c$, in welcher die Doppelcurve liegen muss, mit der Fläche Δ_4 sofort:

$$16^{12}(4a^2 + 2 - 6b)^2.(8a + 6b + 2)(-8a + 6b + 2) = o.$$

Dieser Schnitt zerfällt also in eine Parabel als Doppelcurve und ihre beiden Tangenten in den Punkten $b = +1$, $a = +1$.

Die zwei Berührungspunkte der Tangenten sind zugleich die Ausgangspunkte der Rückkehrkante, wie aus der Gleichung $P = o$ unmittelbar ersichtlich ist. In der That erhält auch G'_4 für $b = 1$, $a = c = \pm 1$ eine 4fache Wurzel. Auf dem endlichen Bogenstück zwischen diesen singulären Punkten der Fläche verläuft die Doppelcurve der Ebene $a = c$ isolirt.

Im zweiten Falle, wenn $G'_4 = o$ die Doppelwurzeln $+\lambda$ und $-\frac{1}{\lambda}$ hat, ergibt sich in ähnlicher Weise, dass der in der Ebene $a + c = o$ gelegene Schnitt die Form hat:

$$o = (4a\sqrt{-1} + 3b - 1)(-4a\sqrt{-1} + 3b - 1)(2a^2 - 3b - 1)$$

Die Fläche besitzt also noch eine Parabel als Doppelcurve, die wie die Untersuchung lehrt, nirgends isolirt verläuft.

Damit sind alle Singularitäten erschöpft. Berücksichtigt man nun, dass Δ'_4 in Bezug auf a und c symmetrisch ist, sowie, dass der Schnitt $a = o$ in Δ'_4 mit dem Schnitt $c = +1$ in Δ_4 übereinstimmen muss, so findet man ohne weitere Rechnung, dass die Discriminantenfläche die Gestalt der Fig. 3 hat. Sie teilt den Raum in 6 im Endlichen getrennte Teile R_I, R_{II}, R_{III}, in welchen $G'_4 = o$ der Reihe nach 0, 2, 4 reelle Wurzeln hat, entsprechend den Vorzeichen $+$, $-$, $+$ der Discriminante.

(G. Kerschensteiner.)

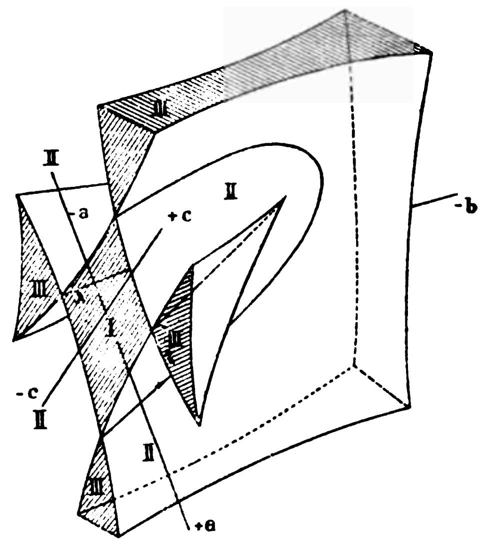


Fig. 3.

47 Gypsmodell von Sylvester's Amphigenous Surface, einer Fläche 9. Ordnung, ausgeführt und ausgestellt von Prof. **O. Henrici,** City and Guilds Central Institution, London.

Prof Sylvester hat in seiner grossen Abhandlung „*On the real and imaginary Roots of Algebraical Equations* (Phil. Trans. 1864)" eine

invariante Bestimmung der Realität der Wurzeln einer Gleichung 5. Grades gegeben und dieselbe in ein geometrisches Gewand gekleidet, welches durch das Modell veranschaulicht wird.

Er nimmt drei Invarianten der Gleichung J, D und L von der 4., 8. und 12. Ordnung. D insbesondere ist die Discriminante. Er setzt

$$G \equiv JK^4 + 8\,LK^3 - 2\,J^2LK^2 - 72\,JL^2K - 432\,L^3 + J^3L^2;$$

wo $128\,K \equiv J^2 - D$ ist. G ist also von der 9. Ordnung in den J, D, L. Nimmt man diese oder ihnen proportionale Grössen x, y, z als rechtwinkelige Coordinaten, so ist $G = 0$ die Gleichung einer Fläche 9. Ordnung, welche im Modell repräsentirt ist.

Die Coordinaten der Punkte auf der Fläche $G = 0$ lassen sich rational durch zwei Parameter ausdrücken. Als den einen kann man J wählen, der andere heisse φ. Dann hat man

$$D = \frac{(\varphi + 2)^2(\varphi - 3)}{\varphi^2(\varphi + 1)} J^2; \quad L = \frac{1}{256}\frac{J^3}{\varphi^3(\varphi + 1)}.$$

Der Wert $\varphi = -2$ gibt $D = 0$, $J^3 = 2048\,L$. Aber D wird unendlich klein zweiter Ordnung. Die Ebene $D = 0$, welche die Discriminantenebene heissen mag, berührt die Fläche also längs einer cubischen Parabel.

Für $\varphi = \infty$ erhält man $L = 0$, $D = J^2$, eine Parabel in der Ebene $L = 0$. Diese ist Cuspidalcurve der Fläche. Ihre Schnitte geben Spitzen zweiter Art.

Endlich gibt $\varphi = -\frac{3}{4}$ für welchen Wert $\frac{dL}{d\varphi}$ und $\frac{dD}{d\varphi}$ verschwinden, eine zweite Cuspidalcurve mit den Gleichungen

$$L = -\frac{1}{27}J^3, \quad D = -\frac{125}{3}J^2.$$

Ihre Schnitte sind gewöhnliche Spitzen.

Diese beiden Curven, welche der Fläche ihren Charakter geben, berühren im Anfangspunkt der Coordinaten einander, die Axe der J ist gemeinschaftliche Tangente.

Im Modell ist die Axe der L vertical, positiv abwärts, die der J die horizontale Tangente der Cuspidalcurven im Mittelpunkt. Die Axe der D, welche ganz in der Fläche liegt, ist durch eine rote Linie markirt. Die Discriminantenebene ist durch ein lose aufgesetztes Stück Carton vertreten, auf welchem die Axe der J und L verzeichnet ist. Die schwarz markirte Curve ist der, dem in Sylvester's Abhandlung abgebildeten Schnitte $J = 1$ congruente Schnitt $J = -1$.

Im Modell kann man sich auch dadurch orientiren, dass für den pfeilerartig emporsteigenden Teil J, D, L die Zeichen $- + -$ haben.

Es ist auch zu bemerken, dass mit einem Zeichenwechsel von J und L auch G sein Zeichen wechselt, d. h. die Fläche $G = 0$ fällt nach einer halben Umdrehung um die D-Axe mit ihrer ursprünglichen Lage zusammen und teilt daher den Raum in zwei congruente Teile.

Zur Construction wurde $6\,J = x$, $\frac{3}{8}\,D = y$, $1024\,L = z$ gesetzt und $\frac{1}{8}$ Englischer Zoll als Längeneinheit gewählt.

Das Modell ist begrenzt durch die Ebenen $x = \pm 32 \cdot 2$, $y = \pm 31$, $z = \pm 50 \cdot 6$.

Kehren wir zu Sylvester's Theorie zurück. J, D, L sind Invarianten einer linearen Form 5. Grades. Jeder Gleichung 5. Grades mit *reellen* Coëfficienten entspricht daher ein reelles Wertsystem von J, D, L und G, daher ein reeller Punkt im Raum und zwar entspricht ein solcher Punkt einer ganzen Familie von Gleichungen, für welche obige Invarianten dieselben Werte haben. Aber auch für Gleichungen mit imaginären Coëfficienten können diese Invarianten reell sein. Ihnen entsprechen also auch reelle Punkte. Diese heissen *nonfacultativ*, die anderen, welche Gleichungen mit reellen Punkten entsprechen, *facultativ*. Die einen werden von den andern durch die Fläche $G = o$ getrennt, wie im Modell die Fläche den Gips von der Luft trennt. Punkte in letzterer nehmen wir als facultativ an. Mit diesen allein haben wir es zu thun.

Die Discriminantenebene teilt diesen Raum in drei Teile. Auf ihrer positiven Seite liegt die parabolische, auf der andern die doppelt gekrümmte Cuspidalcurve. Auf der positiven Seite liegt ferner der Teil der Fläche, welcher die Discriminantenebene berührt. Der Luftraum an dieser Seite wird daher in zwei Teile geteilt, die sich längs der Berührungscurve begrenzen. Der eine dieser Teile ist dadurch bestimmt, dass er zwischen den Flächenteilen, welche an der parabolischen Cuspidalcurve zusammenhängen, liegt. Dieser Teil heisse A, der andere Teil an der positiven Seite der Discriminante C und der auf der negativen Seite der Discriminante gelegene Raum B. Dann hat man den Satz: Liegt der einer Gleichung 5. Grades mit reellen Coefficienten entsprechende Punkt im Raum A, so sind alle Wurzeln reell, im Raum B sind zwei und in C vier Wurzeln imaginär. In der Discriminantenebene sind natürlich immer wenigstens zwei Wurzeln einander gleich. Sie wird durch die Berührungscurve in zwei Teile geteilt. In dem Teile, welcher den Raum A von B trennt, sind alle Wurzeln reell und zwei gleich. In dem Teile zwischen C und B sind zwei Wurzeln imaginär und zwei gleich. Auf der Berührungscurve selber sind *zwei* Paare gleicher Wurzeln und zwar auf dem oberen Zweige sind diese Wurzeln reell, auf dem unteren imaginär. Im Coordinatenanfang endlich sind drei Wurzeln einander gleich.

(O. Henrici.)

---

48 **Drei Modelle Riemann'scher Flächen.** Nach Angabe von Prof. **H. A. Schwarz**, Univ. Berlin. Verlag **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 197—199.

(*197*) Modell einer *zweiblättrigen einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche*, welche in ihrem Innern einen Windungspunkt *erster* Ordnung enthält.

(*198*) Modell einer ***dreiblättrigen einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche***, welche in ihrem Innern einen Windungspunkt ***zweiter*** Ordnung enthält.

(*199*) Modell einer ***dreifach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche*** mit ***einer*** in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie. (Siehe Riemann's Gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, Seite 89, Figur 3.)

49 **16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen.** Im **math. Institut der techn. Hochschule München** ausgeführt (1886) unter Leitung von Prof. **W. Dyck.** Verlag von **L. Brill, Darmstadt.**

Vergl. *Specialkatalog 173—182.*

Die vorliegende Serie von Modellen ist entstanden im Anschluss an eine einleitende Vorlesung über Functionentheorie. Die Schwierigkeit einer möglichst anschaulichen Schilderung des Verhaltens einer Function in der Umgebung singulärer Stellen liess den Wunsch aufkommen, auch auf diesem Gebiete und wenigstens für die wichtigsten singulären Vorkommnisse das Hilfsmittel räumlicher Anschauung zu besitzen, das schon auf einer Reihe anderer Gebiete so zweckmässig und fördernd im Unterricht sich erwiesen hat.

Um den Verlauf einer Function einer complexen Veränderlichen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen und ebenso den Gesamtverlauf gewisser Typen von Functionen einer complexen Veränderlichen durch eine räumliche Darstellung zu veranschaulichen, sind, in der bekannten Weise, sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil der Functionswerte über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So wird jede Function eines complexen Argumentes durch zwei, mit R und I bezeichnete Flächen versinnlicht, deren gleichzeitige Betrachtung ein Bild des Functionsverlaufes liefert. Zur genaueren Charakteristik der Wertsysteme sind auf den Flächen Niveaulinien in gleichen Abständen (die Einheit des Masstabes = 3 cm) aufgetragen und die zugehörigen Orthogonaltrajectorien. Dabei stehen die jedesmal zusammengehörigen Modelle R und I in der Beziehung zu einander, dass die Projection der Niveaulinien und Fallinien der einen Fläche in die Ebene des complexen Arguments mit der Projection der Fallinien bezw. Niveaulinien für die andere Fläche in eben diese Ebene identisch ist.

Die Serie enthält folgende Darstellungen:

Die Modelle I, II und III, ausgeführt von Lehramtscandidat *Wildbrett*, veranschaulichen das Verhalten einer Function in der Nähe von Verzweigungsstellen und zwar:

I. (*173.*) Für $w^2 = z^2 - 1$.
II. (*174.*) Für $w^2 = z^4 - 1$.
III. (*175.*) Für $w^4 = 1 - z^2$.

Die Modelle IV und V, ausgeführt von Lehramtscandidat *Wildbrett*, Assistent *Burkhardt* und stud. *Kleiber*, dienen zur Darstellung des Zu-



sammenrückens zweier logarithmischer Unendlichkeitspunkte in einen (einfachen) algebraischen und zwar gibt Modell:

IV. (*176.*) Die Function $w = \frac{1}{z}$.

V. (*177.*) Die Function $w = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{z - \varepsilon}{z + \varepsilon} \left(\varepsilon = \frac{\pi}{4}\right)$.

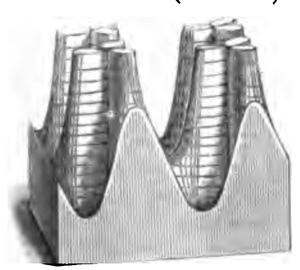
Modell VI, ausgeführt von stud. *Kleiber*, gibt das Verhalten einer Function in der Umgebung des einfachsten, wesentlich singulären Punktes durch

VI. (*178.*) $6\,w = e^{\frac{1}{6z}}$.

Die Modelle VII—X, ausgeführt von Assistent *Burkhardt* und Lehramtscandidat *Wildbrett*, veranschaulichen den Verlauf der elliptischen Functionen $p(u)$ und $p'(u)$ (in der Weierstrass'schen Normalform) und zwar speciell:

VII. u. VIII. (*179. 180.*) Für die Invarianten $g_2 = 4$, $g_3 = o$.

IX. u. X. (*181. 182.*) Für die Invarianten $g_2 = o$, $g_3 = 4$.





In den Modellen VII und VIII ist die Symmetrie der Flächen innerhalb des Periodenquadrates (es sind jedesmal vier solcher modellirt) ausser durch die Relationen

$$p(-u) = p(u), \quad p'(-u =) \; - p'(u)$$

durch die hier speciell geltenden Beziehungen

$$p(iu) = -p(u), \quad p'(iu) = i\,p'(u)$$

bezeichnet. Die Modelle kennzeichnen ebenso wie die folgenden Nr. IX und X in charakteristischer Weise das Verhalten einer Function in der Umgebung eines zweifachen [für $p(u)$] bezw. dreifachen [für $p'(u)$] Unendlichkeitspunktes.

In den Modellen IX und X hat man für die Bezeichnung der in den Flächen ersichtlichen Symmetrien die Relationen:

$$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon^4 \wp(u), \quad \wp'(\varepsilon u) = \varepsilon^3 \wp'(u),$$

wo ε eine sechste Einheitswurzel bezeichnet.

(Dyck.)

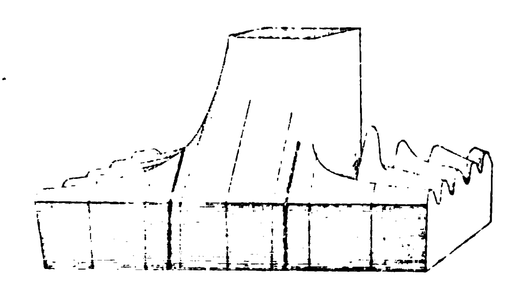
50 **Vier Tafeln zur Veranschaulichung des Verlaufes der elliptischen Functionen p (u) und p' (u).** Ausgeführt (1886) von Assistent **Burkhardt** und Lehramtscandidat **Wildbrett** im **Math. Institut der techn. Hochschule in München** (Prof. **Dyck**).

Die Tafeln schliessen direct an die vorstehenden Modelle VII—X für die Invarianten $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ und $g_2 = 0$, $g_3 = 4$ an.

Vergl. hiezu den *Specialkatalog* von *Brill* und die den Modellen beigegebene Abhandlung.

51 **Darstellung der elliptischen Function** $\varphi = \text{am}\,(u, k)$ **durch eine Fläche.** Ausgeführt im **Mathematischen Institut der technischen Hochschule München** unter Leitung von Prof. **Brill**, ausgeführt von studd. math. **Kuen** und **Wolff** (1880). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 80 (pag. *13* und *70*).



Die Grösse φ wurde vertical, k und u horizontal aufgetragen (Masstab für k-Axe wurde $\frac{3}{2}$ mal so gross als der für die 2 andern Grössen genommen). Für $k^2 < 1$ genügen zur Construction des Modelles die Legendre'schen Tabellen und in diesem Intervall erstreckt sich die Fläche auch in verticaler Richtung in's Unendliche. Zur Construction des Modells für die Werte $k^2 > 1$ muss man das elliptische Integral:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

in ein anderes solches Integral mit einem Modul $\lambda^2 < 1$ transformiren, am besten durch die Annahme $\lambda^2 = \frac{1}{k^2}$. Es ergibt sich dann, dass im Intervall $k^2 > 1$ das Modell in verticaler Richtung sich

nicht ins Unendliche erstreckt, sondern eine endliche Höhe besitzt, die um so kleiner wird, je grösser k^2 ist. Näheres vgl. die dem Modell beigegebene Abhandlung. (Kuen.)

52 **Bogen und Scala zum Abmessen der numerischen Werte der elliptischen Functionen,** von Prof. **A. G. Greenhill**, President London Math. Soc., Artillery College Woolwich.

Die Theorie des Instruments beruht auf der Eigenschaft von *Bernoulli's elastischer Curve*, wonach die Ordinate y und der Bogen s derselben durch die Relation verknüpft sind:

$$y = 2ck \operatorname{cosam} \frac{s}{c},$$

während der Modularwinkel φ gleich ist dem halben Winkel, unter welchem der Bogen die Sehne schneidet. (Greenhill.)

53 **Modell zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen**, von **F. Klein** Univ. Göttingen. Ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule in München**.

Das Modell stellt die reguläre (168 blättrige) Riemann'sche Fläche (vom Geschlechte $p = 3$) dar, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen entspricht. Die 2.168 Gebiete der Einteilung stossen zu je 2.2, 2.3, 2.7 zusammen. Die Anordnung der Gebiete auf ein (durch's Unendliche zusammenhängendes) Axenkreuz soll eine in der Gruppe der Modulargleichung enthaltene Oktaederuntergruppe hervorheben.

(Dyck.)

54 **Drei Kugeln mit aufgezeichneten quadratischen Orthogonal-Curven-Systemen,** ausgeführt (1891) von Assistent **J. Kleiber** im **Math. Institut der technischen Hochschule München** (Prof. **Dyck**).

Transformirt man durch die Formeln

a) $z' = k\, e^{\alpha z}$

b) $z' = k^2 . \frac{1}{z}$

c) $z' = k^2 . \frac{e^{\alpha z} + a}{e^{\alpha z} - a}$ $\quad [\alpha = 1 + 2i]$

das in der Gauss'schen Ebene $z = x + iy$ gelegene quadratische Gitter $x = c\eta$, $y = c'\eta$, wo c und c' ganze Zahlen, η die Länge der Quadratseite bedeutet, so erhält man in der Ebene 3 sog. quadratische Orthogonalsysteme, die in geeigneter Weise stereographisch auf die Kugel projicirt, auch auf dieser je eine quadratisch orthogonale Einteilung, im Fall a) von Loxodromen, in den Fällen b) und c) von Kreisen liefern.

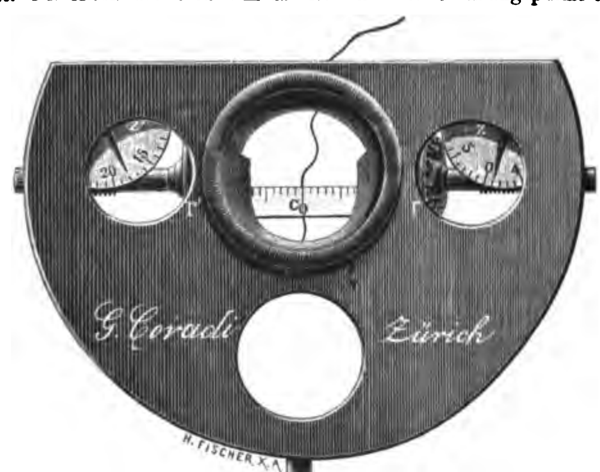
(Kleiber.)

Dritter Abschnitt. Integralrechnung.

E. Curvometer.

55 **Linienmesser (Curvometer),** construirt und ausgestellt von **G. Coradi, Zürich.**

Das Instrument dient zur ***Messung horizontaler Längen auf Karten und Plänen.*** Die Axen der beiden Messrollen und der Führungspunkt c liegen



in einer Linie und die Ränder der beiden Rollen, mit welchen das Instrumentchen auf dem Plan aufliegt, haben genau gleichen Abstand vom Punkte c. Die Teilung beider Rollen ist in gleicher Richtung beziffert. Dreht man nun das Instrumentchen um den Punkt c, ohne es vorwärts zu bewegen, so wird die Summe beider Abwicklungen = 0 sein: bewegt man das Instrumentchen in gerader Linie fort, so gibt jede der Rollen die Hälfte des von c durchlaufenen Weges an. Befährt man nun irgend eine Curve, indem man die Axen der Rollen senkrecht zum jeweiligen Curvenelement hält (eine Abweichung von der Senkrechten um 8° gibt erst eine Differenz von $^1/_{100}$), so wird die Summe der beiden Ablesungen den vom Punkt c durchlaufenen Weg angeben; 1 Teil an den Rollen bedeutet 1 Millimeter. Eigene Versuche ergaben bei geraden Linien eine Genauigkeit von ca. $^1/_{2000}$.

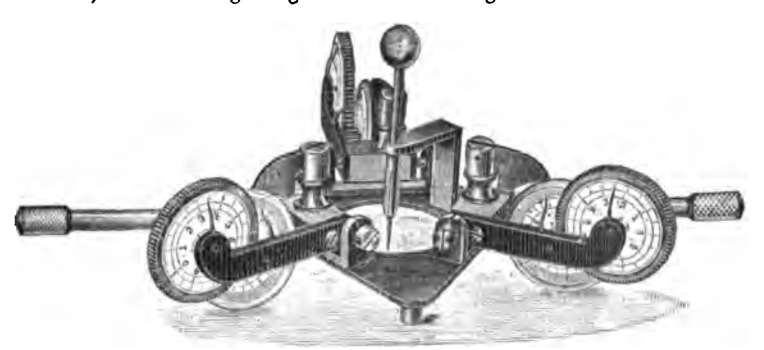
(Coradi.)

56 **Vier Kartometer**, D. R.-P. Nr. 45727, construirt von **E. Fleischhauer** in Gotha, ausgeführt und ausgestellt von **L. Tesdorpf** in Stuttgart.

I. Beschreibung.

Die wesentlichen Teile dieses Instruments zur Messung der Länge unregelmässig gestalteter Linien sind:

1) die Grundplatte, an welcher die Halter für
2) die — einseitig gesperrten — Räder angebracht sind und welche in ihrem Mittelpunkte
3) den Fahrstift trägt; endlich dienen
4) zwei Führungsstangen zur Handhabung des Instruments.



Bei den ausgestellten Instrumenten sind 3 bez. 5 und 7 Räder vorhanden. Die Fahrräder sind mit Zifferblättern versehen und je ein weiteres Rad, welches mit zehnfacher Übersetzung vom Fahrrad aus getrieben wird, gestattet die Vielfachen der ganzen Radumdrehungszahlen abzulesen. Die in gleichen Winkelabständen angebrachten Fahrräder, deren Spurkränze auf dem Papier aufliegen, sind einseitig gesperrt: sie können sich nur nach aussen drehen, während jede Drehbewegung, welche ein Rad einwärts ausführen will, durch die Schneide einer Sperrklinke, die sich in eine um die Radstirn gelegte Gummibandage einpresst, aufgehalten wird. Der jeweilige Stand des Instruments ist die Summe der vollständigen Ablesungen an den drei Radzählwerken.

II. Andeutung der Theorie.

(Vgl. den Aufsatz von Prof. *Hammer* in Zeitschr. für Instrumentenkunde, 9. Jahrgang, April 1889, S. 136 ff.) Bezeichnet λ den Winkel, welchen die Fahrrichtung mit der Ebene eines der Rädchen einschliesst und ds den durchlaufenen Weg, so ist die Summe der Radablesungen durch die Formel:

$$\frac{ds}{2}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n}\left|\cos\left(\frac{\varkappa\,\pi}{n}-\lambda\right)\right|$$

gegeben, aus welcher geschlossen werden kann, dass jene Σ um so unabhängiger von λ, d. h. der Fahrrichtung wird, je grösser n, d. h. die Anzahl der Rädchen ist.

Nur bei einer sehr grossen Anzahl von Rädern würde das Instrument ohne weiteres theoretisch befriedigende Resultate geben; noch bei 5 Rädern könnte bei einseitiger Handhabung im *schlimmsten Falle* der regelmässige Fehler auf etwas über 5% der durchfahrenen Länge steigen, bei

7 Rädern würde sich dieser Betrag bereits auf $^1/_3$, bei 9 Rädern auf weniger als $^1/_8$ jener Zahl ermässigen. Aber auch schon mit 3 Rädern lassen sich praktisch genügende Resultate erreichen. Die Annahme, auf welcher die Anwendung des Instruments beruht, ist folgende: ist N_1 der Stand des Instruments (vgl. 1) *vor*, N_2 *nach* Durchfahrung einer bestimmten, beliebig geformten Linie, also $N_2 - N_1 = n$ die Anzahl der von allen Rädern zusammen während der Durchfahrung ausgeführten Umdrehungen, so ist n der durchfahrenen Länge proportional.

III. Gebrauchsanweisung.

1. Zunächst hat man die *Constante* des Instruments, am besten indirect in folgender Art zu bestimmen: Man führt den Fahrstift sorgfältig über den Umfang eines Kreises von genau abgestochenem Halbmesser von einem Punkte des Umfangs aus bis zum gleichen Punkte zurück, und wiederholt zweckmässig sogleich diese Umfahrung in entgegengesetzter Richtung; vor und nach jeder Umfahrung notirt man den Stand der Zählwerke und während der Umfahrung sieht man darauf, dass die Führungsstangen ihre Richtung *ungefähr* beibehalten.

2. Bei Bestimmung der Länge einer vorgelegten unregelmässigen Linie bringt man das Instrument so auf die Zeichnung, dass der Fahrstift im Anfangspunkt steht und die Führungsgriffe bequem liegen, notirt den Stand der Zählwerke und durchfährt nun die gegebene Linie so, dass die Führungsgriffe ungefähr ihre ursprüngliche Richtung beibehalten. Ist der Fahrstift im Endpunkte angelangt, so wird der Stand der Zählwerke wieder abgelesen. Ist n die Differenz der Ablesungssummen vor Beginn und nach Beendigung der Durchfahrung, so ist k . n die gewünschte Länge. Es ist aber, da der Apparat nur 3 Räder besitzt, dringend zu raten, die Befahrung der Linie zu wiederholen, wobei das Instrument so zu legen ist, dass die neue, für *diese* Befahrung ebenfalls wieder *ungefähr* beizubehaltende Richtung der Führungsstangen mit der bei der ersten Befahrung vorhandenen nahezu einen rechten Winkel einschliesst. Man erhält so eine zweite Angabe für die Länge der durchfahrenen Strecke, welche unter Umständen von dem ersten Ergebnis nicht unerheblich abweicht, während, wie man sich durch wiederholte Befahrung der gegebenen Linie in *derselben* Lage des Instruments überzeugen kann, der *unregelmässige* mittlere Fehler einer Befahrung wesentlich kleiner ist. Das *Mittel* beider Bestimmungen ist von dem weitaus grössten Teil des sich auf diese Art zeigenden *regelmässigen* (*einseitigen*) Fehlers befreit.

Preise der Instrumente.

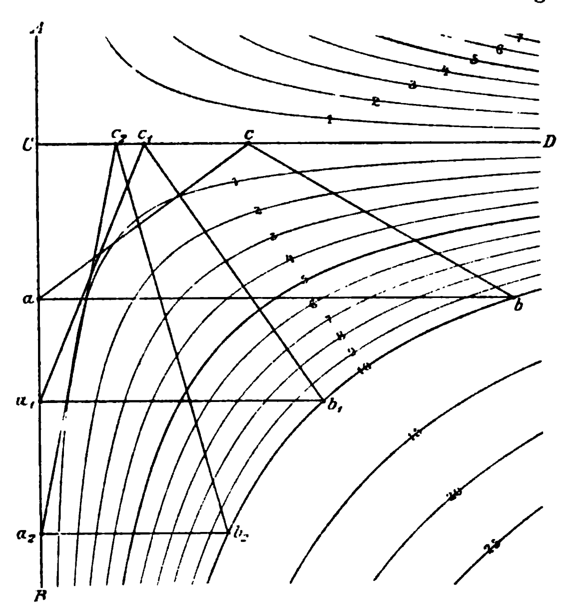
Nr. I. *Kartometer* mit 3 Rollenpaaren . . . . M. 25.—
Nr. II. Derselbe mit 5 Rollenpaaren . . . . „ 40.—
Nr. III. Derselbe mit 7 Rollenpaaren . . . . „ 50.—

(Prospect Tesdorpf, Finsterwalder.)

F. Planimeter.

57 **Zwei Hyperbeltafeln auf Glas, als Planimeter dienend,** von **M. Kloth** in Osnabrück.

In den Quadranten ACD und BCD befinden sich Hyperbeln, deren jede die Eigenschaft hat, dass das Product der Abstände eines ihrer Punkte von den beiden Axen constant ist. — Diese gleichseitigen



Hyperbeln sind also geometrische Orte für die Eckpunkte b, b_1, b_2... gleich grosser Dreiecke a b c bezw. $a_1 b_1 c_1$ bezw. $a_2 b_2 c_2$...., deren Grundlinien parallel der Axe CD sind. — Trägt man die Curvenzeichnung transparent auf eine Glastafel derart auf (Photographie auf Glas), dass die Axe AB mit der linken Kante der Glastafel parallel ist, und versieht die Curven mit einer Bezifferung, welche dem Flächeninhalt der bez. Dreiecke entspricht, so bildet diese Anordnung ein einfaches Mittel graphischer Flächenberechnung.

Bei Ermittelung des Flächeninhalts eines Dreiecks beispielsweise legt man die Glastafel derart auf das Dreieck, dass ab von C D gedeckt wird, während a und C zusammenfallen, und verschiebt die Tafel längs eines an die linke Kante angelegten Lineals soweit, bis c in C D fällt; sodann liest man aus der Lage des Punktes b gegen das Curvensystem den Flächeninhalt des Dreiecks ab. — Bei Ermittelung des Flächeninhalt eines Vierecks bildet die eine der beiden Diagonalen die Operationsbasis, u. s. w.

Die Tafeln sind in den für geometrische Karten gebräuchlichen Masstabsverhältnissen entworfen.

Der Verkaufspreis beträgt 7 Mark pro Stück.

(Kloth.)

---

58 **Planimeter nach Wetli-Hansen** aus dem mechanisch-optischen Institute von **Hermann Ausfeld** in Gotha. Ausgestellt vom **Geodätischen Institut der techn. Hochschule München.** (Vorstand Prof. **M. Schmidt.**)

Das Planimeter ist durch wesentliche im Jahre 1849 durch *Wetli* angegebene Verbesserungen der *Oppikofer'schen* Erfindung entstanden und unterscheidet sich von der ersten Wetli'schen Construction durch weitere von Hofrat *Hansen* und dem Verfertiger *Ausfeld* in Gotha herrührende Verbesserungen. Es kann als *Linear-Scheiben-Planimeter* bezeichnet werden.

(M. Schmidt.)

59 **Hyperbelplanimeter**, von **J. Stadler**, ausgestellt von der **Lehrkanzel für Geodäsie der k. k. techn. Hochschule in Graz (Prof J. Wastler).**

Dieses Instrument wurde in der ersten Hälfte der fünfziger Jahre von Herrn *Josef Stadler*, Bergrat und Director der kaiserlichen Berg- und Hüttenwerke zu *Eisenerz* in *Steiermark*, ersonnen und im Jahre 1855 durch den Bergbeamten *Georg Smollin* unter *Stadlers* Leitung ausgeführt. Ein Aufsatz über dasselbe aus der Feder des Erfinders steht in der Zeitschrift „Erfahrungen im berg- und hüttenmännischen Bau- und Aufbereitungswesen“, herausgeg. von *Rittinger*, und zwar im Jahrgange 1857. Obwohl die Erfindung hiemit der Öffentlichkeit übergeben war, blieb sie doch völlig unbekannt, und *Stadler* selbst legte offenbar späterhin, nachdem von anderer Seite einfachere und praktisch brauchbarere Instrumente construirt worden waren, auf die weitere Ausnützung der diesem Planimeter zugrunde liegenden Idee keinen Wert. Es war ihm überdies eine andere Idee gekommen, die in dem zweiten hier ausgestellten Instrumente, dem „Rollplanimeter“ verwirklicht wurde. Welche Umstände aber *Stadler* gehindert haben, dieses letztere zu vollenden und bekannt zu machen, hat sich nicht ermitteln lassen. Er ist im Jahre 1871 gestorben, und die Modelle, welche in seinem Nachlasse gefunden wurden, blieben bis zum Jahre 1884 im Besitze der Familie, ohne dass sonst jemand etwas von ihnen wusste. Dann wurden sie, als historisch merkwürdige Stücke, in die Instrumentensammlung der Lehrkanzel für Geodäsie an der k. k. technischen Hochschule in Graz aufgenommen.

Aus dem oben erwähnten Aufsatze geht hervor, dass *Stadler*, ohne die Principien und die Construction der früher erfundenen Planimeter von *Wetli* und *Ernst* zu kennen, auf die blosse Nachricht hin, „dass

man Instrumente construirt habe, welche den Flächeninhalt jeder, wie immer regelmässig oder unregelmässig begrenzten Figur anzuzeigen vermögen, wenn man nur den Umfang der Figur mit einer zu diesem Zwecke an dem Instrumente angebrachten Spitze umfährt," sich selbständig an die Lösung der Aufgabe gemacht habe „aus dem Umfange einer Figur ihren Flächeninhalt abzuleiten". Der Gedanke, auf welchem das hierauf von ihm erfundene Instrument beruht, ist folgender. Es sei (Fig. 1) die Umfangslinie L auf das rechtwinklige Coordinatensystem XOY bezogen, OM = x, MP = y seien Abscisse und Ordinate eines Punktes P derselben, MM'P'P" ein Elementarflächenstreifen von der Breite MM' = dx. R ist ein Rotationskörper, dessen Axe parallel der Axe OY gerichtet ist, oder etwa mit derselben zusammenfällt, ABab ein Rahmen, von dem zunächst angenommen wird, dass

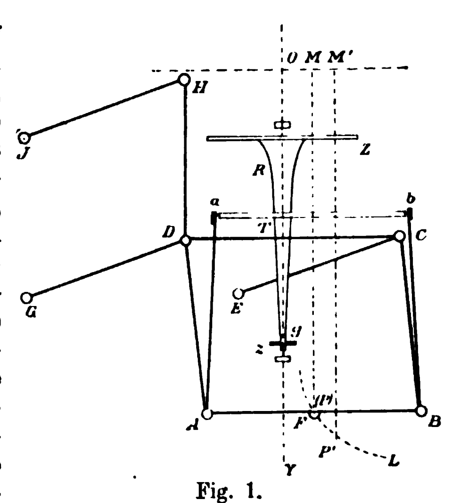


Fig. 1.

er stets parallel zur Ebene der Figur verbleibt, während der an irgend einer Stelle mit ihm fest verbundene Fahrstift F die Linie L entlang geführt wird und die Kante ab auf dem Rotationskörper aufruht. Diese Bewegung des Rahmens ist durch die beiden parallelogrammatischen Führungsmechanismen ABCD, JHDG, derart beschränkt, dass die Kante ab stets der Axe OX parallel bleibt. Unter dieser Voraussetzung erteilt die Rahmenkante ab dem Rotationskörper R, wenn der Fahrstift F von P nach P' rückt, durch die Reibung eine Umdrehungsbewegung, infolge deren der augenblickliche Berührungspunkt T den Weg dx auf dem zugehörigen Parallelkreise zurücklegt. Ist also ξ der Radius dieses Parallelkreises, so ist

$$d\omega = \frac{dx}{\xi}$$

der Winkel, um welchen sich der Rotationskörper dreht. Will man nun haben, dass dieser Winkel dem Flächenstreifen MM'PP' = ydx proportional sei, so muss, unter k^2 eine constante Zahl verstanden,

$$d\omega = \frac{dx}{\xi} = \frac{1}{k^2}\cdot ydx$$

also:

$$\xi = \frac{k^2}{y}$$

sein. Bezeichnet man daher mit α die Entfernung der beiden parallelen Rahmenkanten AB und ab, mit η die Ordinate OT von T, so folgt aus der angestellten Betrachtung die Beziehung

$$\xi(\eta + \alpha) = k^2$$

als Gleichung der Meridiancurve des Rotationskörpers, und sie stellt, wie man sieht, eine gleichseitige Hyperbel dar, welche die Asymptoten $\xi = 0$, $\eta = -a$ hat.

Die oben gestellten beiden Forderungen: 1) dass der Rahmen ABab stets parallel der Ebene der Figur verbleibe; 2) dass die Differenz MF — OT, unter OT die Ordinate des Berührungspunktes T verstanden, den constanten Wert α behalte, sind in brauchbarer Weise mechanisch nicht zu erfüllen. Beim *Stadler*'schen Apparate dreht sich der Rahmen ABab um die Kante AB; ab ist eine drehbare cylindrische Walze von sehr kleinem Durchmesser. Im Aufriss stellt sich dann die Lage dieser wesentlichen Teile schematisch wie in Fig. 2 dar. Es sei darin μ die Meridiancurve von R, T der augenblickliche Berührungspunkt der Walze ab mit dieser, mT = ρ der Radius der letztern, mn = α die Distanz der Walzenaxe von der Drehungsaxe des Rahmens, F der Fahrstift, von dem ohne wesentliche Änderung des Resultates angenommen werden kann, dass seine Axe durch die letztgenannte Drehungsaxe gehe. Man kann nun nach der Gestalt der Curve μ fragen, welche der Forderung genügt, dass stets:

Fig. 2.

$$NT \,.\, OP = k^2$$

ist. Setzt man ON = η, NT = ξ, Pn = β, so ergibt dies für die Curve μ die Differentialgleichung:

$$\left[(\xi\eta - k^2)^2 + \xi^2 \left[(\xi - \beta)^2 + \rho^2 - \alpha^2\right]\right]^2 \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right] =$$
$$= 4\rho^2\xi^2 \left\{\xi\eta - k^2 - \xi(\xi - \beta)\frac{d\eta}{d\xi}\right\}^2.$$

Man kann sich aber auch die Construction so ausgeführt denken, dass der Rahmen ABab wirklich stets parallel zur Ebene der Figur, also mn || OH bleibt; dann erhält man die einfachere Differentialgleichung:

$$\left[\xi[\eta + \alpha] - k^2)\right]^2 \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right] = \rho^2\xi^2.$$

Keine dieser beiden Differentialgleichungen ist im gewöhnlichen Sinne integrabel, man kann ihnen aber durch Reihen von der Form:

$$\eta + \alpha = \frac{k^2}{\xi} + \xi \mathfrak{P}(\xi)$$

genügen, so dass für hinlänglich kleine ξ die Curve von der Hyperbel beliebig wenig abweicht. An dem vorliegenden Instrumente ist die Meridiancurve von R jedoch auch wirklich keine Hyperbel, sondern es wurde ihr, wie *Stadler* angibt, die exacte Form dadurch erteilt, dass nach beiläufiger Herstellung der geforderten Gestalt, mit dem Fahrstifte Rechtecke von gemeinschaftlicher Basis, deren Höhen in bekanntem Verhältnis standen, umfahren und die hiebei ins Spiel kommenden Parallelkreise des Rotationskörpers solange corrigirt wurden, bis die Angaben des Apparates den Verhältnissen entsprachen. Schliesslich wurde der Rotationskörper zwischen den fixirten Kreisen gleichförmig abgedicht. Seine Meridiancurve entspricht also einem Integrale der ersten der beiden obenstehenden Differentialgleichungen.

Der Rotationskörper R ist mit der in 600 Teile geteilten Zählscheibe Z verbunden, welche durch das Getriebe g ihre Bewegung auf die kleinere Zählscheibe Z überträgt, die zur Ablesung der ganzen Umdrehungen von Z dient.

(Lichtenfels.)

60 **Rollplanimeter**, von **J. Stadler**, ausgestellt von der **Lehrkanzel für Geodäsie der techn. Hochschule in Graz** (**Prof. J. Wastler**).

Das Hyperbelplanimeter summirt direct die Elemente $y\,dx$ und könnte also zu einem Integraphen umgestaltet werden. Dem gegenüber gehört

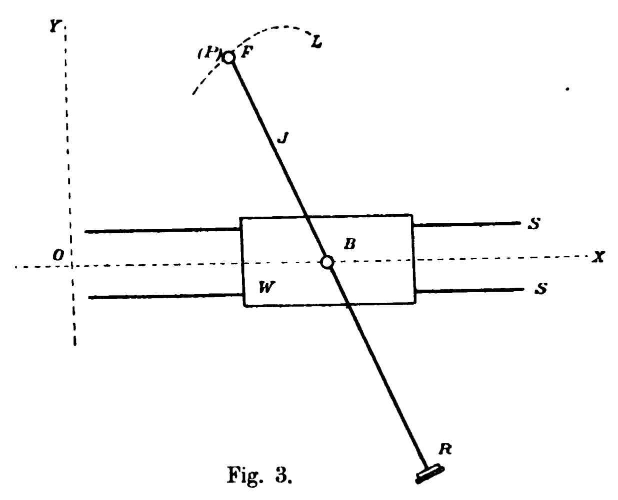


Fig. 3.

das Rollplanimeter zur Classe jener Instrumente, welche einen Ausdruck von der Form $y\,dx + du$ summiren, wo u eine eindeutige Ortsfunction

im Integrationsgebiete, und also $\int du = o$ ist. Auf den Schienen SS (Fig. 3) bewegt sich ein kleiner Wagen W, der einen Zapfen B trägt, um welchen die Stange J sich drehen kann. An dem einen Ende dieser Stange ist der Fahrstift F, am andern die Messrolle R angebracht, die auf der Ebene, auf welcher der Apparat steht, ihre Bewegungen ausführt. Bezieht man die Punkte der Umfangslinie L der zu messenden Figur, und ebenso den Berührungspunkt R der Rolle mit der Ebene derselben auf ein rechtwinkliges Axensystem XOY, dessen Abscissenaxe parallel zu SS durch die Axe von B gelegt ist, nennt x, y die Coordinaten von P, resp. F, ξ, η jene von R, setzt $BF = a$, $BR = b$, und den Winkel $XBF = \alpha$, so hat man die Beziehungen:

$$\xi = x - (a + b) \cos \alpha, \quad \eta = - b \sin \alpha, \quad \eta = a \sin \alpha,$$

woraus: $d\xi = dx + (a + b) \sin \alpha \,.\, d\alpha$; $d\eta = - b \cos \alpha \,.\, d\alpha$
folgt. Da nun $d\sigma = d\xi \,.\, \sin \alpha - d\eta \,.\, \cos \alpha$
die Componente des Verrückungspunktes R senkrecht zur Axe der Rolle ist, und diese $= \rho \,.\, d\omega$, wenn ρ den Radius der Rolle, $d\omega$ den der Verrückung entsprechenden Drehungswinkel bedeutet, so hat man:

$$\rho\, d\omega = dx \sin \alpha + (a \sin^2 \alpha + b)\, d\alpha$$

oder:

$$d\omega = \frac{1}{a\rho}\, y\, dx + \frac{a \sin^2 \alpha + b}{\rho}\, d\alpha.$$

Durchläuft F eine geschlossene Curve, so ist:

$$\int d\omega = \frac{1}{a\rho} \int y\, dx.$$

Wann das vorliegende Instrument construirt worden ist, lässt sich nicht angeben. Es findet sich weder irgendwo publicirt, noch auch ist irgend eine Aufzeichnung über dasselbe vorhanden. Wahrscheinlich ist es kurze Zeit nach dem Hyperbelplanimeter entstanden. Dem Wesen nach ist es mit Coradi's Rollplanimeter identisch und kann als ein, freilich ganz unbekannt gebliebener, Vorläufer dieses einfachen Instrumentes angesehen werden. Das vorliegende Exemplar ist nicht fertig, die Messrolle hat keine Teilung.

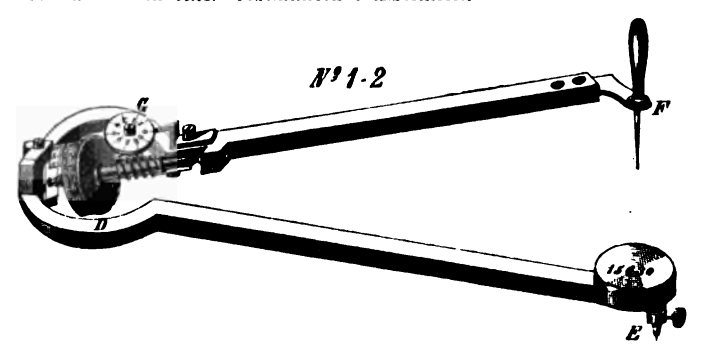
In der Geschichte des Planimeter haben die vorliegenden beiden Instrumente keine Rolle gespielt. Sie geben jedoch Zeugnis von der aussergewöhnlichen Begabung ihres Erfinders, den ein ungünstiges Geschick in eine weltabgeschiedene Stellung verschlagen hat, wo er, ohne Verkehr mit der wissenschaftlichen Welt und mit Berufsgeschäften überhäuft, seinen Lieblingsideen nicht frei nachgehen und seinen Leistungen nicht zur Anerkennung verhelfen konnte.

(Lichtenfels.)

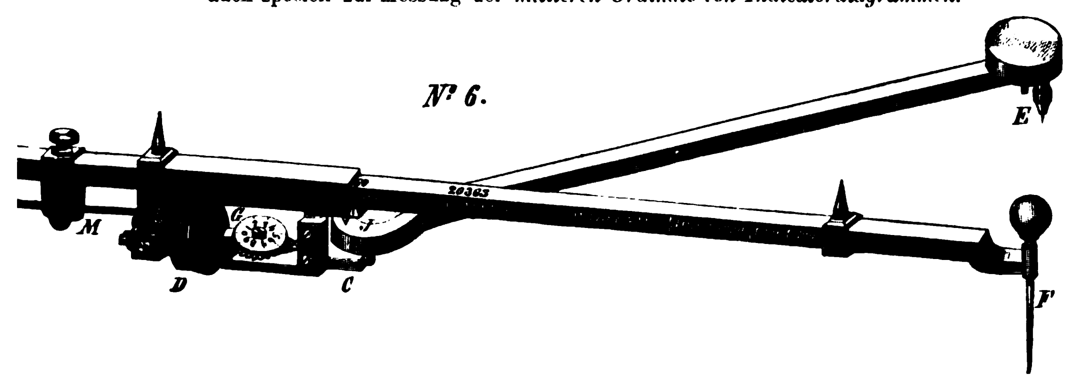
61—64 Vier Polar-Planimeter, erfunden und ausgestellt von **J. Amsler-Laffon & Sohn**, Schaffhausen.

61 Eines der ersten Polarplanimeter von J. Amsler-Laffon (1854).

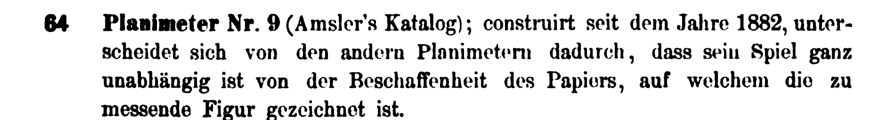
62 **Planimeter Nr. 1** (nach der Bezeichnung des Amsler'schen Kataloges, auf welchen bezüglich näherer Detailangaben und der Preise auch bei den folgenden Nummern verwiesen sei); ausgeführt seit dem Jahre 1855, gibt das Resultat nur in *einer* bestimmten Masseinheit.



63 **Planimeter Nr. 6** (Amsler's Katalog; ausgeführt seit 1856); gibt den Flächeninhalt in mehreren Masseinheiten oder Massverhältnissen, und dient auch speciell zur Messung der *mittleren Ordinate von Indicatordiagrammen.*

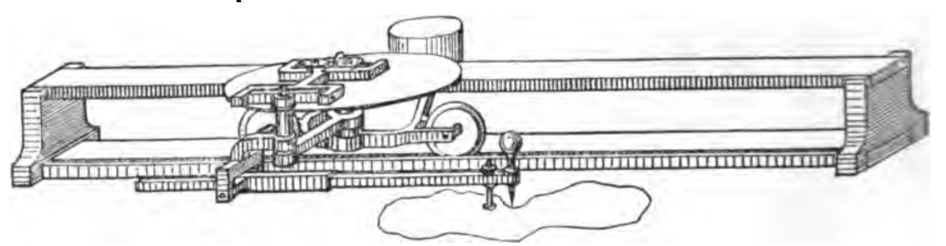


Hierzu dient eine *Hebeschraube*, welche erlaubt, den Fahrstift vom Papier abzuheben, ohne den Stand der Rolle zu ändern; es wird dadurch das successive Messen mehrerer Diagramme vereinfacht.



64 **Planimeter Nr. 9** (Amsler's Katalog); construirt seit dem Jahre 1882, unterscheidet sich von den andern Planimetern dadurch, dass sein Spiel ganz unabhängig ist von der Beschaffenheit des Papiers, auf welchem die zu messende Figur gezeichnet ist.

Die Integrirrolle läuft (rollt und gleitet) auf einer papierüberzogenen horizontalen Scheibe, deren Axe die Axe der Integrirrolle im Allgemeinen nicht schneidet. Die letztere ist mit dem Fahrarm fest verbunden. Die Drehung der Integrirrolle ist proportional der Drehung der Scheibe, der Entfernung des Berührpunktes der Rolle vom Mittelpunkt der Scheibe und endlich proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die Axe der Rolle mit der Verbindungslinie des Berührpunktes derselben mit dem Scheibenmittelpunkt einschliesst.



Das Planimeter ist ein „*Linearplanimeter*", insoferne die Scheibe auf einem kleinen Wagen, dessen Räder in den Nuthen eines Lineals laufen, hin und her bewegt wird. Der Lauf dieses Wagens bestimmt eine x-Coordinate, deren Länge durch eine Übersetzung proportional als Drehung der Scheibe übertragen wird.

Das Planimeter ist nach gleichem Principe auch als *Polarplanimeter* (zuerst 1882) construirt (Planimeter Nr. 8 des Amsler'schen Kataloges).

(Dyck.)

65 **Polarplanimeter von Miller-Starke** und

66 **Linealplanimeter von Miller-Breithaupt**, erfunden und ausgeführt 1855 bezw. 1861—62 von den Genannten. Ausgestellt vom **Geodätischen Institut der Bergakademei zu Leoben** (Prof. **Lorber**).

1. Das Polar-Planimeter.

Dieses Planimeter wurde von dem unterzeichneten Prof. Miller-Hauenfels wie dies direct aus der 2. bis 7. Auflage des Handbuches der niederen Geodäsie von Prof. Friedr. *Hartner* zu entnehmen ist, selbstständig i. J. 1855 erfunden.

In meinem ursprünglichen Entwurfe war dieses Planimeter eine Art Kugel- oder Präcisionsplanimeter, wie es die vorstehende Skizze zeigt.

Es war a die beschwerte Polarscheibe, ab der innere, bf der äussere oder Fahrarm mit dem Fahrstifte bei f. c war ein ebener Ring mit 3 schrägen Stahlplättchen, welche auf einer freibeweglichen Hohlkugel ruhten, auf deren oberstem Punkte das Gleiträllchen d ruhte. Auf derselben Axe sass bei e die Zählrolle samt Zubehör. Die Hohlkugel ist, soweit sie aus dem Ringe hervorschaut, schattirt, ihr vom Ringe verdeckter, grösster Horizontalumkreis aber punktirt angedeutet. Selbstverständlich war das Gelenk bei b durch ein Röllchen unterstützt.

Ich entwarf mir eine Theorie des Instrumentes, die mich selbst vollkommen von der Richtigkeit meiner Construction überzeugte, teilte aber meine Idee dem befreundeten Professor ***Hartner*** mit, der in die 2. Auf-

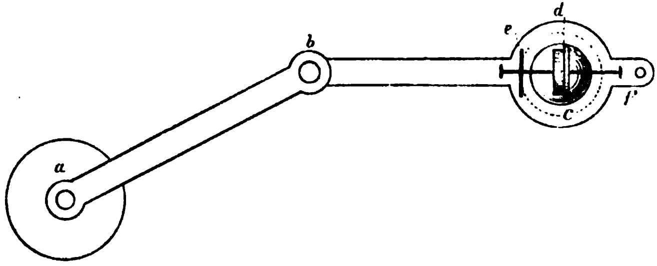


Fig. 1.

lage seiner früher erwähnten Geodäsie (Wien 1856) S. 429 eine von ihm bearbeitete Theorie aufnahm. Später trat ohne mein Zuthun Gustav ***Starke*** in Wien an mich mit dem Antrage heran, das neue Instrument in der mechanischen Werkstätte anfertigen zu lassen, welche damals unter der Leitung seines Vaters stand und bei welcher er angestellt war. Ich war natürlich sehr erfreut hierüber, weil sich dieses Institut unter Mitwirkung des unvergesslichen Professors ***Stampfer*** zu einem verdienten Rufe emporgearbeitet hatte.

G. Starke änderte jedoch die Lage der Gleitrolle dahin ab, dass sich dieselbe unmittelbar auf der Zeichnungsfläche bewegte und nach diesem Muster wurden von ihm im Laufe der Jahre Hunderte von Polarplanimetern angefertigt.

Es findet sich auch in den späteren Auflagen des erwähnten Hartner'schen Werkes, von der Theorie begleitet, die genaue Abbildung dieses Instrumentes. Ebenso hat Oberbergrat F. Lorber in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1884 S. 17, dann 1888 S. 175 und 186, endlich in der Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1884, S. 8 die Theorie und die Fehleruntersuchungen über die verschiedenen Polarplanimeter veröffentlicht.

Weder Prof. Hartner noch G. Starke war das auf ähnlichem Principe beruhende Amsler'sche Planimeter zu jener Zeit bekannt, als ich denselben das von mir construirte Polarplanimeter mitteilte. Sicher hätte aber wenigstens der erstere als Geodäsie-Professor der hervorragendsten technischen Hochschule einer grossen Monarchie darum wissen müssen, wenn Amsler's Idee schon bekannt gewesen wäre.

2. Das Lineal-Planimeter

wurde in den Jahren 1861 und 62 von ***Breithaupt*** in Cassel nach meiner Angabe angefertigt und ist das ausgestellte Exemplar das einzige seiner Art verblieben. Es besteht aus einem Lineale mit Führungsbahn und

einem darauf rollenden Wägelchen, in dessen Mitte das eine Ende der Fahrstange um eine verticale Axe drehbar befestigt ist. Letztere enthält auch den Fahrstift und Zählapparat derart, dass sich die Gleitrolle in der verticalen Drehungsaxe befindet. Dieselbe könnte auch in der Verlängerung oder sonst wo innerhalb der mathematischen Linie der Fahrstange angebracht werden.

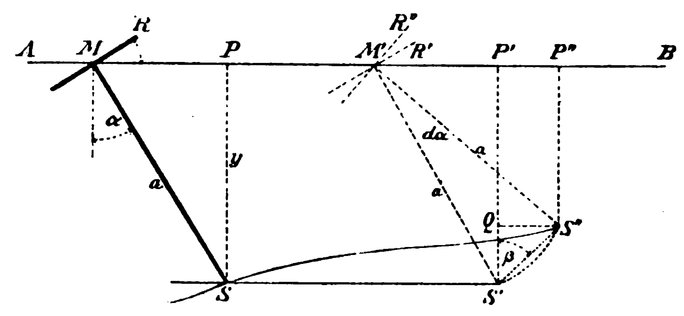


Fig. 2.

Es sei SS'' das zu durchlaufende Curvenelement, dann werde die Fahrstange a zuerst parallel zu sich selbst von MS nach M'S' bewegt und dann um M' aus der Lage M'S' nach M'S''. Die Gleitrolle (vom Radius R) hat sich dabei um einen Winkel $d\psi$ gedreht

$$d\psi = \frac{MM' \cos\alpha}{R}$$

wenn α den Neigungswinkel der Rolle gegen die Gleitlinie AB bezeichnet. Nun ist andererseits, wie direct aus der Figur abzulesen:

$$y = a \cos\alpha$$
$$dx = MM' - a \cos\alpha \, d\alpha$$

und daher

$$y\,dx = a \, . \, MM' \cos\alpha - a^2 \cos^2\alpha \, d\alpha$$
$$= a \, . \, R d\psi - a^2 \cos^2\alpha \, d\alpha$$

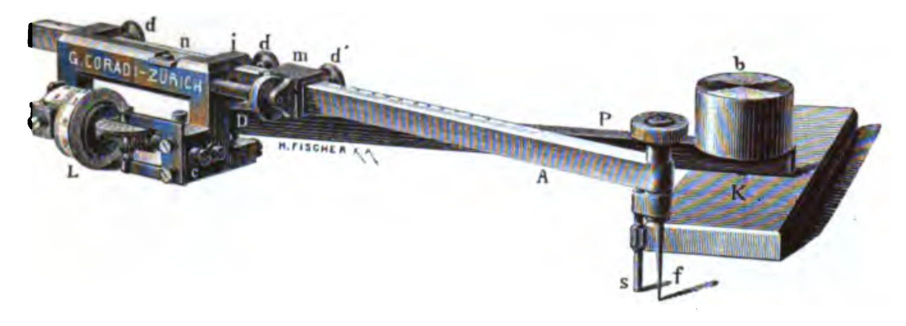
Integrirt man also über eine geschlossene Contour, so kommt das zweite Integral auf der rechten Seite in Fortfall und man hat direct

$$F = \int y\,dx = aR \, . \, \psi$$

(A. Miller R. v. Hauenfels.)

67 Einfaches Polarplanimeter (nach Amsler); ausgeführt und ausgestellt von der **mathematisch-mechanischen Werkstätte** von **G. Coradi, Zürich.**

Im Specialkatalog von Coradi (1891) (welchen man hier und im folgenden auch bezüglich der Preise der Coradi'schen Instrumente vergleichen wolle) mit Nr. 39 bezeichnet. Der Fahrstab A trägt eine Teilung in $^1/_2$ mm. Nonius und Index an der Hülse. Das Instrument hat (*wie alle folgenden Polarplanimeter*) einen *Kugelpol* (K in obenstehender Figur). Controllineal ist beigegeben.



68—75 Roll- und Polarplanimeter der Constructionen Hohmann-Coradi, ausgeführt in der **mathematisch-mechanischen Werkstätte von G. Coradi, Zürich.**

68, 69 Zwei Präcisionspolarplanimeter, Construction 1880—81, von **J. Hohmann** in Speyer (jetzt Regierungs- und Kreis-Baurat in Regensburg) und **G. Coradi** in Zürich. ***Erstes Instrument***, nach dem Patent von 1880 ausgeführt, Eigentum des **k. Strassen- und Flussbauamtes Bayreuth,** ausgestellt durch Reg.-Rat **Hohmann**; *Zweite Construction* (Fig. 1), ausgestellt vom **Geodätischen Institut der technischen Hochschule München.**

Die beiden Planimeter repräsentiren den Typus der *beiden ältesten Constructionen von Hohmann und Coradi.* Erste Ausführung Patentschrift Nr. 12377 (vom 15. Juli 1880); Zweite Ausführung dargestellt in der Zeitschrift für Vermessungswesen (Bd. 9 1881):

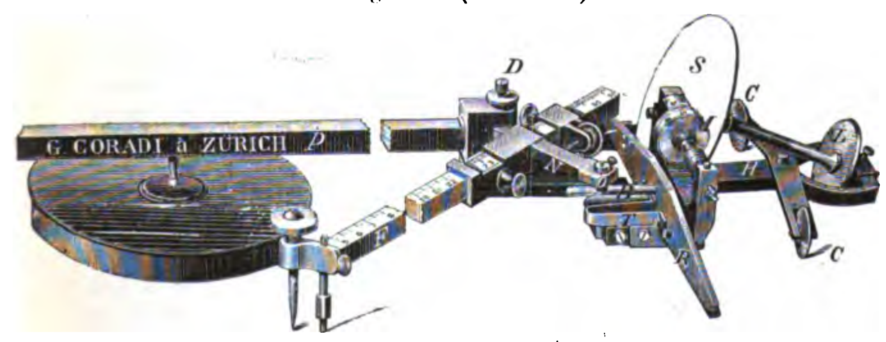


Fig. 1.

Die Integrirrolle M wälzt und gleitet auf einer Scheibe S. Die Axe der Integrirrolle schneidet immer die Axe der Scheibe. Die Drehung der Integrirrolle ist proportional der Drehung der Scheibe und dem Abstand der Integrirrolle von der Axe der Scheibe (Gonella'scher Integrationsmechanismus). Die Drehung der Scheibe S wird vermittelt durch das mit

ihr fest verbundene Laufrad L, welches auf der Zeichenebene um den Pol des Apparates, ohne zu gleiten, läuft. Die Drehung misst also einen Weg um den Pol des Apparates. Die Integrirrolle ist in einem Schlitten verschiebbar, und wird gegen die senkrecht (erste Ausführung) oder schief (zweite Ausführung) stehende Scheibe gedrückt.

Diese beiden ersten Constructionen sind nur als *Polarplanimeter* ausgeführt, nicht als *Rollplanimeter*. In der von Hohmann (a. a. O. Zeitschrift für Vermessungswesen Bd. 9) gegebenen Ableitung der Wirkungsweise des Instrumentes tritt aber die Bemerkung auf, an Stelle des Poles eine zweite, mit der ersten umfanggleiche Scheibe zu setzen, wodurch der Apparat sich in ein Rollplanimeter verwandelt.

(Dyck, Finsterwalder.)

70 **Linearrollplanimeter**. (Fig. 2.)

71 **Einfaches Präcisionspolarplanimeter.** (Fig. 3.)

72 **Freischwebendes Präcisionspolarplanimeter.** (Fig. 4) **Construction Hohmann-Coradi, 1882—84.**

Nr. 70 und Nr. 72 ausgestellt vom **geodätischen Institut der technischen Hochschule München**, Nr. 71 ausgestellt von **G. Coradi, Zürich.**

Die vorstehenden Planimeter repräsentiren *das zweite Constructionsprincip der Planimeter Hohmann-Coradi.* Vergl. „Die Präcisionsplanimeter von Hohmann (1882, Erlangen); „Abhandlungen über das Präcisionsplanimeter und das freischwebende Präcisionsplanimeter und dessen Modificationen“ sowie über das Linearrollplanimeter (1884, Erlangen); endlich Aufsätze von Prof. Lorber, F. H. Reitz u. a.

Die Integrirrolle wälzt und gleitet auf einer Scheibe. Die Axe der Integrirrolle schneidet im Allgemeinen die Axe der Scheibe nicht, dagegen ist die Integrirrolle starr mit dem Fahrarm verbunden. Die Scheibe liegt horizontal. Die Drehung der Integrirrolle ist proportional der Drehung der Scheibe, der Entfernung des Berührpunktes der Rolle vom Mittelpunkt der Scheibe, endlich proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die Axe der Rolle mit der Verbindungslinie des Berührpunktes derselben mit dem Scheibenmittelpunkt einschliesst.

Beim *Linearrollplanimeter* übertragen die beiden conischen Räder R_2 und R_3 (Fig. 2) die Drehung der Laufrollen R_1, R_1 auf die Scheibe A. Die Drehung der Scheibe A misst also einen Weg in Richtung einer X Axe. Bei den beiden *Polarplanimetern* wird die Drehung der Scheibe S (in Fig. 3 und Fig. 4) nicht mehr wie bei der früheren Construction (Fig. 1) direct durch ein auf der Zeichenebene laufendes Rad (L) übertragen, sondern ein (nur in Fig. 4 sichtbares) Rad E mit geriffeltem Rande, welches um den Rand einer *Polplatte* P läuft, vermittelt die Drehung der Scheibe, welche also ebenso wie früher einen Weg um den Pol des Apparates misst. Die Unterschiede der beiden Polarplanimeter Nr. 3 und 4 sind nicht principieller Art.

(Dyck, Finsterwalder.)

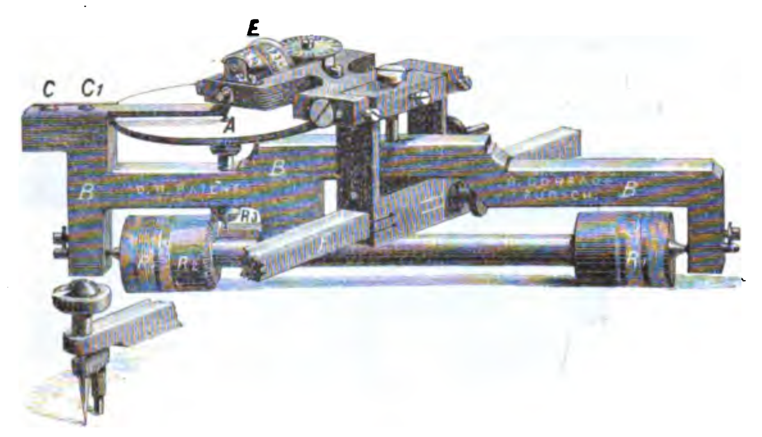


Fig. 2.

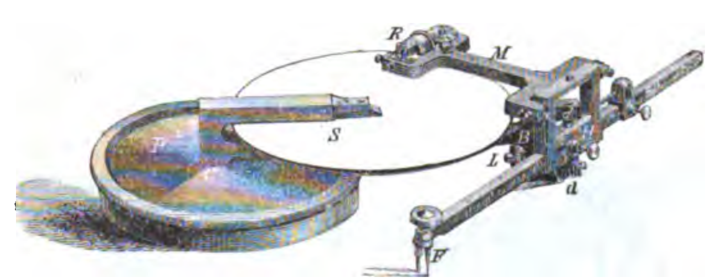


Fig. 3.

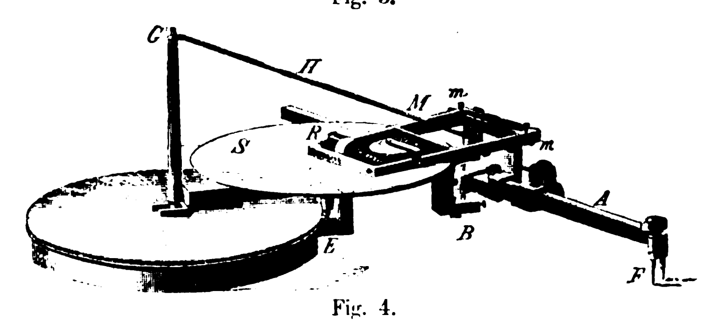


Fig. 4.

73 Grosses Kugelrollplanimeter (Fig. 5).

74 Einfaches Kugelpolarplanimeter (Fig. 6).

75 Freischwebendes Kugelpolarplanimeter (Fig. 7). **Construction Hohmann-Coradi 1888.**

Die Instrumente Nr. 73 und Nr. 75 ausgestellt von **G. Coradi, Zürich,**

Instrument Nr. 74 ausgestellt vom **geodätischen Institut der technischen Hochschule München.**

Diese drei Instrumente repräsentiren das ***dritte Princip der Hohmann-Coradi'schen Constructionen.*** Man vergl. bez. desselben einen Aufsatz

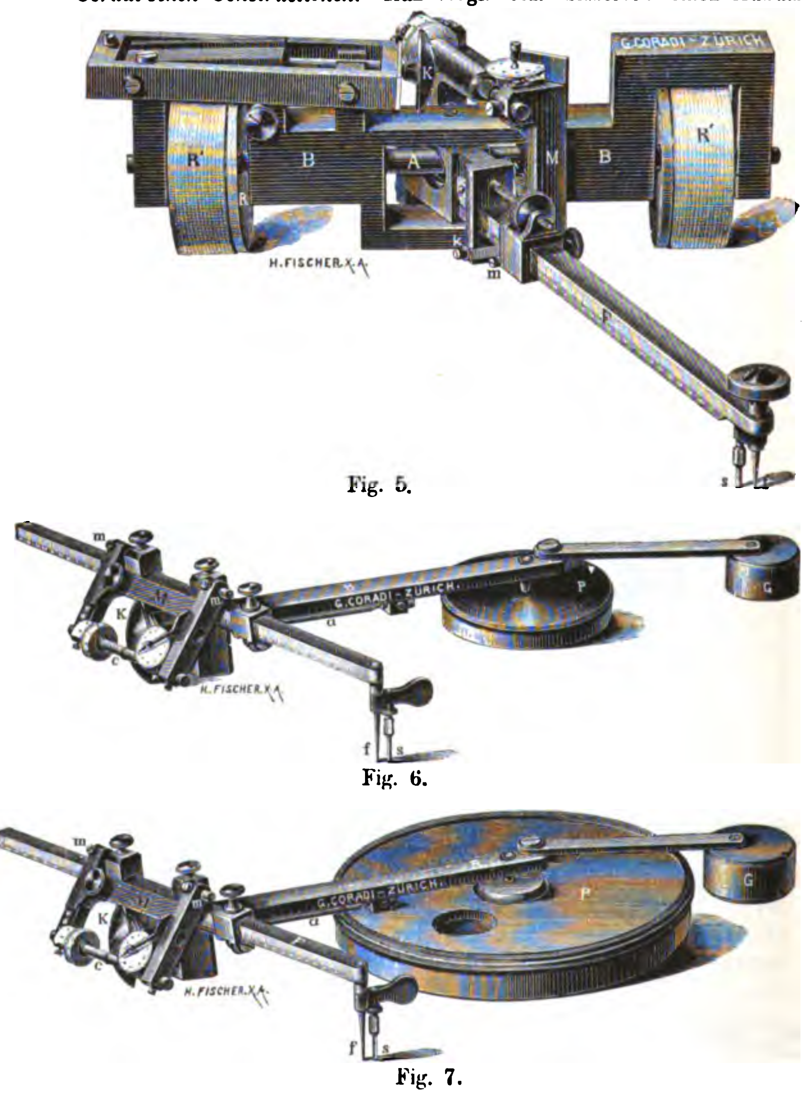


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

von Prof. *Lorber* (Zeitschrift für Vermessungswesen Bd. XVII, 1888), sowie einen von Seiten des „Journal des géomètres" herausgegebenen

Aufsatz von *V. Lefrançois* (Grenoble 1890), welcher auch die Theorie der übrigen Constructionen Coradi's umfasst.

Die Scheibe ist durch eine um eine horizontale Axe drehbare Kugel-Schale K ersetzt. An die Stelle der Integrirrolle tritt eine cylindrische Integrirwalze, welche gegen die Kugelschale gedrückt wird. Kugelaxe und Walzenaxe schneiden sich.*) Die Drehung der Walze ist proportional der Drehung der Kugel und der Entfernung der Berührpunkte von Walze und Kugel von der Drehaxe der letzteren.

Beim *Kugelrollplanimeter* erfolgt die Drehung der Kugelschale K durch directe Übertragung der Drehung der Rollen R' R' auf die Axe der Kugel. Beim *einfachen Kugelpolarplanimeter* läuft der Rand der Kugelschale direct auf dem Zeichenpapier, während beim *freischwebenden Kugelpolarplanimeter* die Drehung der Kugel vermittelt wird durch die mit feiner Verzahnung versehene Axe a, welche in eine ebensolche Verzahnung auf dem Rande einer *Polplatte* P eingreift.

(Dyck, Finsterwalder.)

76 **Planimeter, nach Amsler**, construirt und ausgestellt vom **math. mech. Institut von A. Ott, Kempten.**

Bezüglich der weiteren Beschreibung sowie der Preise der von A. Ott gefertigten Instrumente sei auf den *Specialkatalog* verwiesen.

77 **Zwei Planimeter nach Amsler,** construirt und ausgestellt vom **math.-mech. Institut von Dennert & Pape, Altona.**

Bezüglich Beschreibung und Preis vergl. *Specialkatalog.*

G. Weitere Instrumente zur mechanischen Integration.

78 **Zwei Integraphen. System Abdank-Abakanowicz. Construction Coradi.** Grösseres Modell ausgestellt von Professor **Lorber**, Bergakademie Leoben, kleineres Modell aus der **kinematischen Sammlung der technischen Hochschule München.**

Während die Planimeter durch Umfahren einer geschlossenen ebenen Figur mit einem Fahrstift den Flächeninhalt (oder andere auf die Fläche bezügliche Integrale) in einer an der Integrirrolle ablesbaren *Zahl* ergeben, zeichnet der Integraph während des Durchlaufens einer Curve $y = f(x)$ direct *die Integralcurve* $z = \int f(x)\,dx$, gibt also nicht nur das *Endresultat* einer auf ein geschlossenes Gebiet ausgedehnten Flächenbestimmung, sondern den ganzen *Verlauf* des Integralwertes als Function

*) Die bei der Ausführung auftretende Abweichung ist ohne Belang.

der oberen Grenze. Die Grösse der z-Werte kann ausserdem noch an einem Masstabe abgelesen werden.

Der Grundgedanke, auf welchem die vorliegenden Integraphen basiren, ist in der im Teil I enthaltenen Abhandlung von Dr. ***Amsler*** kurz bezeichnet. Bezüglich der mannigfachen interessanten Versuche und Umformungen, welche der Apparat von den ersten Formen bis zu seiner jetzigen einfachen Gestalt erfahren hat, vergleiche man das Buch von ***Abdank-Abakanowicz*** ***„Les Integraphes; la courbe integrale et ses applications“*** Paris, Gauthier Villars 1889; in deutscher Übersetzung (mit Zusätzen versehen) von ***E. Bitterli***, Leipzig, bei Teubner 1889.

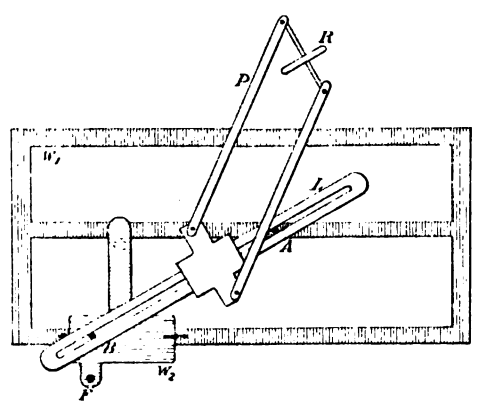


Fig. 1.

Das Instrument besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen: Dem *Wagen* W_1, der auf vier (bez. beim kleineren Instrument auf drei) Laufrollen sich auf der Zeichenebene — in Richtung einer (in der Figur verticalen) Axe x — bewegt. Senkrecht dazu läuft auf dem Rahmen des Wagens ein zweiter kleiner Wagen W_2, welcher den Fahrstift F trägt. Beim Durchlaufen der Curve mit dem Fahrstift erscheint diese somit auf ein Coordinaten-System x, y bezogen.

Der zweite Teil des Instrumentes dient dazu, ein Rad R, welches die Integralcurve $z = \int f(x)\,dx$ zu beschreiben hat, mit seiner Ebene stets der Richtung $\frac{dz}{dx} = f(x)$ parallel zu stellen: Um einen festen Punkt A des Wagens W_1 ist ein Lineal L drehbar und längs eines in demselben befindlichen Schlitzes verschiebbar. Das Lineal läuft ferner (mit seinem Schlitze) beständig durch einen festen Punkt B des Wagens W_2. Dadurch wird erreicht, dass die Tangente des Neigungswinkels des Lineales L gegen die Richtung der x-Axe stets proportional ist der Grösse $\frac{dz}{dx} = f(x)$ d. i. der y-Ordinate der zu integrirenden Curve. Durch ein Parallelo-

gramm P wird endlich die Stellung des Lineals L auf die Rolle R übertragen. Diese letztere läuft also beim Durchlaufen der Curve $y = f(x)$

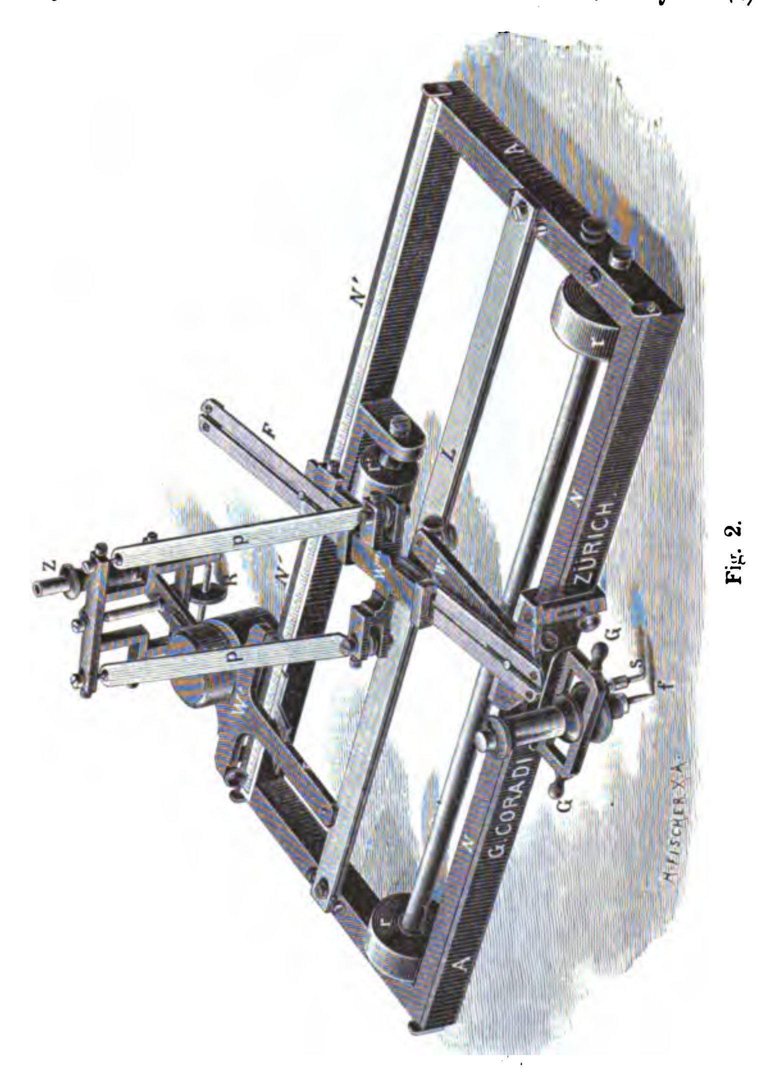


Fig. 2.

mit dem Fahrstift in jedem Momente in der Richtung der Tangente an die Integralcurve. Das Rad (bez. ein damit verbundener, seitlich gestellter Zeichenstift) beschreibt also die Curve $z = \int f(x)dx$. Das Rad R führt bei seiner Bewegung einen ebenfalls auf dem Rahmen des Wagens W_1

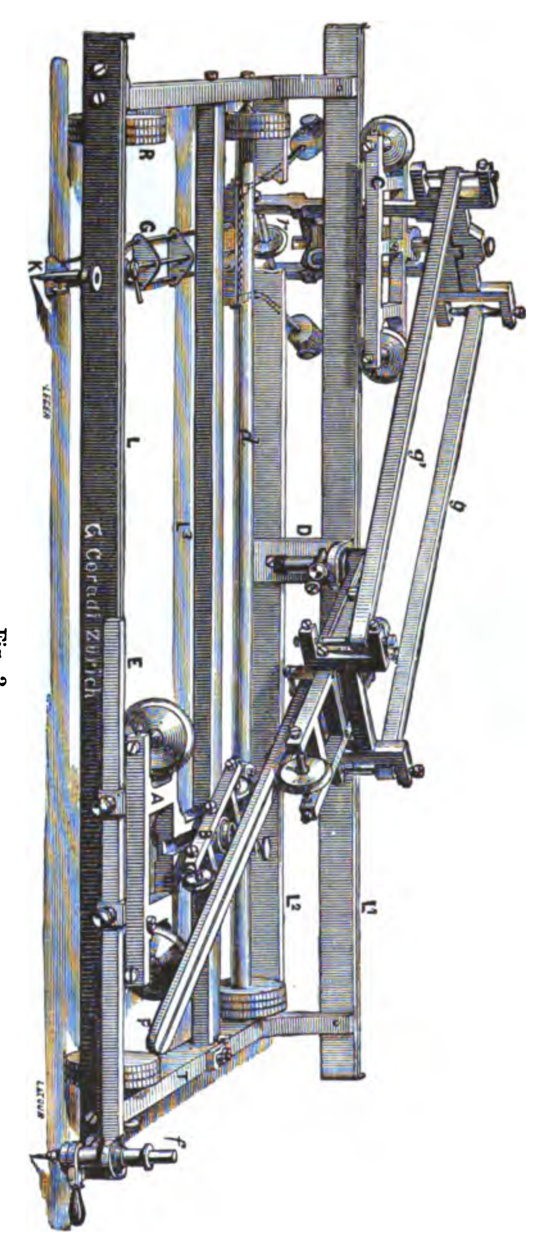


Fig. 3.

laufenden kleinen Wagen (in der schematischen Figur weggelassen) mit Nonius mit sich, der die Grösse der z-Ordinate an jeder Stelle auf einem auf dem Rahmen angebrachten Masstab ablesen lässt.

Bezüglich näherer Beschreibung sei auf das oben erwähnte Buch des Erfinders verwiesen.

Die beigegebenen Figuren 2 und 3 zeigen die gegenwärtig von Coradi ausgeführten beiden Modelle der Integraphen.

(Dyck.)

79 Tafel mit „Integralcurven", eine Reihe von algebraischen Singularitäten darstellend, mit dem Integraphen von Abdank-Abakanowicz-Coradi gezeichnet im **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Es ist nicht uninteressant bei der Anwendung der Abdank-Abakanowiczschen Integraphen das successive Entstehen der Integralcurven zu verfolgen und insbesondere das Entstehen singulärer Punkte derselben.

Auf der Tafel sind die Integrationen der folgenden Haupttypen von Curven in der Umgebung des Nullpunktes ausgeführt:

	Grundcurve:	Integralcurve:
I.	$y = \pm x$	$y = \pm \frac{1}{2} x^2$
	$y = x^2$	$y = \frac{1}{3} x^3$
	$y = x^3$ u. s. w.	$y = \frac{1}{4} x^4$

Beachtet man, dass jeder Schnitt der Grundcurve mit der Abscissenaxe einem Maximum bezw. Minimum der Integralcurve entspricht, jedes Maximum bez. Minimum der Grundcurve einen Wendepunkt der Integralcurve hervorruft, so kann man (wie dies die jedesmal neben den obigen Typen gezeichneten Übergangsformen zeigen) das Entstehen der rechts stehenden Integralcurven nach der Zahl der ihnen entsprechenden (reellen) Wendepunkte und Doppeltangenten anschaulich verfolgen.

Noch interessanter ist es, das Spiel des Apparates zu beobachten für die folgenden Typen:

	Grundcurve:	Integralcurve:
II.	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
	$y = x^{\frac{1}{3}}$	$y = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}$
	$y = x^{\frac{1}{4}}$	$y = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}$
	$y = x^{\frac{1}{5}}$ u. s. w.	$y = \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}}$

Jedem Aste der Grundcurve mit verticaler Tangente entspricht ein Zweig mit Spitze in der Integralcurve. Löst man nun die vorstehend

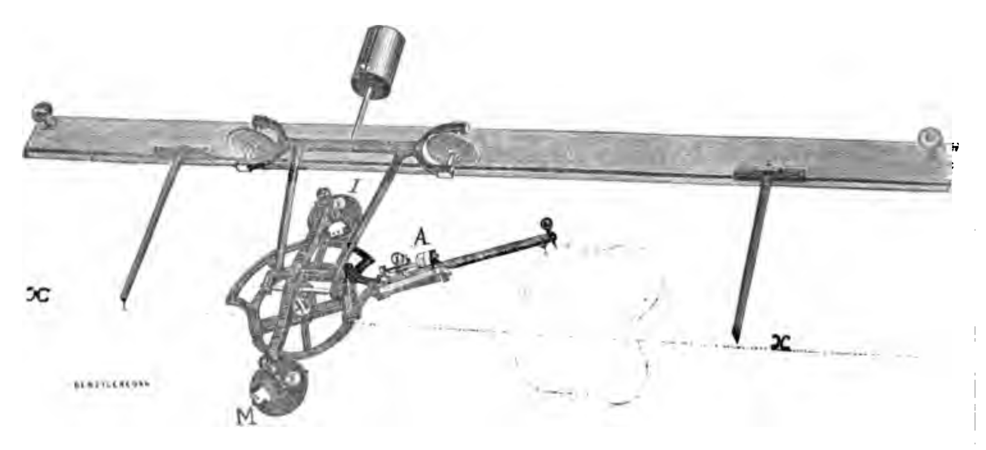
verzeichneten Typen durch Deformation der Grundcurve (jedesmal wieder neben dem Haupttypus gezeichnet) in der Art auf, dass der Wendepunkt mit verticaler Tangente sich abändert in eine Curve mit zwei einfachen verticalen Tangenten; die Curve mit vierpunktigen verticalen Tangenten in eine solche, welche drei einfache verticale Tangenten besitzt, so ergeben sich bei der mechanischen Integration die bekannten Auflösungen der obigen singulären Stellen in Äste mit zwei, mit drei, mit vier u. s. w. Spitzen. (Dyck.)

80—84 Fünf Instrumente zur mechanischen Ausführung verschiedener Integrationen, erfunden und ausgeführt von **J. Amsler-Laffon & Sohn,** Schaffhausen. Und zwar:

80 Integrator (Momentenplanimeter).
81 Stereographometer.
82 Integrirender Papierdickenmesser.
83 Integrirender Wärmeausdehnungsmesser.
84 Präcisionsgefällmessapparat.

80 Integrator (Momentenplanimeter).

Instrument zur Bestimmung des *Flächeninhalts* einer Figur, sowie des *statischen Moments* und des *Trägheitsmoments* in Bezug auf irgend eine Momentenaxe.



Das Instrument besteht im Wesentlichen aus einem Wagen, dessen Räder in der geradlinigen Nuth eines Lineals laufen. Der Wagen trägt drei Zahnräder, deren Durchmesser und Zähnezahlen so gewählt sind, dass, wenn das mittlere Zahnrad um einen Winkel α gedreht wird, das äussere Zahnrad sich um 2α und das innere Zahnrad um 3α dreht. Die beiden kleinen Zahnräder tragen die auf der Zeichnungsebene sanft auf-

liegenden Messrollen M und I. Am mittleren Zahnrad ist ein Arm angebracht, welcher ebenfalls eine auf der Zeichnungsfläche laufende Messrolle A trägt.

Um eine Figur zu messen, legt man das Lineal so auf die Zeichnungsfläche, dass, wenn die Querstücke der beiden Hilfsarme in der Nuth des Lineals liegen, ihre Spitzen auf die Momentenaxe x x fallen.

Nun setzt man den Fahrstift des Instruments auf einen Punkt der zu messenden Figur, liest den Stand der Rollen A, M, I ab, deren Ablesungen resp. a_0, m_0, i_0 sein mögen, umfährt die Figur mit dem Fahrstift und liest die Rollen wieder ab.

Sind die Endablesungen a_1, m_1, i_1, so ist dann

Flächeninhalt $A = 0{,}1\ (a_1 - a_0)\ cm^2$

Statisches Moment $M = 0{,}6\ (m_1 - m_0)\ cm \cdot cm^2$

Trägheitsmoment $I = 10\ (a_1 - a_0) - 4\ (i_1 - i_0)\ cm^2 \cdot cm^2$.

Theorie:

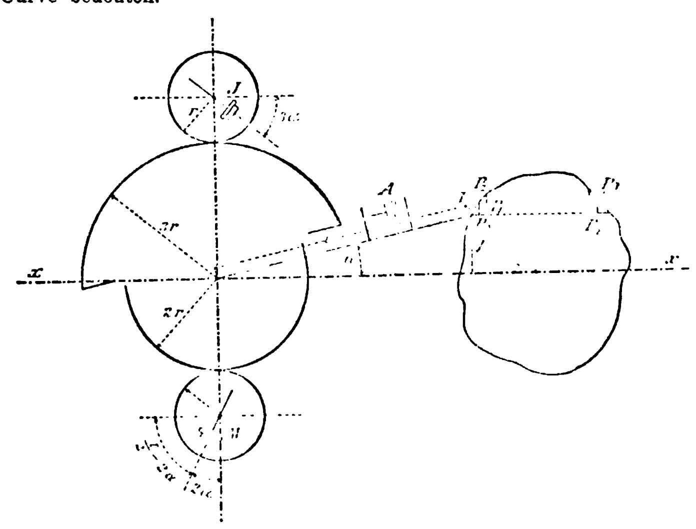
Bekanntlich gelten für die vorher mit A, M, I bezeichneten Grössen die Formeln

$$A = \int y\, dx$$

$$M = {}^1/_2 \int y^2\, dx$$

$$I = {}^1/_3 \int y^3\, dx$$

worin x und y die Ordinaten der eine Fläche begrenzenden geschlossenen Curve bedeuten.



Bezugnehmend auf vorstehende Figur kann man die Ordinate y ausdrücken durch die constante Länge c und den variablen Winkel α.

Es ist

$$y = c \sin \alpha.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für y in obigen Integralen, so bekommt man

$$A = c \int \sin \alpha \, dx$$

$$M = \frac{c^2}{2} \int \sin^2 \alpha \, dx$$

$$I = \frac{c^3}{3} \int \sin^3 \alpha \, dx$$

Bekanntlich ist nun

$$\sin^2 \alpha = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha}{4} - \frac{\sin 3\alpha}{4}$$

Diese Werte in obige Integrale eingesetzt, gibt

$$A = c \int \sin \alpha \, dx$$

$$M = -\frac{c^2}{4} \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx + \frac{c^2}{2} \int dx$$

$$I = \frac{c^3}{4} \int \sin \alpha \, dx - \frac{c^3}{12} \int \sin 3\alpha \, dx$$

Da die Curve, auf welche sich die Integrale beziehen, geschlossen ist, so sind in dem Integral $\int dx$ ebenso viele negative als positive Elemente dx enthalten und es ist daher $\int dx = o$.

Die Construction des Integrators ist nun derart, dass die Axen der mit A, M, I bezeichneten Rollen mit der Momentenaxe x x die resp. Winkel bilden

$$\alpha, \quad \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right), \quad 3\alpha$$

wenn der Arm c, welcher den Fahrstift trägt, mit der Linie x x den Winkel α bildet.

Wenn der Fahrstift F auf der Linie x x liegt, so sind die Axen der Rollen A und I parallel zu x x und die Axe der Rolle M ist senkrecht zu x x.

Man denke sich nun an Stelle der wirklichen Curve s ein Polygon aus unendlich kleinen geradlinigen Stücken, welche teils parallel, teils senkrecht zu x x sich unendlich nahe an die Curve s anschmiegen.

Ein solches Polygon hat bis auf unendlich Kleines denselben Inhalt und dieselben Momente wie die von s eingeschlossene Fläche. Bewegt man den Fahrstift auf dem unendlich kurzen zu x x parallelen Stück $P_0 P_1 = dx$, so drehen sich die drei Rollen A, M, I um Beträge, die gleich sind resp.

$$k_1 \sin \alpha \, dx, \quad k_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx, \quad k_3 \sin 3\alpha \, dx$$

wobei k_1, k_2, k_3 Constanten bedeuten, welche von der Länge c und den Rollendurchmessern abhängen. Bewegt man den Fahrstift von P_1 nach P_2, so führen die Rollen Drehungen aus, welche nicht in Betracht fallen, da sie wieder aufgehoben werden, wenn der Fahrstift im weiteren Verlauf sich von P_3 nach P_4 bewegt und also der Mechanismus genau dieselbe Bewegung im umgekehrten Sinn ausführt, wie beim Durchlaufen des Stückes P_1, P_2.

Dieselbe Betrachtung liesse sich für jedes Element des Polygons durchführen. Es werden mithin die Drehungen der 3 Rollen, welche früher mit $a_1 - a_0$, $m_1 - m_0$, $i_1 - i_0$ bezeichnet wurden, gleich sein

$$a_1 - a_0 = k_1 \int \sin \alpha \, dx$$

$$m_1 - m_0 = k_2 \int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) dx$$

$$i_1 - i_0 = k_3 \int \sin 3\alpha \, dx$$

und folglich

$$A = \frac{c}{k_1}\left(a_1 - a_0\right)$$

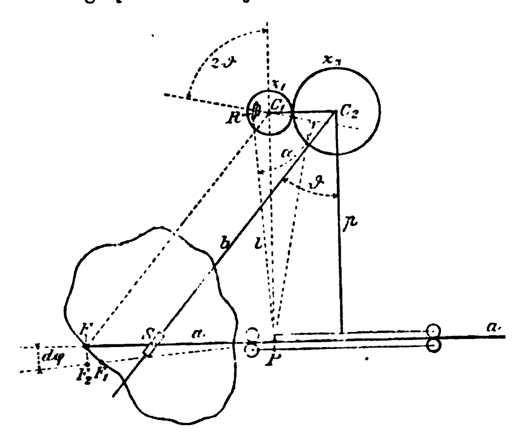
$$M = -\frac{c^2}{4\,k_2}\left(m_1 - m_0\right)$$

$$I = \frac{c^3}{4\,k_1}\left(a_1 - a_0\right) - \frac{c^3}{12\,k_3}\left(i_1 - i_0\right)$$

(A. Amsler.)

81 Stereographometer.

Instrument zur Bestimmung des wirklichen Flächeninhalts einer sphärischen Figur aus ihrer stereographischen Projection.



Das Instrument besteht im Wesentlichen aus den drei Stangen **a**, b und p, den zwei ineinandergreifenden Zahnrädern z_1 und z_2, und der vom

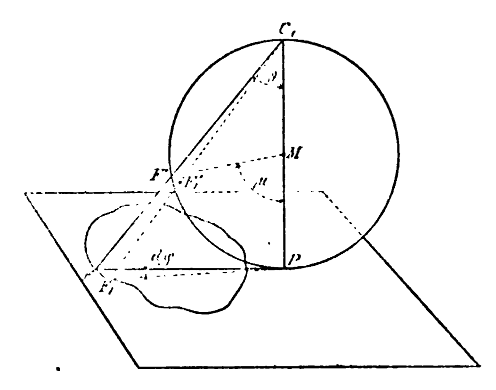
Zahnrad z_1 getragenen Messrolle R, welche mit sanfter Reibung auf der Zeichnungsfläche aufliegt. Die Stange p trägt einerseits an einem Träger die beiden Zahnräder z_1 und z_2, von denen z_2 doppelt so viele Zähne hat als z_1. Am andern Ende trägt die Stange p Führungsrollen, welche die Stange a rechtwinkelig zu p führen. Bei P ist eine mit dem Träger der Führungsrollen starr verbundene Nadelspitze angebracht, welche in die Zeichnungsfläche gedrückt wird. Um die Nadelspitze als Pol dreht sich das ganze Instrument. Die Stange b ist an einem Ende am Zahnrad z_2 befestigt und dreht sich mit diesem um die Axe C_2. Auf der andern Seite gleitet die Stange b in einer Hülse S, welche drehbar mit der Stange a verbunden ist. Letztere ist bei F mit einem Fahrstift versehen, mit welchem man die zu messende Figur umfährt. Ändert man durch Drehen der Stange b den Winkel ϑ, so ändert sich die Richtung der Rollenaxe um das Doppelte. Die Rolle ist so mit dem Zahnrad z_1 verbunden, dass der Winkel zwischen der Rollenaxe und der Linie C_1 P stets gleich ist 2ϑ.

Setzt man die Nadelspitze P auf den Fusspunkt des Perpendikels, welches man vom Projectionsmittelpunkt aus auf die Zeichnungsebene fällen kann und umfährt die Zeichnung mit dem Fahrstift F, so gibt die Umdrehung der Rolle R mit einer Constanten multiplicirt, den Flächeninhalt der sphärischen Figur, deren Projection man umfahren hat.

Theorie:

Man denke sich eine um M als Mittelpunkt beschriebene Kugel, welche die Zeichnungsebene im Punkt P berührt.

C_1 P sei der Kugeldurchmesser, welcher senkrecht auf der Zeichnungsebene steht.



Irgend ein Punkt F der Figur s in der Zeichnungsebene ist dann das stereographische Bild des Punktes F′ auf der Kugeloberfläche.

Bezeichnet man mit μ den Winkel P M F′ und mit φ den Winkel, welchen die Ebene P C_1 F′ mit einer festen, durch P C_1 gehenden Ebene

einschliesst, so ist bekanntlich der Flächeninhalt einer Figur s' auf der Kugel gleich

$$A' = \frac{p^2}{4} \int \cos \mu \, d\varphi$$

worin die Integration über den ganzen Umfang der Figur zu erstrecken ist

Beachtet man, dass $\mu = 2\vartheta$, so erhält man auch

$$A' = \frac{p^2}{4} \int \cos 2\vartheta \, d\varphi.$$

Ist F_1 ein auf der Curve liegender zu F benachbarter Punkt, so ist offenbar Winkel $F P F_1 = d\varphi$. Nun denke man sich das Dreieck $P C_1 F$ in die Zeichnungsebene heruntergeklappt und die Eckpunkte desselben mit den gleichbezeichneten Punkten $P C_1 F$ des Instruments identificirt. Bewegt man den Punkt F auf der gezeichneten Curve s in eine benachbarte Lage F_1, so ist wieder $\sphericalangle F P F_1 = d\varphi$.

Sehen wir nun zu, wie gross die Abwicklung der Rolle R wird, wenn sich F nach F_1 bewegt. Statt den Fahrstift F direct nach F_1 zu führen, bewege ich denselben zuerst auf einem Kreisbogen $F F_2$, dessen Winkelöffnung $d\varphi$ ist und dann erst von F_2 nach F_1. Denkt man sich die ganze Curve s in derselben Art durchwandert, so beschreibt der Fahrstift eine Curve, deren Inhalt von demjenigen der Curve s nur unendlich wenig verschieden ist. Dasselbe wird der Fall sein mit dem correspondirenden Punkt F' auf der Kugel.

Bewegt sich F nach F_2, so dreht sich das ganze Instrument um den Punkt P; die relative Stellung der verschiedenen Teile des Instruments bleibt dabei unverändert. Wird die Entfernung des Berührungspunktes der Rolle R vom Pol P mit l bezeichnet, so bewegt sich R auf dem Kreisbogen $l\,d\varphi$, wenn sich F nach F_2 bewegt. Dabei dreht sich die Rolle um den Betrag $l \sin\alpha \, d\varphi$, wenn Winkel $P R C_1 = \alpha$.

Bewegt sich F von F_2 nach F_1, so findet keine Drehung um den Pol P statt; nur die Stange b dreht sich um den Winkel ϑ um den Punkt C_2; dies hat eine Drehung $2\,d\vartheta$ des Zahnrades z_1 zur Folge und die Rolle dreht sich daher um den Betrag $R C_1 \, 2\,d\vartheta$. Dabei ist zu beachten, dass $R C_1$ eine Constante ist.

Wenn sich der Fahrstift von F nach F_1 bewegt, so ist mithin die Drehung der Rolle gleich

$$du = l \sin\alpha \, d\varphi + R C_1 \, 2\,d\vartheta$$

und hat der Fahrstift die ganze Curve durchlaufen, so wird die resultirende Rollendrehung

$$u = \int l \sin\alpha \, d\varphi + 2 R C_1 \int d\vartheta.$$

Wie aus der Figur ersichtlich, ist

$$l \sin\alpha = R C_1 + P C_1 \cos 2\vartheta$$

oder da

$$P C_1 = p \text{ ist,}$$

$$l \sin\alpha = R C_1 + p \cos 2\vartheta, \text{ mithin}$$

$$u = R\,C_1 \int d\varphi + p \int \cos 2\vartheta\, d\varphi + 2\,R\,C_1 \int d\vartheta$$

Liegt der Pol ausserhalb der Curve s so ist $\int d\varphi = 0$, liegt er innerhalb der Curve, so wird $\int d\varphi = 2\pi$. Da die Stange b am Ende der Bewegung wieder die Anfangslage annimmt, so ist offenbar unter allen Umständen $\int d\vartheta = 0$ und folglich

$$u = p \int \cos 2\vartheta\, d\psi, \text{ wenn P ausserhalb der Curve s liegt und}$$

$$u = 2\pi R\,C_1 + p \int \cos 2\vartheta\, d\varphi, \text{ wenn P innerhalb der Curve s liegt.}$$

Vergleicht man diese hier gefundenen Ausdrücke mit der für den Flächeninhalt A' der sphärischen Figur aufgestellten Formel, so erhält man

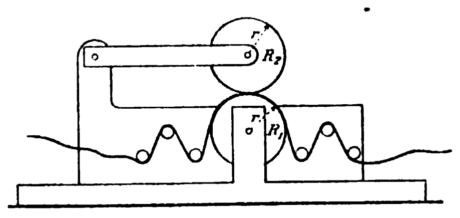
$$A' = \frac{p}{4}\,u \quad \text{oder} \quad A' = \frac{p}{4}\,u - \frac{p\,\pi\,R\,C_1}{2}$$

je nachdem der Pol P ausserhalb oder innerhalb der Curve s liegt. Die Grössen $\frac{p}{4}$ und $p\,\frac{\pi\,R\,C_1}{2}$ sind Constante des Instruments.

(A. Amsler.)

82 Integrirender Papierdickenmesser.

Dieses Instrument dient zur Bestimmung der mittleren Dicke eines Papier- oder dünnen Blechstreifens.



Wird ein Papierstreifen von bestimmter Länge über eine Cylinderfläche gelegt, so hat der Papierstreifen, auf der convexen Seite gemessen, eine grössere Länge, als auf der concaven Seite. Der Längenunterschied hängt ab von der Krümmung der Cylinderfläche und von der Dicke des Papiers. Diese Thatsache wird in dem Instrument verwertet zum Messen der Papierdicke. Der zu messende Papierstreifen, dessen Länge man übrigens nicht zu kennen braucht, wird zwischen zwei gegeneinander liegenden Rollen durchgezogen und zwar so, dass sich der Streifen ein Stück weit auf eine der beiden Rollen auflegt. Diese Rolle misst dann die Länge der concaven Seite des Streifens, die andere Rolle dagegen misst die convexe Seite. Sind die Rollendurchmesser bekannt, so bestimmt sich die Papierdicke aus dem Verhältnis der Rollenumdrehungen. Es sei r_1 der Radius der Messrolle R_1, r_2 der Radius der Rolle R_2, d die unbekannte Dicke des zu messenden Papiers, φ_1 die Drehung der Rolle R_1 und φ_2 die correspondirende Drehung der Rolle R_2. Dann hat man die Gleichung

$$\varphi_1 (r_1 + d) = \varphi_2\, r_2$$

woraus sich ergibt

$$d = \frac{\varphi_2 r_2 - \varphi_1 r_1}{\varphi_1}.$$

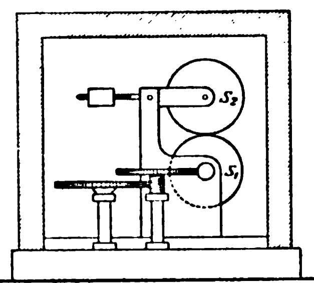
Wie aus dieser Formel ersichtlich ist, kommt es zwar auf die Länge des Papierstreifens nicht an; derselbe soll jedoch so lang sein, dass φ_1 und φ_2 merklich verschieden werden.

Der ausgestellte Apparat ist ein Versuchsapparat und soll nur das Princip veranschaulichen.

(A. Amsler.)

83 Integrirender Wärmeausdehnungsmesser.

Dieses Instrument dient zur Bestimmung der relativen Ausdehnungscoëfficienten von Metallen, von denen man nur ganz kleine Stücke zur Verfügung hat.



Dreht man eine runde Scheibe, auf deren Rand eine zweite drehbare Scheibe mit schwacher Reibung aufliegt, so wird die zweite Scheibe von der ersten auch in Drehung versetzt und zwar verhalten sich die Drehungen der beiden Scheiben umgekehrt wie ihre Umfänge. Sind die beiden Scheiben aus demselben Material gemacht und haben sie unter sich gleiche Temperatur, so wird sich das Verhältnis der Umfänge der beiden Scheiben nicht ändern, wenn man die Temperatur ändert, das Verhältnis der Drehungen wird daher nach wie vor dasselbe bleiben.

Bestehen dagegen die beiden Scheiben aus verschiedenen Materialien, deren Ausdehnungscoëfficienten verschieden sind, so ändert sich bei einer Temperaturänderung auch das Verhältnis der Umfänge und es wird sich in Folge dessen auch das Verhältnis der Drehungen ändern. Diese Änderung des Verhältnisses der Drehungen bei verschiedenen Temperaturen gibt nun ein Mass zur relativen Bestimmung des Ausdehnungscoëfficienten der beiden Scheiben. Zu bemerken ist, dass es gar nicht nötig ist, dass die beiden Scheiben genau rund sind.

Das Princip des Apparats kann auch angewendet werden, um Temperaturen zu messen; ferner liesse es sich zweckmässig anwenden zur genauen Registrirung der Durchschnittstemperaturen während längerer Zeit. Man würde zu diesem Zweck die Scheibe S_1 des Apparats von

der Minutenaxe einer gewöhnlichen Uhr antreiben, die andere S_2 aus einem andern Material, dessen Ausdehnungscoëfficient von demjenigen der Scheibe S_1 stark verschieden ist, auf der Scheibe S_1 laufen lassen.

Der ausgestellte Apparat soll nur das Princip veranschaulichen. Ein für genaue Messungen tauglicher Apparat müsste sorgfältig in einem Wärmekasten eingeschlossen sein, dessen Temperatur man nach Belieben reguliren könnte.

Um den Apparat als *genaues Thermometer* zu gebrauchen, müsste man die relativen Tourenzahlen der beiden Scheiben bei zwei genau herstellbaren Temperaturen (z. B. beim Gefrierpunkt und beim Siedepunkt des Wassers) bestimmen und so die Constanten des Apparats feststellen.

A. Amsler.)

84 Präcisionsgefällmessapparat.

Dieses Instrument dient zur genauen Ermittlung der Niveaudifferenzen an verschiedenen, nahe bei einanderliegenden Stellen eines fliessenden Gewässers, gleichgiltig, ob dessen Oberfläche ruhig oder wellig sei. Die Beobachtungsstellen wählt man beim praktischen Gebrauch 10 bis 50 Meter von einander entfernt. Das Instrument kann daher unter anderem auch zweckmässig zum Studium der Variationen des Wasserstandes im Querprofil eines Flusses und überhaupt in Fällen verwendet werden, wo sich directes Nivellement der Kleinheit der zu messenden Höhenunterschiede wegen oder wegen Wellenbewegung nicht ausführen lässt.

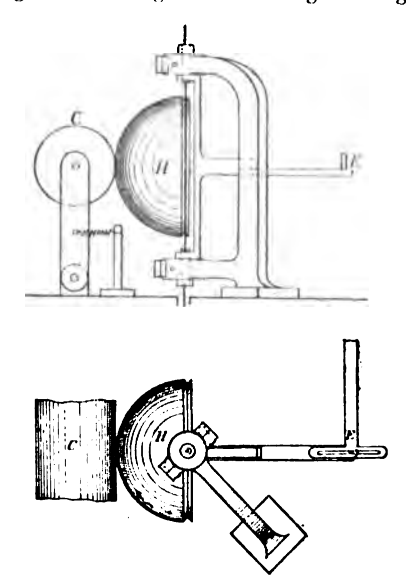
Der Apparat basirt auf dem Princip der communicirenden Röhren. An den beiden Stellen, deren Niveaux verglichen werden sollen, werden die Enden von zwei Röhren bis auf den Grund des Gewässers versenkt, die Mündung nach abwärts gerichtet. Am Ufer werden die beiden Röhren unten an zwei verticale, oben communicirende Glasröhren angeschlossen. Nun wird die Luft so lange aus dem Röhrensystem ausgepumpt, bis in den Glasröhren Wassersäulen sichtbar werden. Die Höhendifferenz dieser beiden Wassersäulen ist dann gleich der Niveaudifferenz der beiden beobachteten Stellen des Gewässers.

(A. Amsler.)

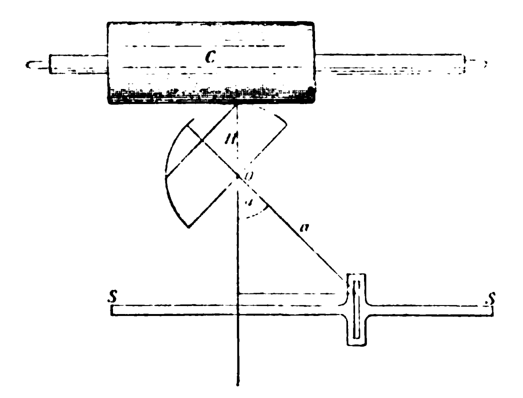
85 Smith's Integrator speciell zur Auswertung der Arbeit in Verbindung mit Dynamometern oder Ergometern bestimmt. Construirt von Prof. **F. J. Smith**, Trinity College Oxford.

Dies Instrument besteht wesentlich aus drei Teilen, einem horizontalen Cylinder C, einer Halbkugel H und einer der Axe des Cylinders parallelen Stange S. Der Cylinder wird von einer Axe getragen, die sich mit ihm dreht, während der Cylinder selbst sich frei auf der Axe hin und her bewegen kann. Die Halbkugel kann sich um einen verticalen Durchmesser und ebenfalls um ihre horizontal liegende Symmetrieaxe drehen.

Die Stange, welche sich nur in ihrer eigenen Richtung hin und her bewegen kann, trägt rechtwinklig zu ihrer Längsrichtung einen Arm mit



einem Schlitz, in dem ein fest mit der Symmetrieaxe der Halbkugel verbundener Stift E gleiten kann. Wird die Stange um eine Länge η vor-



wärts geschoben, so dreht sich die Halbkugel um die verticale Axe um einen Winkel φ, so dass $a \sin\varphi = y$, wo a die Entfernung des Stiftes vom Centrum der Halbkugel ist. Zugleich wird der Cylinder auf seiner Axe verschoben. Wird nun die Halbkugel um die Symmetrieaxe um den Winkel dy gedreht, so dreht sich der Cylinder um einen Winkel $d\Theta$ so

dass $c\, d\Theta = R\, d\psi$ wo $R = r \sin\varphi = \frac{r}{a} y$, r der Radius der **Halbkugel**, c der Radius des Cylinders ist. Wir erhalten also $d\Theta = \frac{r}{ac} y\, d\psi$.

Die Drehung der Halbkugel wird durch eine Schnur bewirkt, welche um eine am Rande der Halbkugel eingeschnittene Rinne läuft. Der Winkel $d\psi$ ist daher proportional der Strecke dx, um welche die Schnur sich bewegt hat. So folgt:

$$d\Theta = A\, y\, dx \text{ und}$$

$$\int y\, dx = B\Theta$$

wo A und B von den Dimensionen des Instrumentes abhängende Constanten bedeuten.

Θ wird durch ein Zählwerk an der Cylinderaxe gemessen.

Die besondere Art, in welcher x und y dem Integrator zugeführt werden, ist dadurch bedingt, dass das Instrument bestimmt ist in Verbindung mit einem Erg-messer benutzt zu werden, und zwar ist dann y die Kraft, x der unter der Wirkung der Kraft zurückgelegte Weg.

(F. J. Smith.)

86 **Harmonic Analyser** von **Lord Kelvin (C. William Thomson)**, Universität Cambridge.

Bezüglich der Beschreibung des Apparates sei auf den im ersten Teil befindlichen Bericht von Henrici über Harmonische Analysatoren, sowie auf die im ersten Teil der *„Natural-Philosophy"* von Thomson (2. Auflage, Cambridge 1879) enthaltenen Aufsätze über „Continuirliche Rechenmaschinen" (abgedruckt aus den Proceedings der Royal Society) verwiesen. Diese Aufsätze umfassen die folgenden Beschreibungen:

1. Flutrechnungs-Maschine.
2. Maschine zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.
3. Eine Integrirmaschine mit neuem kinematischen Princip: „Scheiben-, Kugel- und Cylinder-Integrator".
4. Instrument zur Berechnung des Integrals aus einem Product zweier gegebener Functionen.
5. Mechanische Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Coëfficienten.
6. Mechanische Integration der allgemeinen linearen Differentialgleichung von beliebiger Ordnung mit variablen Coëfficienten.
7. Harmonischer Analysator zur Berechnung der Flutconstituenten; zweite, dritte Flutconstituenten.

87 **Tide-Predictor (Flutberechnungsmaschine)**, von **Lord Kelvin (W. Thomson)**, Universität Cambridge; Photographische Abbildung, ausgestellt vom **South Kensington Museum**.

Man vergleiche hierzu ebenfalls den im 1. Teil enthaltenen Aufsatz von Henrici, sowie die genannten Aufsätze in Thomson's Natural Philosophy und den Bericht von H. Scott und R. H. Curtis in den Proceedings of the Royal Society.

88 **James Thomson's „Ball and Disc Mouvement"** Photographische Abbildung des Scheiben-Kugel- und Cylinder-Integrators von James Thomson Ausgestellt vom **South Kensington Museum London.**

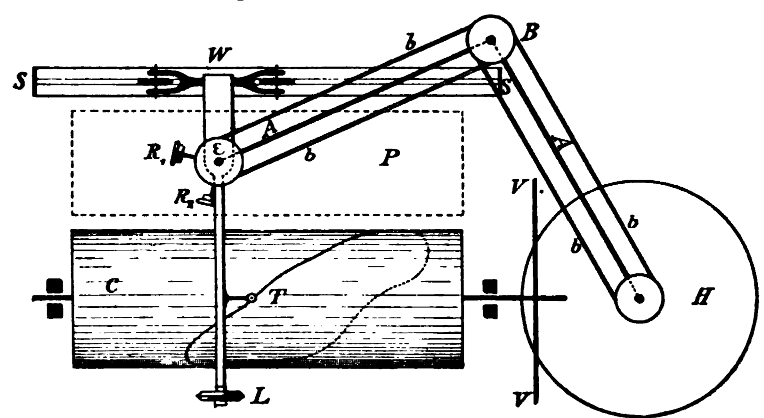
Man vergl. hiezu die Ausführung in den Aufsätzen von Amsler und Henrici in Teil I dieses Kataloges.

89 **Instrument zur Aufzeichnung harmonischer Curven** von Lieut. General **R. Strachey,** London.

Vergl. den mehrfach genannten Aufsatz von Henrici in Teil I des Kataloges.

90 **Harmonischer Analysator,** von Prof. **O. Henrici,** city and guilds of London Institute.

Man vergleiche hiezu den Aufsatz von Henrici über Harmonische Analysatoren im I. Teil dieses Kataloges, sowie die nachstehende Figur, die noch kurz im folgenden erläutert sei:



Ein Wagen W läuft mit zwei Rädern auf der Schiene SS, ein Laufrad L dient als dritte Unterstützung. Der Wagen trägt die Axe ε mit den Registrirrollen R_1 und R_2, welche auf der Platte P rollen, und den Fahrstift F, welcher immer die obere Erzeugende des Cylinders bestreicht. Die Axe der Scheibe H ist mit der Axe ε durch die Stangen A, A verbunden, welche durch ein Charnier um B frei beweglich sind. Die Drehung des Cylinders C wird durch das vertical stehende (auf der Axe entsprechend verschiebbare) Rad VV auf die Scheibe H übertragen. Durch die endlosen Stahlbänder wird dann weiter die Drehung der Scheibe H auf ε übertragen. Im Modell liegt die Schiene S unter der Platte P.

(O. Henrici.)

91 **Harmonischer Analysator,** construirt von den Herren **A. Sommerfeld** und **E. Wiechert**, verfertigt in der mathematischen Abteilung des physikalischen Instituts zu Königsberg unter Leitung von Herrn Prof. **Volkmann** von dem Mechaniker des Instituts Herrn **Gross** im Laufe des Jahres 1890, ausgestellt vom **Physikalischen Institut der Univ. Königsberg.**

Die Maschine, welche in der Sitzung der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg im Mai 1891 demonstrirt und zum erstenmale in den Schriften derselben, Band 32 Sitzungsber. pag. 28, veröffent-

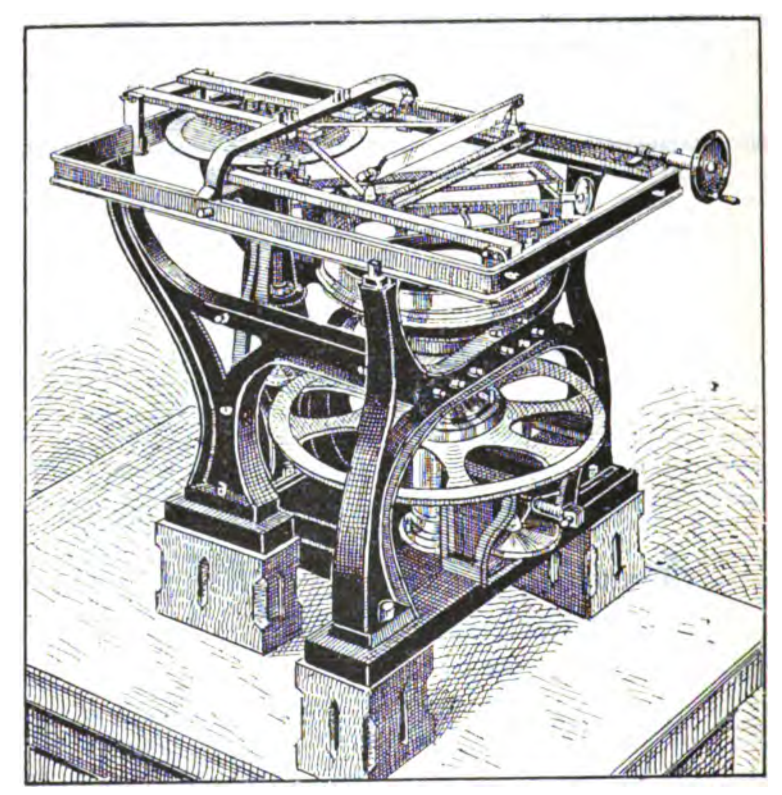


Fig. 1.

licht wurde, hat die Aufgabe, aus den (etwa durch Beobachtung) gegebenen Werten einer willkürlichen Function $y = f(x)$ die *Coëfficienten ihrer Fourier'schen Entwickelung* zu ermitteln, d. h. die Grössen a_n, b_n in der Gleichung:

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x \ldots$$

Es geschieht dieses durch Auswertung der bestimmten Integrale:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx;$$

als specieller Fall tritt die einfache Integration auf bei dem Coëfficienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Zu Beginn ist die Curve, welche die vorgelegte Function darstellt, auf eine mit Papier beklebte Walze aufzuzeichnen; sodann werden die Coëfficienten *nacheinander* bestimmt. Hierbei können zwei Processe unterschieden werden, welche in praxi gleichzeitig stattfinden: 1) die *Construction* der Curve $z = f(x)\cos nx$ bezw. $z = f(x)\sin nx$ aus der gegebenen Curve $y = f(x)$, 2) die *Integration* dieser neuen Curve, d. h. die Auswertung von $\int_0^{2\pi} z\,dx$. Diejenigen Teile, welche der Construction dienen, liegen vorn, d. h. dem Arbeitenden zugekehrt; (in Figur 1 befindet sich die vordere Seite rechts); sie gruppiren sich um eine verticale Axe, welche *Constructionsaxe* genannt werden soll. Diejenigen Teile, welche der Integration dienen, liegen um eine hintere, gleichfalls verticale Axe, die *Integrationsaxe* (auf der linken Seite der Figur 1). Ein oben befindlicher Schieber übernimmt die Vermittelung zwischen den vorderen und hinteren Teilen. Zur Vereinfachung der Beschreibung werden einige unnötige Annahmen über Grösse und Lage einzelner Teile gemacht, auf welche später hingewiesen werden wird.

Construction.

Vergleiche Fig. 2, welche eine Ansicht von oben darstellt. C und J sind die Durchstossungspunkte der Constructions- und Integrationsaxe mit der Ebene der Figur. Die Walze abcd, welche die gegebene Curve trägt, hat eine Länge von 210 mm und einen Umfang von 200 mm. Ihre Axe liegt bei den sogleich zu beschreibenden Bewegungen stets in derselben horizontalen Ebene und schneidet die Constructionsaxe. Die Curve ist bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen y-Axe ef der Walzenaxe parallel und dessen x-Axe auf einem durch C gehenden Kreise die Walze umläuft. Durch einen von der Walze wenig abstehenden Faden ef wird die jeweilig höchste Linie auf der Walze markirt. Der Schnitt P desselben mit der gegebenen Curve bestimmt in jedem Augenblicke zu dem in Frage kommenden x das zugehörige $y = CP$. Ein zweiter Faden gh, dicht über dem ersten, ist an dem Schieber ghik befestigt. Der Schieber ist nur in der Richtung CJ beweglich; diese gibt die z-Richtung der zu construirenden Curve an und zwar sei im Punkte C die z-Coordinate gleich 0. Ist nun der Winkel φ zwischen Walzenaxe und z-Richtung in jedem Augenblicke gleich nx bezw. $nx - \frac{1}{2}\pi$, wobei n den Index des auszu-

wertenden Coefficienten bedeutet, so wird $CQ = f(x) \cos nx = z$ bezw. $CQ = f(x) \sin nx = z$. Die Ordinate der zu construirenden Curve ist also gegeben durch diejenige Strecke, um welche der Faden gh aus seiner „Null-Stellung“ $g'h'$ verschoben werden muss, damit er durch den ausgeschnittenen Curvenpunkt P hindurchgeht.

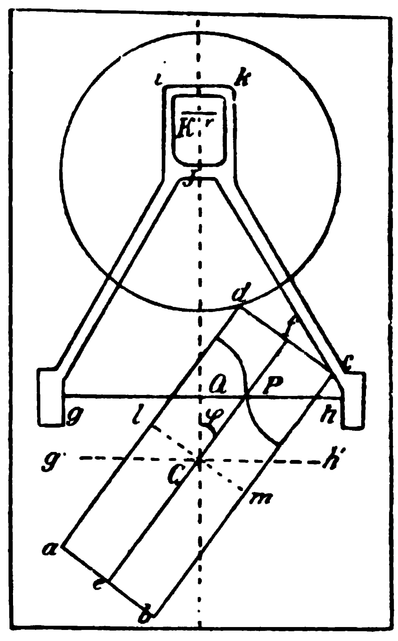


Fig. 2.

Um dem Winkel φ die verlangte Grösse zu geben, wird die Walze in zweifacher Weise gedreht; erstens um ihre eigene Axe, so dass x sich mit der Geschwindigkeit V ändert, zweitens um die Constructionsaxe mit der Winkelgeschwindigkeit $W = nV$. V ist proportional mit V', der Winkelgeschwindigkeit der Walze bei ihrer Drehung um ihre eigene Axe. Das Verhältnis von V und V' hängt ab von dem Masstab, den man bei der Zeichnung der Curve für x benutzt. Die Anfangslage der Walze ist parallel oder senkrecht zur z-Richtung, je nachdem es sich um ein Cosinus- oder Sinus-Glied handelt.

Integration.

Wollte man an dem Schieber einen Zeichenstift befestigen, so würde dieser auf einen mit der Geschwindigkeit V bewegten Papierstreifen die Curve $z = f(x) \cos nx$ bezw. $f(x) \sin nx$ aufzeichnen. Statt dessen wird die Integration direct angeschlossen, indem an Stelle des fingirten Stiftes ein Integrationsrädchen v angebracht wird, wie es

von *Amsler's* Planimeter her bekannt ist. Dieses ist um seine in der z-Richtung gelegene Axe leicht beweglich. Es rollt auf einer Scheibe aus Spiegelglas, der Integrationsscheibe, welche um die Integrationsaxe mit der Winkelgeschwindigkeit U rotirt. U und V sind einander proportional. K bedeutet den Berührungspunkt des Radumfanges mit der Scheibe. Ändert sich x um dx, so dreht die Scheibe sich um den Winkel $U/V\, dx$. Dadurch wird dem Rädchen eine Drehung übermittelt, welche proportional ist erstens zu dx, zweitens zu JK, dem Abstande des Rädchens vom Scheibenmittelpunkte. Es soll angenommen werden, dass r in J berühre, wenn der Faden des Schiebers gh durch C geht. Dann ist $JK = CQ = z$; die Drehung des Rädchens wird proportional zu zdx und seine Gesamtdrehung, während x um 2π wächst, proportional zu $\int_0^{2\pi} z\, dx$. Um also den Wert des gesuchten Integrales (bis auf einen Factor, der besonders bestimmt wird), zu erhalten, hat man nur die Zahl der Umdrehungen des Integrationsrädchens abzulesen, was vermittelst einer Teilung auf dem Rädchen und zweier Zählscheiben bis auf 5 Stellen geschehen kann.

Herstellung des verlangten Verhältnisses zwischen U, V, W.

Hierzu Fig. 3, welche eine Seitenansicht der vorderen Teile darstellt. Um die Bedingung $W = nV$ zu erfüllen, ist auf der Walzenaxe ein Stahlrad mit dem Radius s angebracht. Dieses liegt auf der oberen, ebenen, horizontalen Fläche eines Eisenringes T auf, der mit der Constructionsaxe concentrisch ist und sich um diese mit der Winkelgeschwindigkeit R dreht. Der Abstand des Auflagepunktes von der Constructionsaxe sei S. Dann wird vermittelst des Rades s der Walze die Rotationsgeschwindigkeit V' erteilt, die der relativen Geschwindigkeit $R - W$ des Ringes in Bezug auf die Walzenaxe proportional ist, $V' = S/s\,(R - W)$. V' steht in constantem Verhältnis zu V und zwar wählt man meistens $V' = 4\,V$. Aus der Bedingung $W = nV$ folgt also eine Bedingung für das Verhältnis von R und W. Dieser in *praktischer Weise* zu genügen, war die eigentliche Schwierigkeit bei dem Bau der Maschine.

Es sind an der Constructionsaxe 2 verschiedene Systeme beweglicher Teile zu unterscheiden, ein *inneres* und ein *äusseres*, mit den bez. Rotationsgeschwindigkeiten W und R. Zu dem inneren gehört die Walze mit dem Stahlrad s, die Stahlaxe A und auf dieser befestigt das Rad r_1, zu dem äusseren der Ring T, das „Übertragungsrad" O, die Kapsel K, welche r_1 umschliesst. An K und O ist ein Gehäuse H befestigt, in welches ein Rollenpaar (r_3, r_4) mit gemeinsamer Axe a eingeschoben werden kann; r_4 legt sich gegen r_1, r_3 gegen den feststehenden Klotz G, der ein Rad r_2 repräsentirt. In dem Klotz befindet sich die Kernspitze, auf der die äusseren Teile laufen. Die Spitze der Axe A für die inneren

Teile liegt auf der Basis von K auf. Dem äusseren System wird nun die Winkelgeschwindigkeit R primär erteilt. Weil sich r_3 gegen das feste Rad r_2 anlegt, kommt ausserdem eine Drehung des Rollenpaares um die Axe a mit der Winkelgeschwindigkeit $R \frac{r_2}{r_3}$ zu Stande. Weil sich ferner r_4 mit dem beweglichen Rad r_1 berührt, wird diesem und gleichzeitig dem gesamten inneren System eine Winkelgeschwindigkeit $W = \left(1 - \frac{r_4 r_2}{r_3 r_1}\right) R$ erteilt. Man kann nun die Grösse von r_3 und r_4 so bestimmen, dass das oben erwähnte Verhältnis zwischen W und R stattfindet. Die Bestimmung

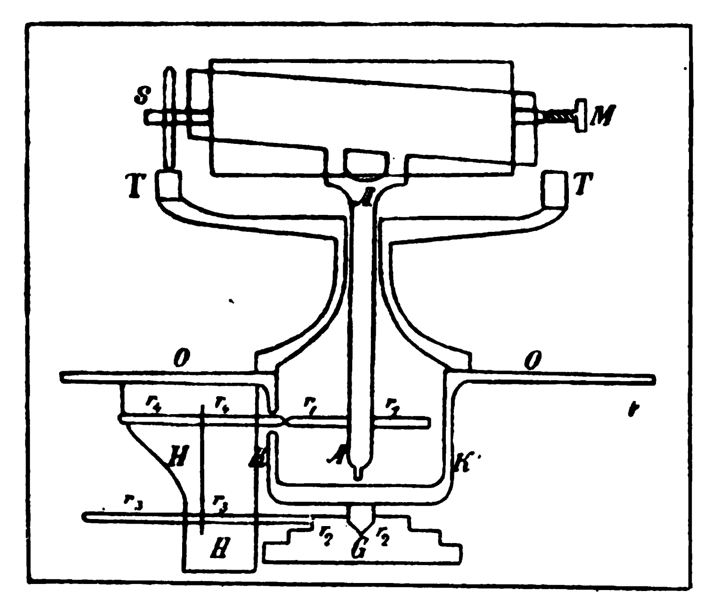


Fig. 3.

fällt verschieden aus für die verschiedenen Glieder der Reihe, deshalb ist dem Gehäuse H für jedes Glied ein neues Rollenpaar einzufügen. Damit die Dimensionen aller Rollenpaare in passenden Grenzen bleiben, musste dem Klotz G eine terassenförmige Gestalt gegeben werden, so dass 3 verschiedene Räder r_2 zur Verfügung stehen. Die Grösse von r_1 ist ein für alle Mal fest. Die Herstellung der Räder wird erleichtert und die Genauigkeit vergrössert durch den wichtigen Umstand, dass man im Stande ist, bei gegebenen Radien r_1, r_2, r_3, r_4 das Verhältnis W : V innerhalb gewisser Grenzen beliebig zu variiren und somit auf den erforderlichen Wert n zu bringen, dadurch, dass man den Abstand S des Rades s von der Constructionsaxe verändert, indem man die Walze mittelst der Mikrometerschraube M in Richtung ihrer Axe verschiebt.

Ausserdem war verlangt, dass die Winkelgeschwindigkeit U der Integrationsscheibe proportional sei zu V oder, wass dasselbe ist, zu R. Um dieses zu erreichen, ist an der Integrationsaxe ein Rad, das „zweite Übertragungsrad" befestigt, welches sich gegen das erste Übertragungsrad O anlegt. Dann verhalten sich U und R wie die Radien der Übertragungsräder.

Bei sämtlichen Geschwindigkeitsübertragungen, von denen die Rede war, kommen *Reibungsräder* und nicht *Zahnräder* zur Anwendung. Zahnräder, welche ebenso genau arbeiten, wie gedrehte Reibungsräder, würden ausserordentlich kostbar sein und höchst wahrscheinlich ihre Genauigkeit bald einbüssen. Andererseits wurde vor der Anwendung der Reibungsräder festgestellt, dass dieselben tadellos functioniren, wenn 1. der Druck, mit dem sie aneinandergepresst werden, genügend gross und 2. der Widerstand, der sich ihrer Bewegung entgegensetzt, genügend klein ist. Diesen Bedingungen musste überall Rechnung getragen werden. So werden die beiden Übertragungsräder durch eine Feder aneinandergepresst; eine andere Feder drückt das Rollenpaar (r_3, r_4) gegen die Räder r_1, r_2. Die zweite Bedingung eines geringen Widerstandes wird bei der Genauigkeit, mit welcher die Maschine gearbeitet und justirt ist, und der geringen Geschwindigkeit, mit welcher sie gedreht wird, von selbst erfüllt.

Gebrauch der Maschine.

Zur Orientirung dient Figur 4. Auf derselben erblickt man links ein Uhrwerk mit Gewichten, welches die Maschine in Bewegung setzt. Zwar ist eine gleichmässige Geschwindigkeit der Bewegung theoretisch nicht erforderlich, da immer nur die Verhältnisse von Geschwindigkeiten in Frage kommen, aber praktisch dennoch wünschenswert, weil die schweren Metallmassen zu träge sind, um plötzliche Geschwindigkeitsänderungen fehlerfrei mitzumachen. Der Arbeitende befindet sich nicht unmittelbar an der Maschine, sondern beobachtet durch ein Fernrohr in der Entfernung von 3 m. Hierdurch wird einmal die Bequemlichkeit ausserordentlich vermehrt, andererseits werden parallaktische Fehler bei der Einstellung des Schiebers vermieden. Über dem Faden des Schiebers befindet sich ein Spiegel, in welchem der Beobachter das Bild der Walze und der beiden Fäden erblickt. Seine Aufgabe ist es, den Schnittpunkt der Fäden beständig auf die Curve einzustellen. Zu diesem Zwecke dreht er mit seiner Rechten eine Kurbel, durch die vermittelst einer Uebertragungsstange und einer Schraube der Schieber bewegt wird. Eine Schnur zu seiner Linken führt zu einer Bremse des Uhrwerks. Durch diese kann das Uhrwerk angehalten oder sein Gang verlangsamt werden. Das letztere ist wichtig, wenn die Curve sehr steile Partien hat oder gar unstetig verläuft, so dass es bei unverminderter Geschwindigkeit derselben zu folgen schwierig bez. unmöglich wäre.

Als ein Vorzug der Maschine darf es angesehen werden, dass die

Aufzeichnung der Curve mit der Maschine selbst geschehen kann, ohne dass es nötig wäre, neue Hilfsmittel zu benutzen. Zu diesem Zwecke wird die Walze in der Z-Richtung festgestellt, in gleicher Richtung ein Masstab an dem Gestell der Maschine angebracht. Auf dem Schieber befindet sich eine Marke, welche sich gegen den Masstab anlegt; man stellt mit dieser die Y-Coordinate des zu zeichnenden Curvenpunktes ein. Für die Einstellung der X-Coordinate wird das Übertragungsrad O benutzt, auf dem eine Teilung angebracht ist. Dreht man dieses um einen Scalenteil vorwärts, so bewegt sich die Walze um ein bestimmtes entsprechendes Stück. Der an dem Schieber befestigte Zeichenstift ist eigentümlich construirt. Er ist in einer Hülse drehbar und wird durch eine Feder von der Walze abgehoben. Will man einen Curvenpunkt markiren, so drückt man den Stift herunter und erteilt ihm eine Rotation um seine

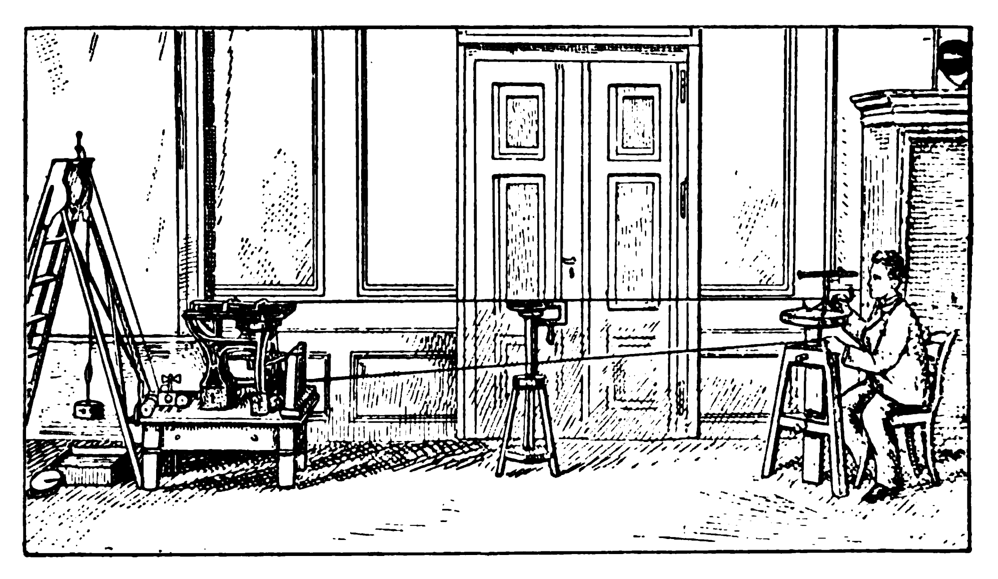


Fig. 4.

Axe. Er wird im Allgemeinen einen kleinen Kreis zeichnen, dessen Mittelpunkt in jedem Falle den richtigen Punkt darstellt. Auf diese Weise werden Fehler wegen excentrischer Lage des Stiftes oder ungleichmässiger Abnutzung der Spitze mühelos vermieden. Mehr noch würden ins Gewicht fallen Fehler, welche durch Verzerrung oder Verbiegung des Papiers hervorgerufen werden müssten, wenn man die Zeichnung etwa auf dem Reisbrette ausführen und das Papier nachträglich auf die Walze bringen wollte. Diese sind bei der beschriebenen Methode von vorn herein ausgeschlossen.

Ist die Curve aufgezeichnet, so kann man zur Coëfficientenberechnung schreiten. Man setzt zunächst das zu dem betreffenden Gliede gehörige Rollenpaar ein, giebt der Mikrometerschraube die entsprechende ein für alle Mal bestimmte Stellung, regulirt die Anfangslage der Walze und zwar in verschiedener Weise, je nachdem ein Sinus- oder Cosinusglied berechnet werden soll; endlich liest man die Stellung des Integrationsrädchens vor und nach der Integration ab; die Differenz der Ablesung ergibt bis auf einen Factor den gesuchten Coëfficienten.

Was die Justirung betrifft, so ist es nur nötig, die folgenden 3 Axen: die Integrationsaxe, die Drehungsaxe des oben beschriebenen äusseren und die des inneren Systemes parallel zu stellen, die beiden letzteren Axen zu centriren und die Schienen zu reguliren, zwischen denen der Schieber gleitet. Dagegen ist es z. B. nicht nötig, dass die Axe der Walze und der Kreis $y = o$, wie der Einfachheit der Beschreibung wegen angenommen wurde, durch die Constructionsaxe hindurchgeht, ein Umstand, welcher bei der Einrichtung der Mikrometerschraube benutzt ist; auch ist die genaue Lagerung des Planimeterrädchens gleichgültig.

Um von der *Genauigkeit* ein richtiges Bild zu erhalten, fasse man die Integrationszahlen geometrisch als Amplituden der betreffenden Sinus-(Cosinus-) Function auf. Sie lassen sich dann in Millimetern angeben und zwar liegt ihr Wert bei den Dimensionen der Maschine zwischen 0 und 100 mm. *Der Fehler ist dabei stets kleiner als $^1/_{10}$ mm.* Eine etwaige Ungenauigkeit in der Bewegung des Räderwerkes ist an einem Teilkreise zu erkennen. Dieselbe wird durch Interpolation zwischen 2 Beobachtungen leicht herausgeschafft.

Unterschiede mit Sir W. Thomson's Harmonic Analyser.

Dieselben bestehen hauptsächlich in folgenden Punkten: a) Während bei dieser Maschine die einzelnen Glieder nacheinander berechnet werden, liefert die Thomson'sche Maschine die Coefficienten gleichzeitig. Der dadurch erzielten grösseren Schnelligkeit steht allerdings eine bedeutende Complication des Baues gegenüber. Denn es sind dort gewissermassen so viel besondere Integrirmaschinen nebeneinander gesetzt, als Coefficienten bestimmt werden sollen. b) Thomson wendet die Cylinder-Kugel-Integratoren J. Thomsons und nicht das Planimeterrädchen an, weil das Gleiten des Rädchens in der zu seiner Ebene senkrechten Richtung zu Fehlern Veranlassung gebe. Die hier benutzte Einrichtung wird von diesem Vorwurf wohl nicht getroffen, weil die gleitende Bewegung des Rädchens gegen die rollende bedeutend zurücktritt, was durch passende Wahl des Durchmessers der Übertragungsräder möglich war. c) Thomsons Analysator wertet die Glieder bis zu $n = 3$ aus, hier ist diese Beschränkung bei Herstellung der nötigen Rollenpaare nicht vorhanden. d) Thomson benutzt bei Geschwindigkeitsübertragungen Zahnräder, hier sind principiell Reibungsräder eingeführt worden.

(A. Sommerfeld.)

Zum Instrument von Sommerfeld und Wiechert.*)

Dies Instrument unterscheidet sich wesentlich von den bisher beschriebenen. Die Integration wird durch eine Amsler'sche Registrirrolle bewirkt, welche auf einer geschliffenen Glasplatte läuft. Zugleich ist das Gleiten dieser Rolle möglichst vermindert. Der von Sir Wm. Thomson gerügte Fehler dieser Rollen wird jedenfalls nur sehr gering sein.

Die Curve $y = f(x)$ ist auf einen Cylinder verzeichnet. Die Zerlegung von y geschieht hier nicht durch eine harmonische Bewegung, sondern dadurch, dass sich der Cylinder während einer Umdrehung um seine Axe zugleich um eine zur letzteren senkrechte Axe dreht.

Das sinnreiche, vorstehend genau beschriebene Instrument wird unzweifelhaft grosse Genauigkeit geben. Es erfordert aber für jeden Coefficienten A_n und B_n ein besonderes Durchlaufen der Curve. Dieses dürfte für eine specielle Untersuchung im physikalischen Laboratorium von geringer Bedeutung sein. Handelt es sich aber darum, eine grosse Anzahl von Curven zu analysiren, so ist dies ein wesentlicher Nachteil. Im meteorologischen Institut in London sind für den Zeitraum von zwölf Jahren die täglichen barometrischen und thermometrischen Curven analysirt und zwar bis zu den Gliedern $n = 3$. Mit dem Instrumente von Sommerfeld und Wiechert wäre also die Arbeit siebenmal so gross.

Es mag hier noch bemerkt sein, dass Thomson's Analysator, wie er in der Metereological Office ausgeführt ist, Vorrichtungen besitzt, um durch Einschalten von Rädern auch höhere Coefficienten als die für $n = 3$ zu bestimmen.

Im Vergleich mit den von mir (Nr. 90) angegebenen Analysatoren, die allerdings nur im ersten Modell hergestellt sind, ist hervorzuheben, dass mein Bestreben dahin ging, ein Instrument zu schaffen, welches billig, transportabel und leicht zu handhaben ist, welches also namentlich für technische Zwecke dienlich wäre, wo es auf äusserste Genauigkeit nicht ankommt. In dieser Beziehung dürfte die Construction von Wm. Sharp sich besonders auszeichnen, welche ich in kurzer Zeit ausgeführt zu sehen hoffe. Es wird in Grösse und Handlichkeit einem Amsler'schen Integrator oder einem Coradi'schen Integraphen gleichkommen und wie diese auf das Reissbrett gelegt, auf dem die Curve gezeichnet ist.

An Genauigkeit wird es aber wohl von dem Instrumente von Sommerfeld und Wiechert erheblich übertroffen werden.

(O. Henrici.)

---

*) Wir schalten hier eine uns von Herrn *Henrici* im Nachtrag zu seinem im I. Teile des Kataloges veröffentlichten Aufsatze zugehende Note ein.

Die Redaction.

92 Integrator zur numerischen Auswertung des elektromagnetischen Punkt-Potentials, von stud. phys. **J. Schütz** in München.

Sei mit S irgend eine geschlossene Strombahn, mit P ein Punkt ausserhalb derselben und mit V das magnetische Potential eines die Strombahn S mit der Intensität 1 durchfliessenden elektrischen Stromes im Punkte P bezeichnet, so ist $V = k\Phi$, wo k eine Constante, und Φ ein Integral bedeutet, dessen analytische Auswertung nur in vereinzelten speciellen Fällen möglich ist. Doch hat dieses Integral bekanntlich eine sehr einfache geometrische Bedeutung; legt man nämlich durch den Punkt P und irgend einen Punkt A der Strombahn eine Gerade PA, und lässt diese längs der Leitlinie S einen Kegelmantel erzeugen, so schneidet dieser aus einer um den Punkt P mit dem Radius 1 geschlagenen Kugeloberfläche eine Calotte heraus, deren Flächeninhalt dem Φ proportional, oder — bei passender Wahl der Constanten k — geradezu gleich ist.

Sei B ein dem Punkte A unendlich benachbarter Punkt auf S, ferner PM eine ganz beliebig durch P gelegte feste Gerade, so werden die drei Geraden PM, PA und PB die oben definirte Einheits-Kugeloberfläche in drei Punkten M′, A′, B′ durchstossen, welche ein sphärisches Dreieck von der Grösse $d\Phi = p d\alpha$ bestimmen, wenn $d\alpha$ der Winkel ist, den die Ebenen PMA und PMB einschliessen und p die Projection des Kreisbogens M′A′ auf PM ist. Die gesamte Calotte wird somit sein:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} p d\alpha,$$

wobei p im Allgemeinen von Punkt zu Punkt variirt. Es sei noch der Fusspunkt der Projection der PA′ auf PM′ mit N bezeichnet, so dass $p = M'N$ ist. Beim vorliegenden Apparate nun ist PA′ die optische Axe eines Fernrohres; PM′ ist die Axe eines cylindrischen Stabes; in einer spangenartigen Durchbrechung dieses Stabes ruht das Fernrohr so, dass es in der Ebene M′PA′ um den Punkt P drehbar ist. Das Fernrohr, beziehungsweise eine halbhülsenförmige Verlängerung desselben trägt im Punkte A′ ein Stäbchen A′N. Der Stab PM′ trägt eine auf ihm verschiebbare Kreisscheibe, deren Ebene normal auf PM′ steht. An dieselbe ist möglichst nahe ihrem Mittelpunkte ein Röhrchen angelötet. Durch dieses Röhrchen nun ist das Stäbchen A′N hindurchgesteckt. Letzteres ist somit gezwungen, bei jeder Lage des Fernrohres normal zur Axe PM′ zu bleiben. Genau unterhalb M′ befindet sich eine zweite horizontale Kreisscheibe derart, dass sich die oben erwähnte verticale Scheibe auf ihr mit Friction bewegt. Diese Scheibenvorrichtung, welche der Verfertiger auf eine im math. Seminar der Herren Proff. Dyck und Finsterwalder erhaltene Anregung hin getroffen, ge-

stattet, das Resultat direct, ohne Verwendung eines eigenen Planimeters, abzulesen. Hiezu braucht nur die horizontale Scheibe mit einer Einteilung und einem fixen Zeiger versehen zu sein. Man justirt den Apparat so, dass der Durchschnittspunkt des Ocular-Fadenkreuzes mit dem Aufpunkte P zusammenfällt. Hierauf sucht man mittelst des Fernrohres die ganze Strombahn S ab. Unsicherheit in der Führung des Fernrohres hat auf das Resultat keinen Einfluss. War zu Anfang der Zeiger auf 0 gestellt, so zeigt er zum Schlusse die Zahl an, welche dem Werte Φ zukommt.

(J. Schütz.)

93 **Modell des Reitz'schen Ebbe- und Flutintegrators**, ausgestellt von der **Seewarte Hamburg**, Director Geh. Adm. Rat **Neumayer**

Dieser Integrator ist auf Helgoland, in Cadix und Marseille in Thätigkeit. Das Modell besitzt keine Vorrichtung zum Registriren der Fluterscheinungen.

94 **Modell für das Princip des Seeweg-Integrators**, construirt von **Reitz** in Hamburg, berechnet und ausgestellt von Prof. **H. Schubert**, Johanneum Hamburg.

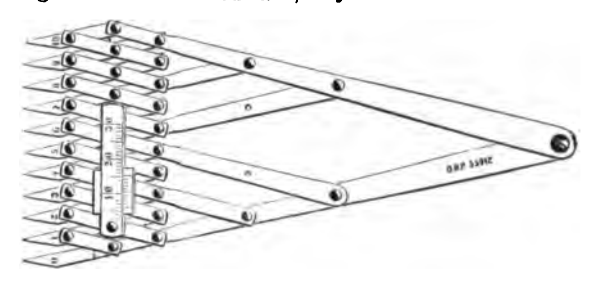
Eine Beschreibung befindet sich beim Modell.

II. Abteilung.

Geometrie.

H. Zeichenapparate.

95 **Teilungsmasstab,** D. R.-P. Nr. 55912, Zusatz 2726, von **Fr. Adami** in Bayreuth, ausgestellt von **J. Friedmann**, Bayreuth.



Das Instrument ist in erster Linie zum Teilen von Strecken bestimmt, kann aber in gewissem Umfange auch als Masstab, Winkelmesser, Lineal und Zirkel benützt werden.

Die Einrichtung und der Gebrauch beim Teilen einer gegebenen Strecke in eine Anzahl gleicher Teile erhellen aus obiger Abbildung. Eine auf der Mittellinie der Parallelogramme angebrachte Scala mit Nonius dient zum Ablesen der Länge irgend einer zwischen die Endspitzen gefassten Strecke. Mit einer der beiden Führungsstangen ist ein Transporteur verbunden.

(F. Adami.)

96 **Zirkeleinsatz für Winkeldrittelung und Winkelconstruction**, von Hauptmann **Hermes** in Berlin, ausgeführt in der Fabrik mathematischer Instrumente von **C. Riefler**, München, Nesselwang.

Die Vorrichtung, Fig. 1, besteht aus dem Einsatzstück DE, welches zum Einsetzen in einen Zirkel dient und dem Gabelstück BC. Letzteres ist mit dem Einsatzstück bei E durch einen Stift derart verbunden, dass die Spitzen B und C bei jeder Öffnung des Zirkels (durch Aufstellen auf das Papier) mit der Zirkelspitze A in eine gerade Linie gebracht werden können.

Um einen beliebigen, unter 120 Grad betragenden Winkel NAP zu dritteln (Fig. 2), trägt man auf dem Schenkel AN die Entfernung BC des Instrumentes gleich AM ab, schlägt mit AM um M einen Kreis, bezw. Bogen und zieht MQ parallel AP. Dann setzt man die Zirkelspitze A

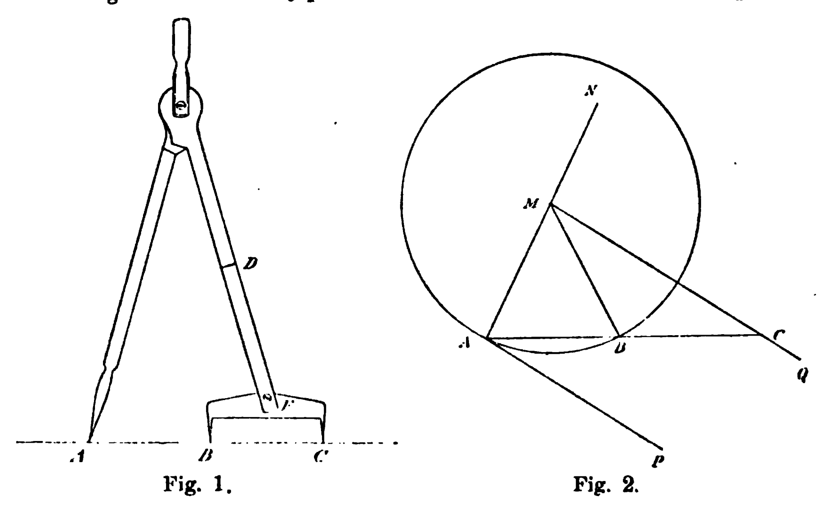


Fig. 1. Fig. 2.

in A ein und bewegt das Gabelstück schleppend mit der Spitze C auf MQ, bis die Spitze B auf dem Kreisumfange steht. AC ist dann die Drittelungslinie des Winkels NAP.

Beweis. Man ziehe den Halbmesser MB, dann ist

$$\sphericalangle \text{PAC} = \text{ACM} = \text{CMB} = \tfrac{1}{2}\,\text{MBA} = \tfrac{1}{2}\,\text{MAC}$$
$$\text{oder} = \tfrac{1}{3}\,\text{NAP}.$$

(Hermes.)

97 **Zirkel mit vier Spitzen** nach **Fiorini-Vergnano**, ausgestellt von Ingenieur **P. Fiorini**, Turin.

98 **Zwei Zeichenapparate, Fernpunktlineal und Grosskreiszirkel,** von **H. Wiener**, Privatdoc., Univ. Halle a. S.

1. Fernpunktlineal.

Löst die Aufgabe: Nach dem unerreichbaren Schnittpunkte zweier gegebener Geraden sollen durch gegebene Punkte Gerade gelegt werden.

2. Grosskreiszirkel.

Löst Aufgaben, wie:

Durch drei gegebene Punkte soll ein Kreis gelegt werden, wenn auch der Mittelpunkt unzugänglich ist.

Durch zwei gegebene Punkte ist ein Kreis von gegebenem sehr grossen Radius zu zeichnen.

(H. Wiener.)

99 **Perspectivlineal (Fluchtpunktschiene)**, construirt vom **Aussteller** im Jahre 1890, hergestellt von der Firma **J. Schröder** in Darmstadt. Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt.

Dieses Instrument dient zum Ziehen gerader Linien nach ausserhalb der Zeichenfläche liegenden, nicht mit dem Lineal erreichbaren Punkten und bildet eine neue Form des bereits vor dem Jahre 1814 von *Peter Nichelson* erfundenen „Centrolineals“, das von *Streckfuss* wieder gefunden und 1865 von ihm unter dem Namen „Fluchtpunktschiene“ beschrieben worden ist. Es beruht auf dem Satze, dass, wenn in der Ebene zwei von drei sich in einem Punkte schneidenden, starr mit einander verbundenen, bewegten Geraden durch feste Punkte gehen, auch die dritte durch einen festen Punkt läuft und besteht demgemäss aus drei durch einen Bolzen verbundenen und um diesen drehbaren Linealen, der Zeichenschiene und zwei Leitschienen, welche mittelst einer Flügelschraube gegenseitig festgestellt werden können.

Neu ist an dieser Construction: 1) dass die festen Stützpunkte der Leitschienen nicht durch leicht sich verbiegende Nadeln oder dünne Stifte, sondern durch Messingcylinder von 1 cm Durchmesser dargestellt und dementsprechend zur Wahrung der geometrischen Richtigkeit die Kanten der Leitschienen um 0,5 cm parallel verlegt sind; 2) dass nach dem Übergang von einem rechts liegenden unzugänglichen Punkte zu einem links liegenden oder umgekehrt durch eine bequem ausführbare Umstellung die nun oben liegende Kante der Zeichenschiene Zeichenkante wird (d. h. durch die Axe des Bolzens geht), was dadurch erreicht ist, dass der Bolzen nach dem Lösen der Flügelschraube durch einen Schlitz im Kopfe der Zeichenschiene aus der ersten Lage in eine zweite gebracht werden kann, wobei die beiden Kanten der Zeichenschiene ihre Rollen vertauschen; 3) dass es durch Anbringung von Teilungen an den Kanten der Zeichenschiene ermöglicht ist, das Instrument unmittelbar auf einen unzugänglichen Punkt einzustellen, der in bekannter Richtung und Entfernung von irgend einem Punkte der Zeichenfläche sich befindet.

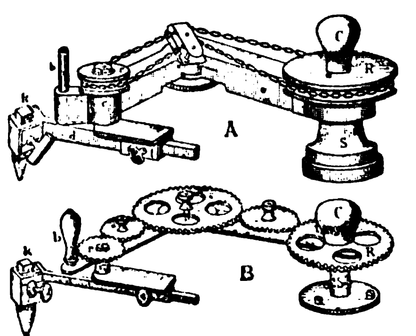
(Mehmke.)

100 **Ellipsenzirkel**, nach Angabe von Prof. **K. Rohn**, a. d. techn. Hochschule Dresden.

Derselbe beruht darauf, dass eine Strecke sich mit ihren Endpunkten auf zwei senkrechten Geraden bewegt. Statt der Punkte sind grosse Kreisscheiben benutzt, die in zu einander rechtwinkligen Rahmen geführt werden.

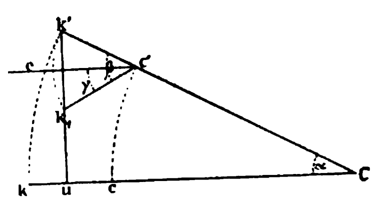
101 **Zwei Ellipsographen** von **P. C. Braun** S. J. in Mariaschein (Ungarn), verfertigt und ausgestellt von **A. Kreidl**, Fabrik physikalischer Apparate in Prag.

Der Ellipsograph, welcher in Fig. A in einer einfacheren, in B in der vollkommeneren Form dargestellt ist, besteht im Wesentlichen aus einem centralen Ständer S, mit der Axe C und einem um diesen beweglichen knieförmigen Führungsarm Cgc, dessen Kniewinkel durch eine im Knie angebrachte Klemmschraube auf eine bestimmte Grösse eingestellt werden kann. Concentrisch zu C und am Ständer fest, sitzt ein Rad (oder Scheibe) R und centrisch zu c ein Rädchen r, deren Halbmesser genau im Verhältnis 2:1 stehen. Das Rädchen r sitzt fest auf einer, durch den Führungsarm gc hindurchgehenden drehbaren Axe, die unterhalb des letzteren die Zeichenvorrichtung trägt. Diese besteht zunächst aus einer länglichen, rechtwinkligen Platte, welche an derselben Axe c festgenietet ist und ein Hohlprisma von rechteckigem Querschnitt trägt, in welchem das den Zeichenstift tragende Stäbchen verschoben und in geeigneter Entfernung festgeklemmt werden kann.



Die beiden Räder (bezw. Scheiben) R und r stehen so in einer mechanischen Verbindung, dass die Drehung des einen auf dem anderen fortgeleitet wird. Diese Verbindung ist in Fig. A durch eine geeignete Kette bewirkt, welche über das Knie g geleitet wird. In Fig. B erscheint die erforderliche Verbindung durch Zahnräder hergestellt.

Dass bei dieser Verbindung der Zeichenstift eine Ellipse beschreibt, folgt entweder aus bekannten Sätzen über die Bewegung der Ebenen des grossen und kleinen Cardankreises gegeneinander, kann aber in elementarer Weise auch aus Folgendem entnommen werden (Vergl. die Hilfsfigur). Wird der (knieförmige) Zeichenarm Cc mit dem Stifthebel ck aus der Anfangsposition um den Winkel α gedreht, so hat sich der Stifthebel ck, vermöge der oben beschriebenen Übertragung der Drehung in entgegengesetzter Richtung um $\beta = 2\alpha$ gedreht. Es ist somit die Ordinate $uk = (Cc' - c'k') \sin\alpha$, während die Kreisordinate $uk' = (Cc' + c'k') \sin\alpha$ ist, so dass beide Ordinaten, wie nachzuweisen war, ein constantes Verhältnis haben. (Man vergl. hiezu auch den unter Kinematik in Abteilung III ausgestellten, auf demselben geometrischen Princip beruhenden, jedoch anders ausgeführten Ellipsographen von Slaby.)



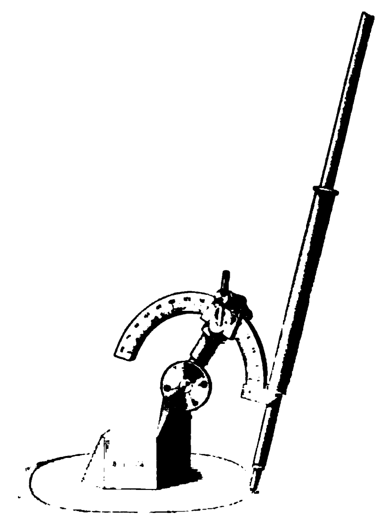
(P. C. Braun.)

102 **Kegelschnittzirkel**, nach Angabe von Oberlehrer **Hildebrandt**, Braunschweig (D. R. P. 56560) ausgeführt und ausgestellt von **O. Günther**, Mechaniker an der techn. Hochschule zu Braunschweig.

Der Kegelschnittzirkel von Dr. Hildebrandt beruht auf dem Dandelin'schen Satze:

„Schneidet man einen Umdrehungskegel durch eine Ebene und construirt diejenigen beiden Kugeln, welche Kegel und Ebene zugleich berühren, so sind die Punkte, in denen die Ebene von den Kugeln berührt wird, die Brennpunkte des betreffenden Kegelschnittes."

Die schneidende Ebene wird vom Zeichnungsblatt dargestellt, der Kegel vom Instrument dadurch erzeugt, dass um eine feste Axe ein stabförmiger, in einer Hülse verschiebbarer, und durch sein Gewicht immer auf der Zeichenebene aufsitzender Zeichenstift in constanter Neigung zur Axe rotirt. Die Kegelaxe selbst ist um einen mit dem Fusse des Instrumentes fest verbundenen Punkt in einer Ebene verstellbar und

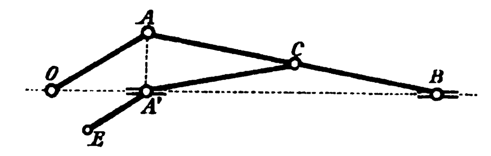


trägt in unveränderlichem Abstand ein mit Fixirschraube versehenes Hohlprisma, durch welches ein wieder verstellbarer, kreisbogenförmiger, mit Gradteilung versehener Bügel läuft, der tangentiell die Hülse des Zeichenstifts trägt. Durch Combination der Möglichkeiten, die Axenrichtung und den am Bügel ablesbaren Axenwinkel zu verändern, kann man schliesslich jeden gewünschten Kegelschnitt innerhalb gewisser, durch das Modell gegebener Dimensionen hervorbringen. Der Abstand des Justirpunktes der Kegelaxe ist so gewählt, dass dessen am Fusse markirte Projection den einen Brennpunkt des zu zeichnenden Kegelschnitts sofort darstellt. Man vergl. im Übrigen den dem Modelle beigegebenen Prospect. Der Preis des Instrumentes beträgt 36 Mk.

(Kleiber.)

103 **Elliptograph nach Burstow,** ausgeführt und ausgestellt von **W. F. Stanley,** London.

Dieser Ellipsograph beruht auf einer Ausführung des folgenden Gedankens: Ist OA ein um O in Bewegung befindliches Glied, und zieht man jeweils durch den Fusspunkt A' der von A auf eine durch O gezogene Axe gefällten Senkrechten zu OA parallel eine Linie A'E von fest gewählter Länge, so beschreibt E eine Ellipse.



Der Fusspunkt A' wird in bekannter Weise dadurch erhalten, dass man ein in A befestigtes erstes Hilfsglied AB mit dem Ende B und ein um den Mittelpunkt C von AB drehbares zweites Hilfsglied CA' von der Länge $^1/_2$ AB mit seinem Endpunkt A' auf der Axe gleiten lässt. — Die Parallelführung der Glieder A'E und OA wird nicht kinematisch durch einzuschaltende Parallelogramme, sondern praktisch durch Legung einer Kette über ACA' besorgt. Die Längen OA und A'E des Instrumentes sind veränderbar. (Man vergl. Math. Drawing and measuring instruments etc. von W. F. Stanley, London).

(Kleiber.)

104 **Cymograph,** von Prof. **Willis,** ausgeführt und ausgestellt von **W. F. Stanley,** London.

Der Apparat bezweckt, eine vorgegebene Zeichnung oder die Contur eines Gesimses etc. in wahrer Grösse, aber gegen die Position des Originals parallel verschoben erscheinend, wiederzugeben. Kinematisch erledigt sich die Lösung des Problems durch einen Apparat, der aus zwei Gelenkparallelogrammen mit gemeinsamer Seite a besteht. Hält man von den zwei zu a noch parallelen Gliedern das eine fest und beschreibt mit einem Punkte A des andern die Originalfigur, so wird jeder Punkt B desselben Gliedes eine mit dieser congruente und entsprechend verschoben erscheinende Zeichnung liefern. — (Man vergl. Math. Drawing and measuring instruments, etc. von W. F. Stanley, London.)

(Kleiber.)

105 **Serie von Ellipsen,** als Curvenlineale zu gebrauchen, von **W. F. Stanley,** London.

106 **Apparat zur Erzeugung einer Cykloide,** von **M. Spott,** Reallehrer in Neustadt a. H.

Um eine Cykloide zu erzeugen, wird ein dünner Metallstab an einer Schultafel befestigt. Längs desselben wird mittels eines Handgriffes eine kreisförmige Metallscheibe bewegt, wobei an einer der Peripherie

nahen Stelle ein Stück Kreide federnd angebracht ist. Um eine Epicykloide bezw. Hypocykloide darzustellen, wird genannte Scheibe über einen aus dünnem Metalle bestehenden und an der Schultafel zu befestigenden Kreisring geführt und zwar im ersten Falle auf der convexen, im zweiten auf der concaven Begrenzung. (Preis incl. Verpackung 25 M.)

(M. Spott.)

107 **Zwei Cykloidenapparate,** von Ingenieur **K. A. Mayer** in Einbeck (Hannover).

Der erste Apparat dient zur mechanischen Erzeugung der Hypocykloiden, der zweite (nur in Zeichnung dargestellt) zur Erzeugung der Epicykloiden.

Man vergl. hierzu noch die in Abteilung III unter Kinematik aufgeführten Apparate zur mechanischen Erzeugung ebener und sphärischer Curven.

---

108 **Perspectograph** von **M. Stühler** (D.R.P. 63199 und 2960), verfertigt und ausgestellt von **J. Herrmanstörfer** in Nürnberg.

Der Apparat ist zum Entwerfen von Perspectiven bestimmt und von denkbar einfachster Art. Ein Gummifaden, am einen Ende am Zeichenbrett in entsprechender Lage zu befestigen, trägt am andern Ende den Zeichenstift. Längs des Fadens ist eine Perle angebracht, zum Einstellen des gewünschten Abbildungsverhältnisses verschiebbar. Das Auge folgt von fester Visiröffnung aus den Contouren des abzubildenden Gegenstandes; dabei wird der Zeichenstift so auf der Zeichnungsebene geführt, dass die Perle stets in der Visirlinie sich befindet.

Eine als „Präcisionszeichner" bezeichnete Ausführung des Apparates hat doppelten Faden und noch einige weitere, der genaueren Einstellung und Führung dienende Vorrichtungen.

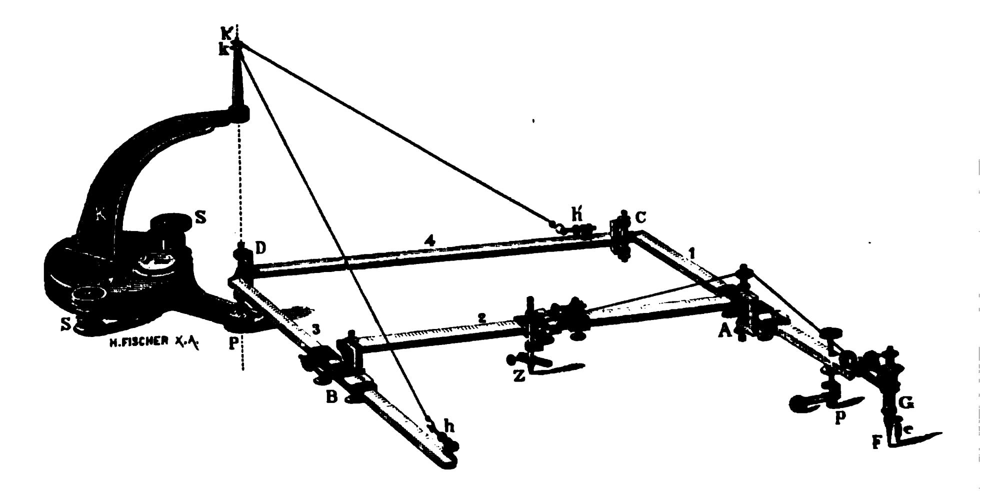
(Dyck.)

109 **Freischwebender Pantograph,** construirt und ausgeführt von **A. Ott, Math. mech. Institut** in Kempten.

Bez. der näheren Angaben sei auf den *Specialkatalog* von *A. Ott* verwiesen.

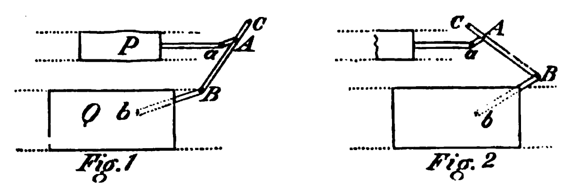
110 **Freischwebender Präcisionspantograph,** construirt und ausgeführt von **G. Coradi**, Zürich.

(Pantograph Nr. III des Kataloges von G. Coradi (1891). Bezüglich der näheren Details dieser Pantographen, sowie der Verkaufspreise sei auf den genannten *Katalog* verwiesen. (Abbildung siehe nächste Seite.)



111 **Pantagraph, zur Reduction gegebener Figuren nach Länge und Breite** von **F. Galton**, in London, ausgeführt von **Beck**, London.

Der Apparat dient dazu, eine vorgegebene Zeichnung in 2 zu einander senkrechten Richtungen nach verschiedenem Masstab direct oder invers zu verjüngen. Er beruht im Wesentlichen auf folgendem elementaren Satze: (vergl. die aus den Aufsätzen Galtons im Report of the Meteorological committee of the R. S. 1869, 1870, auf die überhaupt wegen Beschreibung der näheren Details verwiesen sei, übernommenen Fig. 1 und 2): „Sind die Punkte a und b zweier Platten P und Q, welche (durch



Schienen) gezwungen sind, sich parallel zu bewegen, so durch Stäbe a A und b B mit einem um C drehbaren Arm C A B verbunden, dass in einer Position der Platten die Dreiecke a A C und b B C entspr. ähnlich sind, dann bleiben letztere auch bei Bewegung der Platten immer entsprechend ähnlich." Demnach ist die Verschiebung von Platte P ein constanter Bruchteil derjenigen von Platte Q Stellt nun Q die Platte mit der Originalzeichnung vor, P jene, welche die Copie aufnimmt, so ist zunächst die Verjüngung im Sinne der Bewegung der Platten P und Q erreicht. Diese Platten laufen in Schienen, die in Fig. 11 gegen den Beschauer gerichtet sind; ihre Bewegung erzeugt man durch den mit der Linken zu fassenden Schraubenkopf R. Um eine gleichzeitige Verjüngung in der zur Bewegungs-

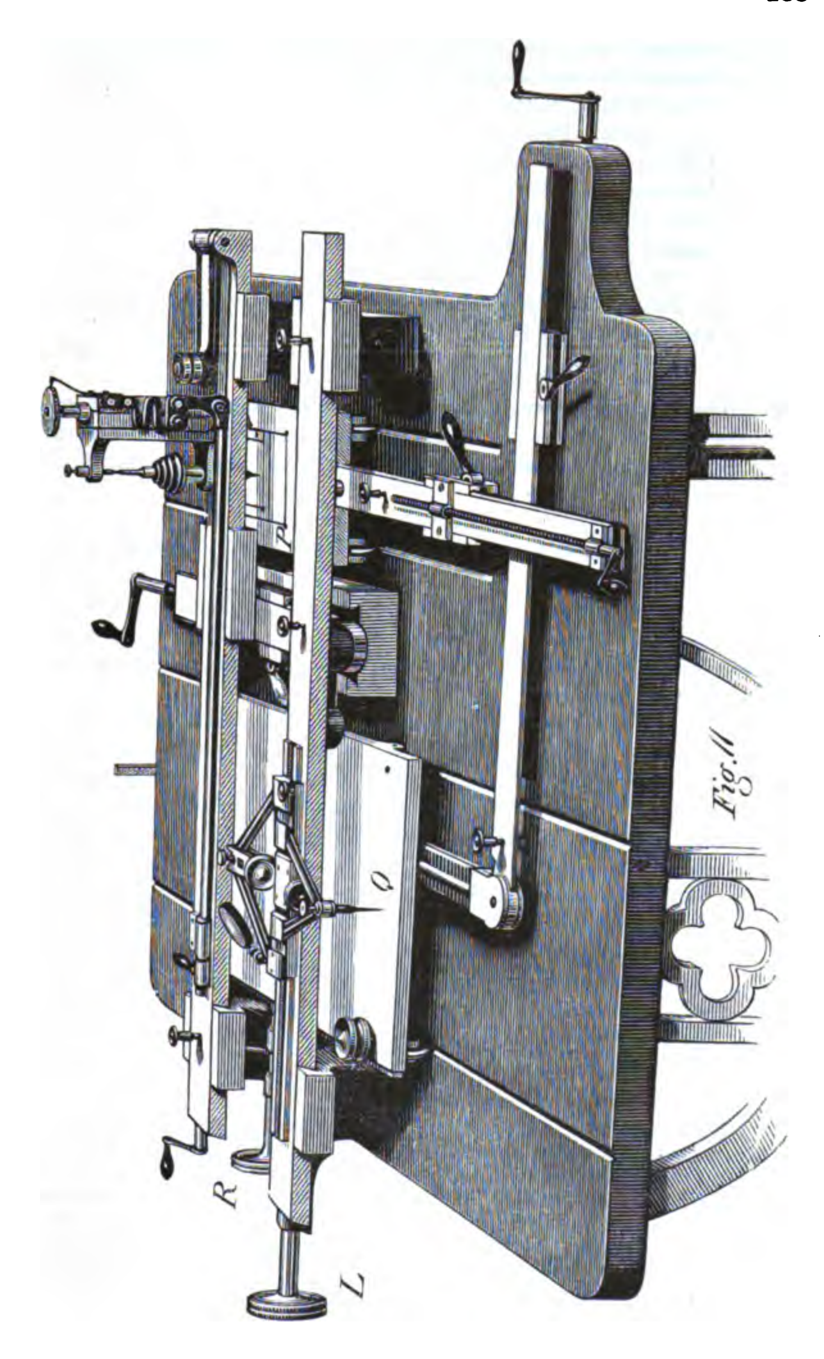


Fig. 11

richtung der Zeichenblätter P, Q senkrechten Richtung herbeizuführen, hat man das oben gegebene Princip auch auf die auf den Blättern P und Q operirenden Zeichenstiftsplatten P' und Q' in entsprechender Weise anzuwenden. Diese Platten P' Q' müssen natürlich eine zur Schienenrichtung der Platten P, Q senkrechte Führung haben, welche in ihrer Richtung durch die in Fig. 11 scizzirten Widerlager der Schraubenplatte bei L (d. i. Q') und ihrer parallelen fixirt und durch die mit der Rechten handzuhabende Schraubung am Kopfe L ausgeführt wird.

Wesentlich in den Details des Apparats ist, dass die Verjüngungen in beiden Richtungen unabhängig von einander und in weiten Grenzen verändert werden können.

(Kloiber.)

112 **Hauck-Brauer's Perspectivischer Apparat. Hauck's erstes Modell**, ausgestellt von Professor **G. Hauck**, techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg; **Brauer's Construction**, ausgestellt von Prof. **E. Brauer**, techn. Hochschule Karlsruhe.

1. Hauck's erstes Modell.*)

Der Apparat hat den Zweck, aus dem gegebenen Grundriss und Aufriss eines räumlichen Objectes dessen perspectivisches Bild auf mechanischem Wege zu ermitteln in der Art, dass, wenn man den Grundriss und Aufriss mit zwei Fahrstiften durchfährt, gleichzeitig der durch einen Mechanismus mit den Fahrstiften verknüpfte Zeichenstift das Bild selbständig beschreibt.

Der Mechanismus gründet sich auf eine *geometrische Construction*, welche aus Fig. 1 ersichtlich ist. In derselben bedeuten O_1, O_2, O_3 drei zugeordnete Punkte des Grundrisses, des Aufrisses und des perspectivischen Bildes. P stellt die Grundrissprojection des Auges, g die Grundrisspur der Bildebene (*Grundschnitt*), $P\gamma$ ($\perp$ g) die Projection des Hauptstrahls vor. Es ist dann $P\gamma$ samt g um den Punkt P gedreht worden, bis $P\gamma$ in verticale Lage $P\gamma'$, g in horizontale Lage g' gelangt ist; der Drehungswinkel α ist gleich dem Winkel, den die Bildebene mit der Aufrissebene macht. Weiter stellt sowohl in der Aufrissfigur als in der Bildfigur l die Schnittlinie zwischen Aufrissebene und Bildebene (*Lotschnitt*) vor; K ist die Aufrissprojection des Auges, F der Fluchtpunkt der zur Aufrissebene senkrechten Linien; die durch K und F gehenden beiderseitigen Horizontlinien werden von l in λ_2 und λ_3 geschnitten. —

*) Die erste Publication des Modells, welches die Priorität vor allen einem ähnlichen Zweck dienenden Apparaten für sich beansprucht, erfolgte in der Sitzung der Physikal. Gesellschaft in Berlin am 4. Mai 1883. (Vergl. Verhandlungen der Physikal. Gesellschaft in Berlin 1883, Nr. 8, Sitzung vom 4. Mai, ausgegeben am 16. Mai.) Die eingehende Beschreibung des Apparates findet sich in der Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin zur Feier der Einweihung ihres neuen Gebäudes am 2. Nov. 1884, S. 213 (in fast allen öffentlichen Bibliotheken vorhanden).

Um nun zu zwei zugeordneten Punkten O_1, O_2 den zugeordneten Bildpunkt O_3 zu finden, zieht man PO_1, dreht diesen Strahl um P um den

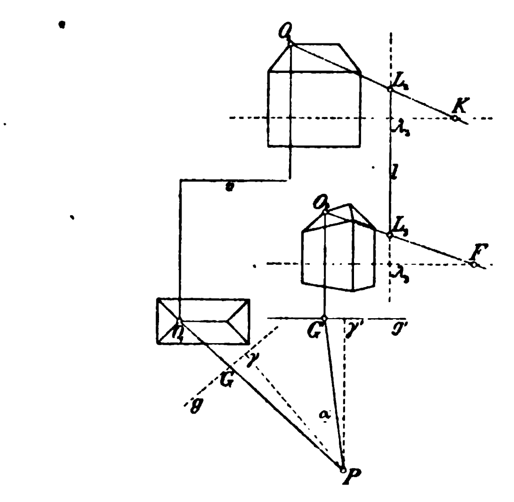


Fig. 1.

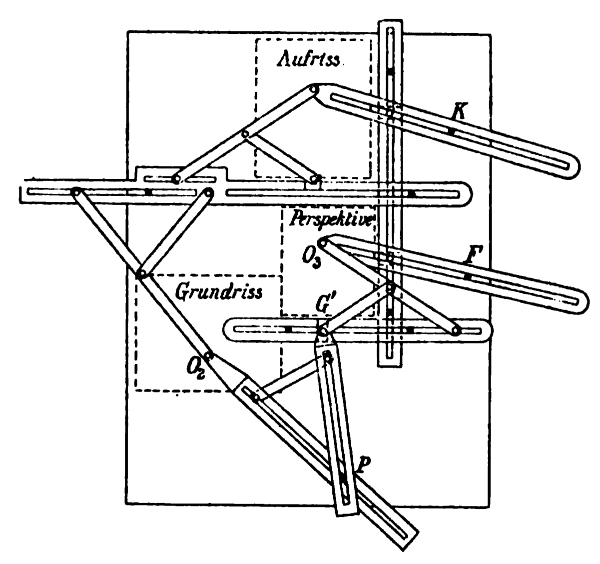


Fig. 2.

Winkel α, markirt den Schnittpunkt G' des gedrehten Strahls mit dem gedrehten Grundschnitt g' und zieht durch G' eine Verticale. Ferner

zieht man KO_2, welche den Lotschnitt l in L_2 schneidet, macht auf dem Lotschnitt $L_2 L_3 = \lambda_2 \lambda_3$ und zieht FL_3: dann schneidet FL_3 die Verticale durch G' in dem gesuchten Bildpunkt O_3.*)

Diese geometrische Construction ist nun in einem Mechanismus übertragen, indem die einzelnen Constructionslinien durch geschlitzte Holzlineale verkörpert sind, welche durch in die Schlitze eingreifende Stifte geführt werden, entweder um einen Stift sich drehend, oder in zwei Stiften schlittenartig gleitend. Die Art der Übertragung wird durch Vergleichung der Fig. 2**) mit Fig. 1 verdeutlicht. — Der Gesamtmechanismus gliedert sich in 3 Teile:

1. Der *Aufrissmechanismus* besteht zunächst aus der *Lotschnittschiene:* In zwei Punkten des Lotschnittes l sind Stifte ins Reissbrett eingesetzt (in Fig. 2 durch schwarze Punkte markirt), in welche der Schlitz eines Lineals eingelegt ist, so dass es längs des Lotschnittes schlittenartig gleitet Die Lotschnittschiene trägt in den Punkten L_2 und L_3, deren Abstand $= \lambda_2 \lambda_3$ ist, Stifte; desgleichen sind in den Punkten K und F Stifte ins Reissbrett eingesetzt. Endlich sind einerseits in die Stifte K und L_2, andererseits in die Stifte F und L_3 geschlitzte Lineale eingelegt, welche an ihren Enden den Aufrissfahrstift O_2 und den Bildzeichenstift O_3 tragen.

2. Der *Grundrissmechanismus* besteht zunächst aus der längs des Grundschnittes g' gleitenden *Grundschnittschiene*, welche einen Stift G' trägt. Ferner ist im Punkt P ein Stift ins Reissbrett eingesetzt, um den sich der Scheitel des (verstellbaren) Winkelhakens α dreht; die Schenkel desselben sind in sich verschiebbar; der eine trägt an seinem Ende den Grundrissfahrstift O_1, der andere greift in den Stift G' ein. Endlich wird der Zeichenstift O_3 vermittelst eines um G' sich drehenden und in g' gleitenden Evans'schen Lenkers gezwungen, sich senkrecht über G' zu bewegen.

3. Der *Verbindungsmechanismus.* Soll die Bildfigur nur punktweise bestimmt werden, so reicht man mit dem combinirten Grundriss- und Aufrissmechanismus aus. Sollen aber die Linien continuirlich gezeichnet werden, so müssen die zwei Fahrstifte O_1 und O_2 noch durch einen Mechanismus verbunden werden, der bewirkt, dass sie immer nur zugeordnete Punkte markiren können, das heisst: dass die durch O_1 und O_2 gezogenen Verticalen einen constanten Abstand v haben. Demgemäss besteht der Verbindungsmechanismus aus einer horizontalen Gleitschiene (*Verbindungsschiene*), welche zwei Stifte im Abstand v trägt, und aus

*) Die Begründung dieser Construction findet sich im Journal für Mathematik, Bd. 95 (1883), S. 1: „Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie", von G. Hauck.

**) In Fig. 2 ist der Buchstabe O_2 zu ändern in O_1. Ferner mögen in Fig. 2 die Buchstaben O_2, l, L_2, L_3, g' entsprechend der Fig. 1 nachgetragen werden.

zwei sich um diese drehenden Evans'schen Lenkern, durch welche die Fahrstifte gezwungen werden, sich senkrecht über, bezw. unter den zwei Stiften zu bewegen.

2. Brauer's Construction.*)

Die den Brauer'schen Apparat auszeichnende Leichtigkeit und Genauigkeit des Ganges ist dadurch erreicht, dass in der ganz in Metall ausgeführten Construction jede gleitende Reibung vermieden und ausschliesslich Rollenführung verwendet ist. Die hiedurch bewirkte bedeutende Verminderung der Widerstände ermöglichte vor allem eine zweckmässige Änderung in der gegenseitigen Lage der drei Projectionen in der Art, dass der Grundriss senkrecht unter den Aufriss gerückt und also alle drei Projectionen in eine Reihe am Rande des Brettes angeordnet werden konnten, was für die praktische Handhabung des Apparates sehr viel bequemer ist. — Denkt man sich aber in Fig. 1 den Grundriss samt Punkt P nach rechts verschoben in eine Lage senkrecht unter den Aufriss, so geht dabei die Lage des Punktes G' senkrecht unter O_3 verloren. Während also vorher $O_1 O_2$ gebrochen, $G' O_3$ gerade war, wird jetzt $O_1 O_2$ gerade, $G' O_3$ gebrochen. Wird dann noch die Lage von Bildfigur und Aufrissfigur vertauscht, was ohne weiteres geschehen kann, so entsteht die Anordnung Brauer's, wie sie in Fig. 3 skizzirt ist. (Bei den in Hauck's Modell verwendeten mechanischen Mitteln war diese Anordnung nicht möglich, da hier die Gleitführung Bewegungsübertragungen auf grössere Entfernungen nicht zuliess, und demgemäss die Bildfigur in die Mitte gelegt werden musste, damit der Zeichenstift von beiden Seiten auf kürzestem Wege durch die Fahrstifte zu beeinflussen.) – Es sei noch bemerkt, dass in Fig. 3 die Aufrissebene durch den Fusspunkt L_1 des Hauptstrahls (in Fig. 1 mit γ bezeichnet) gelegt ist.

Die Übertragung der Fig. 3 in einen Mechanismus ist nun in Brauer's Apparat folgendermassen ausgeführt (vergl. Fig. 4):

Zunächst sind im *Grundrissmechanismus* und *Verbindungsmechanismus* die Hauck'schen Gleitschienen mit Evans-Lenkern durch *Wagen* ersetzt, welche mittelst keilförmig profilirter Räderpaare in Keilnuten geführt und ausserdem durch glatte Tragrollen gestützt werden; durch den ⌈-förmig construirten *Verbindungswagen* wird die in dem einen Schenkel verkörperte Linie $O_1 O_2$ parallel geführt, durch den _⌈-förmig gebildeten *Perspectivwagen* — die gebrochene Linie $G'HIO_3$. — Die *Lotschnittschiene* ist als Schiene mit Nute (auf der Unterseite) construirt, welche durch zwei Rollstühle R, R (s. Fig. 4) geführt wird und mit den Stangen KO_2 und FO_3 durch Zapfengelenke L_2, L_3 verbunden ist.

---

*) Beschrieben in der „Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure", Bd. XXXV (1891), Nr. 28, S. 782. (Diesem Aufsatze sind die Figuren 2 bis 6 entnommen.) — Der Apparat wird von Mechaniker Fraiser in Darmstadt angefertigt.

Die constructive Ausführung der Leitung der einzelnen Stangen durch feste oder bewegliche Punkte (Leitung der Stangen KO_2 und FO_3 durch die auf dem Brett festen Punkte K und F, ferner der Stange PG' durch den auf dem Perspectivwagen festen Punkt G') ist aus Fig. 5 ersichtlich: Auf einem feststehenden verticalen Säulchen ist ein um die Säulenaxe

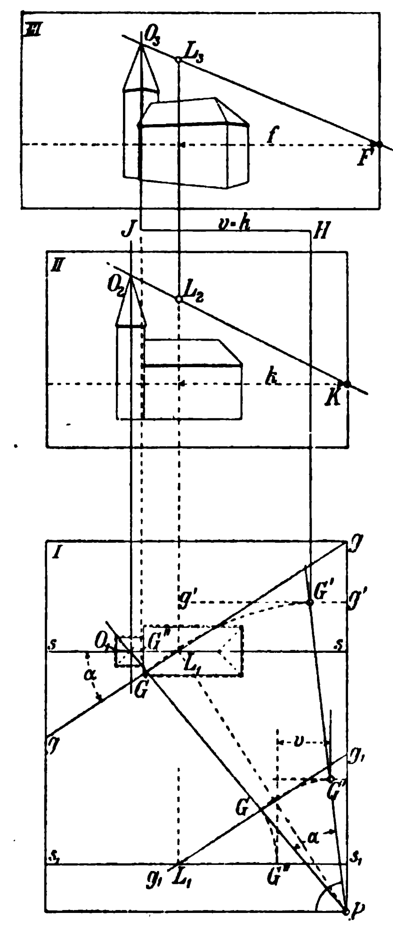


Fig. 3.

drehbarer kleiner Wagen (eine sogen. *Katze*) mit zwei Keilrädern angebracht, welche in einer auf der Unterseite der ⊓-profiligen Stange eingeschnittenen Keilnute laufen. — In den Punkten O_1, O_2, O_3, die durch den Schnitt zweier beweglicher Stangen bestimmt werden, sind zwei Katzen drehbar vereinigt, wie dies Fig. 6 verdeutlicht. Für den Punkt O_1

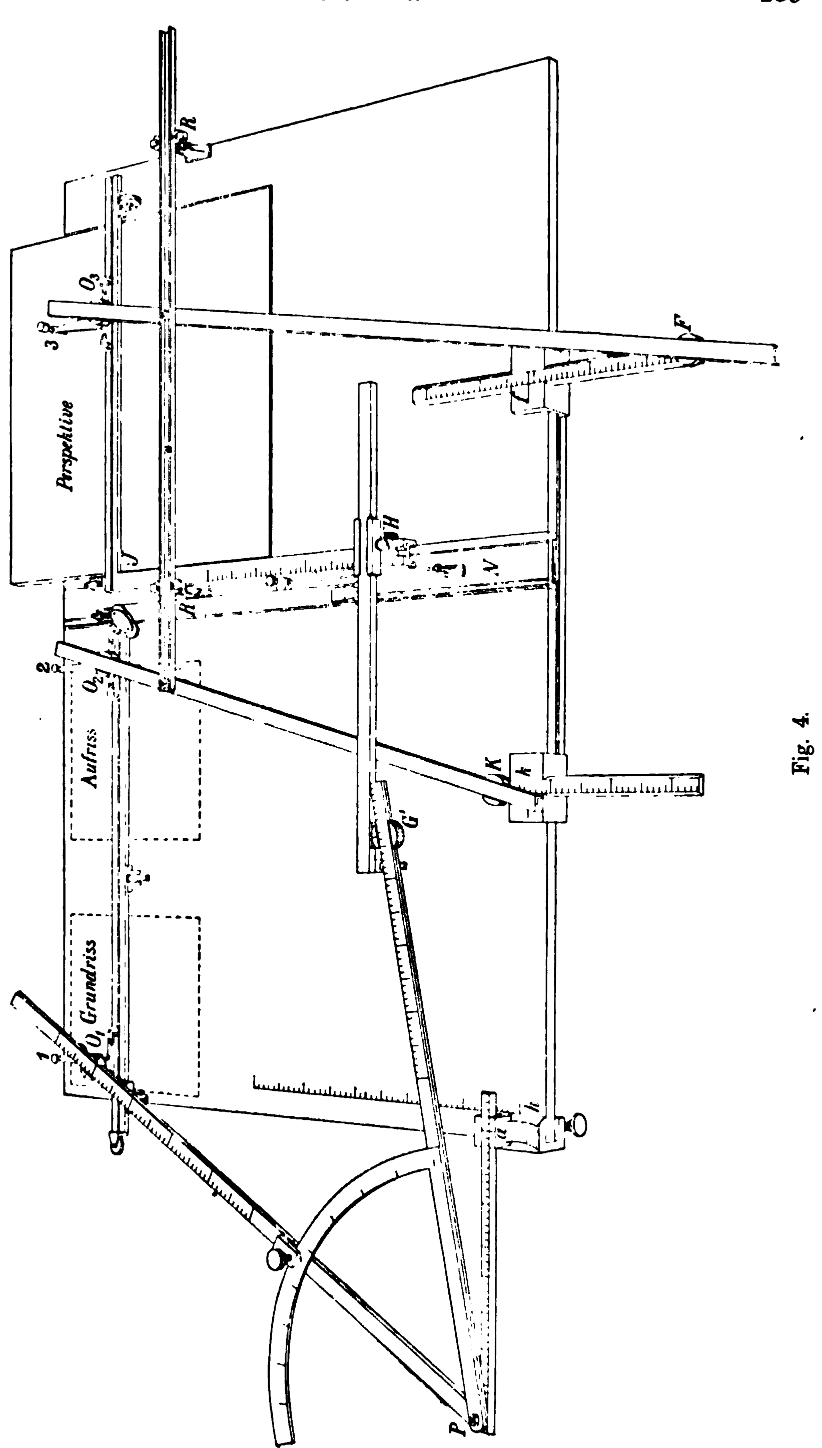


Fig. 4.

z. B. läuft die untere Katze in der Nute des Verbindungswagens, die obere in der auf der Unterseite der Stange PO_1 eingeschnittenen Nute. — Fig. 6 zeigt zugleich den Fahrstift, bezw. Zeichenstift, welcher mittelst einer Zunge an der unteren Katze excentrisch angebracht ist und, da die

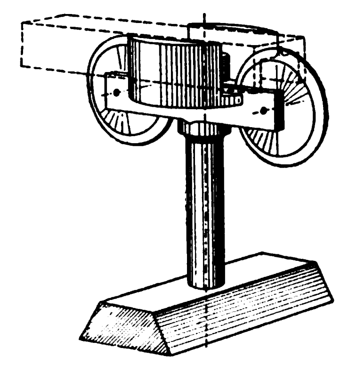


Fig. 5.

Katze parallel geführt wird, eine mit der Katzenaxe congruente Bahn beschreibt. — Statt einer Vorrichtung für das Heben und Senken des Zeichenstiftes ist das aus dem Hauptbrett ausgeschnittene Perspectivbrett (s. Fig. 4) zum Senken und Heben mittelst Fusstrittes eingerichtet.

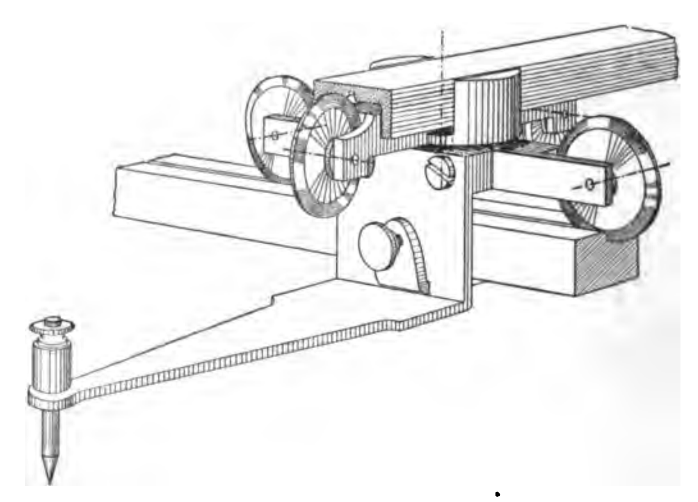


Fig. 6.

Dem Brauer'schen Apparat ist endlich noch eine sehr sinnreiche Vorrichtung zur Benützung des *Seitenrisses* beigegeben.

3. Das Arbeiten mit dem Apparat.

Beim Zeichnen mittelst des Apparates braucht in der Regel nur *ein* Fahrstift geführt zu werden, während der andere leer läuft. Nur in Ausnahmefällen, für welche andere Apparate die Anwendbarkeit gänzlich versagen, werden beide Fahrstifte gleichzeitig geführt. — Alle in natura horizontalen Linien werden in Perspective gesetzt, indem man die Katze, an welcher der Aufrissfahrstift befestigt ist, auf dem Verbindungswagen (mittelst des in Fig. 6 sichtbaren Klemmschräubchens) feststellt und die Linien im Grundriss mit dem Grundrissfahrstift durchfährt; ebenso alle zur Aufrissebene parallelen Linien — mittelst Führung des Aufrissfahrstiftes unter Feststellung der Grundrisskatze. (Bei Hauck's Modell wird der betreffende Evans-Lenker des Verbindungsmechanismus festgestellt.) Dabei werden alle geraden Linien in den drei Hauptrichtungen vom Apparat mit einer dem Lineal gleichkommenden Schärfe und Schnelligkeit gezeichnet, indem man im Verbindungsmechanismus von Grundrisskatze, Aufrisskatze, Verbindungswagen je zwei feststellt und die einzig übrigbleibende Bewegung ausführt. (Bei Hauck's Modell werden von den beiden Evans-Lenkern und der Gleitschiene je zwei festgestellt.) — Zum Zweck der scharfen Zeichnung von *Kreis*-Perspectiven ist dem Brauer'schen Apparat ein kleiner Stangenzirkel zur sicheren Führung des Fahrstiftes im Grundriss, Aufriss oder Seitenriss beigegeben. — Schiefe Gerade und Raumcurven können punktweise bestimmt werden. Sollen aber Raumcurven zu einem besonderen Zwecke in continuirlichem Zuge vom Apparate gezeichnet werden, so werden beide Fahrstifte gleichzeitig geführt. Dies geschieht am besten durch zwei Personen, von denen die eine die Führung übernimmt, durch welche der andere Fahrstift vermöge des Verbindungsmechanismus mit beeinflusst wird, so dass die andere Person, diesem Einfluss nachgebend, nur darauf zu achten hat, dass ihr Fahrstift nicht rechts oder links von seiner vorgeschriebenen Bahn abweicht.

Als *Proben für die Leistungsfähigkeit* des Apparates in Brauer's Construction mögen die Figuren 4, 5 und 6 dienen, welche (im doppelten Masstab) mittelst des Apparates selbst hergestellt worden sind.

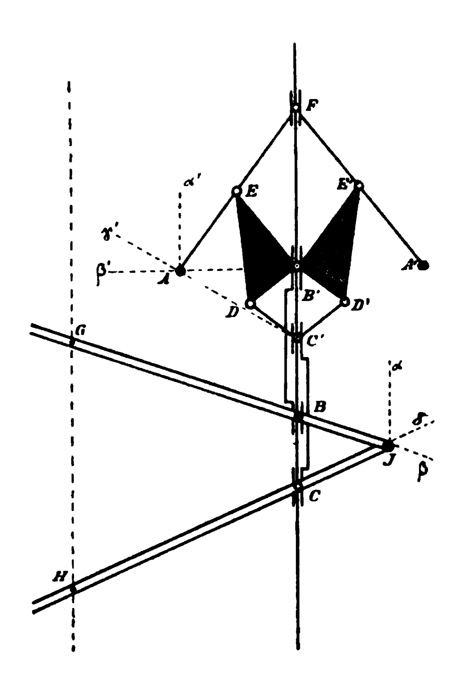
(Hauck.)

113 **Perspectograph** von **E. Ritter**, Architekt in Frankfurt a/M., ausgeführt von **Hartmann & Braun**, Bockenheim-Frankfurt.

Der Apparat besteht aus 2 Teilen: einem Führungsteil und einem sogenannten Froschschenkel. Ersterer setzt sich aus 2 Gleitlinealen GJ und HJ zusammen, die in J gelenkig mit einander verbunden sind. Beide Lineale gleiten auf den Führungsstiften G und H, die am Zeichenbrett befestigt sind. Zu GH parallel ist eine Schiene BC, welche zwei Schlitten trägt, an denen die Stifte B und C angebracht sind, die ausserdem von den beiden Gleitlinealen GJ und HJ geführt werden. Mit letztgenannten

Stiften sind die Drehpunkte B' und C' des Froschschenkelsystems verbunden, das mit denselben auf der Schiene BC gleitet. Das Froschschenkelsystem setzt sich aus zwei beweglichen Rhomben B'DC'D' und B'EFE' zusammen, die durch starre rechte Winkel EB'D und E'B'D, verbunden sind. Es bestehen noch die Beziehungen FE = EA, FE' = E'A'. Nun gilt der Satz:

Beschreibt J *eine Figur in der Zeichenebene, so beschreibt* A *eine dazu collineare und* A' *die zu der letzteren symmetrische in Bezug auf die Schiene* BC.



Dies lässt sich leicht einsehen, wenn man den Satz voraussetzt, dass 2 Ebenen dann sicher collinear auf einander bezogen sind, wenn dreien Strahlenbüscheln der einen drei Strahlenbüschel der andern entsprechen, und sich die einfachsten Bewegungen des Froschschenkelsystems vorstellt. Diese sind: a) Behalten B' und C' ihren Abstand bei, so ist das System starr und kann auf der Schiene BC gleiten, wobei A eine Parallele Aα' zu der letzteren beschreibt. b) Hält man den Punkt B' des Systems fest und verändert man C' auf der Schiene, so beschreibt A eine zur Schiene senkrechte Gerade Aβ'. c) Hält man C' fest und wird B' auf der Schiene bewegt, so beschreibt A eine durch C' gehende Gerade Aγ'.

Wird daher J in der Richtung $J\alpha$, d. h. parallel zur Schiene BC bewegt, so bleibt die Distanz BC und da B mit B' und C mit C' starr verbunden sind, auch die Distanz B'C' unverändert; es tritt dann der Fall a) ein und der Punkt A beschreibt eine Parallele $A\alpha'$ zur Schiene BC. *Daher entspricht dem Büschel von Parallelen zu* BC *wieder ein solches Büschel.*

Bewegt sich ferner J in der Richtung JG = $J\beta$, so bleibt B und mithin B' fest; der Punkt A des Froschschenkels beschreibt daher nach b) eine zu BC senkrechte Gerade. Da dies für alle Bewegungen des Punktes J gegen G hin gilt, *so entspricht dem Büschel durch* G, *welches* J *beschreibt, das Büschel von Senkrechten zu* BC, *welches* A *beschreibt.*

Verschiebt sich endlich J in der Richtung auf den Fixpunkt H zu, also in der Richtung $J\gamma$, so bleibt C und mithin der Punkt C' des Froschschenkelsystems fest und es tritt der Fall c) ein, wonach A eine Gerade durch C' beschreibt, deren Neigungswinkel gegen BC von dem Verhältnis der beiden Rhomben des Froschschenkelsystems abhängig ist. *Beschreibt also* J *ein Büschel durch* H, *so beschreibt* A *ein gegen* BC *geneigtes Parallelenbüschel.*

Damit ist bewiesen, dass die Zuordnung der Punkte J und A eine collineare ist.

Einstellung und Gebrauch des Apparates können aus einem vom Erfinder herrührenden Prospect entnommen werden, auf den hier verwiesen wird.

(S. Finsterwalder.)

114 **Perspectograph** von Ingenieur **Pietro Fiorini** in Turin.

J. Modelle für den Elementar-Unterricht in Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und Darstellender Geometrie.

115 **Modelle für den Unterricht in der Planimetrie**, nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).

Die Modelle sind teils aus Metall, teils aus Pappe oder Holz. Bezüglich der näheren Beschreibung sowie der Verkaufspreise vergleiche man den illustrirten Katalog der genannten Lehrmittelanstalt.

Modelle zur Veranschaulichung: elementarer Linienformen, — der Sätze über ebene Winkel, — von Drei-, Vier- und Vielecken, — der

Winkelsätze im Dreieck, — der Congruenzsätze von Drei- und Vielecken, — der Ähnlichkeitssätze, — der Sätze über den Flächeninhalt, — der elementaren Sätze über den Kreis.

116 **Modelle für den Unterricht in der Stereometrie,** nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).

Die Modelle sind teils aus Metall, teils aus Pappe oder Holz hergestellt und umfassen:

Modelle zur Darstellung: von Rotationskörpern, — der Fundamentalsätze über die gerade Linie und Ebene im Raume, — der Lehre von den körperlichen Ecken.

Zwölf Zusammenstellungen der einfachsten geometrischen Körper, als: Pyramide, Parallelepiped, Prisma, Prismatoid, reguläre Körper, Kegel, Cylinder, Kugel, Rotationsellipsoid. (Näheres *Specialkatalog.*)

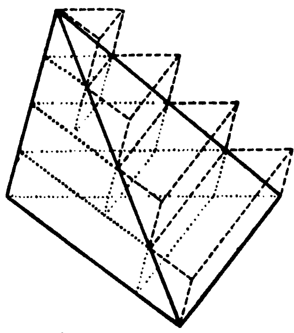
117 **Tafeln für den Unterricht in der Stereometrie,** zum Gebrauche an Mittelschulen, herausgegeben von **A. Zahn**, (1892.) Verlagsbuchhandlung von **C. Brügel & Sohn** in Ansbach.

37 Tafeln, 55 cm auf 80 cm. Verkaufspreis 22 *M.*

1. Die gegenseitige Lage von Punkt, Gerade und Ebene im Raum; das Dreikant.
2. Euler'sche Polyeder, Prisma, Pyramide, Prismatoide.
3. Cylinder, Kegel, Kugel.

118 **Modell zur Darstellung des Tetraederinhalts** von Prof. **M. J. M. Hill,** University College, London.

Das Modell veranschaulicht die Bestimmung des Volumens eines Tetra-



eders als Grenzwert der Volumina einer Reihe von Prismen, deren Basen parallel zur Grundfläche des Tetraeders liegen.

119 **Modelle für den Unterricht in der sphärischen Trigonometrie,** ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim, (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog.*)

120 **Vorlegehefte für den Unterricht im Linearzeichnen**, von Prof. **E. Fischer**, techn. Hochschule München. 3 Hefte. Verlag von **Th. Ackermann**, München.

Die Hefte enthalten (neben technischen Vorwürfen) insbesondere Darstellungen aus der elementaren Geometrie, der Stereometrie und der Theorie der Kegelschnitte. Preis eines Heftes 10 Mark.

121 **Stereoskopische Zeichnungen für den Unterricht in der Stereometrie, Trigonometrie und darstellenden Geometrie**, von **J. Schlotke** in Hamburg. Ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule München**.

122 **Sammlung von Modellen zur Stereometrie und darstellenden Geometrie (Projectionslehre, Licht und Schattenconstruction)**, aus dem **Polytechnischen Arbeitsinstitut J. Schröder**, Darmstadt.

Bezüglich der einzelnen Modelle vergl. man den *illustrirten Katalog*, sowie das *Preisverzeichnis* der Firma.

123 **Modelle für den Unterricht in der darstellenden Geometrie** von **O. Böklen**, nach dessen „Vorlagewerk für constructives Zeichnen" (Stuttgart, Nitzschke), ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog.*)

124 **Apparat und Modelle für die darstellende Geometrie**, nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog.*)

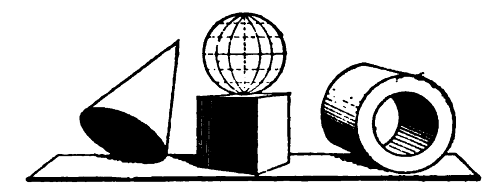
125 **Apparat zur Einführung in das perspectivische Zeichnen**, nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** Bensheim (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog.*)

126 **Acht Modelle für die darstellende Geometrie**, nach Angabe von **Möser**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** Bensheim (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog.*)

127 **Reliefperspectivische Darstellung eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcylinders**, auf einem Untersatz vereinigt. Ausgeführt im **math. Inst. der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**), von stud. math. **Thoma**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.



Näheres vergl. *Specialkatalog 155* (pag. *17* und *86.*)

128 **Photographische Darstellungen der Sammlung von Gipsmodellen für den mathematischen Unterricht** von **L. J. Bardin und Ch. Muret**, ausgestellt von der Verlagshandlung von **Ch. Delagrave**, Paris.

Bezüglich des Inhaltes der Sammlung, sowie der Preise der einzelnen Objecte wird auf die *Kataloge* der Verlagshandlung verwiesen. Eine Anzahl wissenschaftlicher Werke, die sich auf den geometrischen Unterricht beziehen, ist beigegeben.

K. Polyeder, Polygon- und Polyederteilung von Flächen und Räumen.

129 **Die regulären (Platonischen) Körper.**

130 **Die semiregulären (Archimedischen) Körper.**

131 **Die regulären (Poinsot'schen) Sternpolyeder.**

Nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der Lehrmittelanstalt **J. Ehrhard & C.** in Bensheim (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog*.)

132 **Die regelmässigen Polyeder**, von **H. Wiener**, Halle a. S.

a) Hergestellt aus Papierstreifen.

b) Hergestellt aus Drähten mit eingespannten Fäden. (Die eingeschriebenen 5 Würfel eines Dodekaeders, die eingeschriebenen höheren regelmässigen Polyeder).

Die Modelle sollen, für die Zwecke des Unterrichts, die Herstellung mit den möglichst einfachen Mitteln illustriren.

133—135 **Serie von Modellen von gleicheckigen, gleichflächigen und zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyedern erster und höherer Art.** Von Prof. **E. Hess**, Univ. Marburg.

Vergl. folgende hierauf bezügliche Schriften des Verfassers:

Über die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Kassel. Th. Kay. 1876.

Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. Leipzig. B. G. Teubner 1883. Insbesondere viertes und siebentes Kapitel.

Eine Reihe von Abhandlungen und Mitteilungen in den Sitzungsberichten der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg. 1872—1882.

Wegen der Bedeutung und Anwendung dieser Untersuchungen für die Theorie der räumlichen Configurationen vergl.:

J. de Vries Sitzungsber. der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Bd. C, Abt. II, Juli 1891.

E. Hess. „*Über gewisse räumliche Configurationen*". Sitzungsber. d. Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturw. zu Marburg. Mai 1892.

133 **A) Convexe Polyeder mit continuirlicher Oberfläche.**

Ausser mehreren gleicheckigen und gleichflächigen Polyedern erster Art sind von solchen Polyedern höherer Art in Papp- und Faden-Modellen dargestellt:

a) Aus der *Oktaeder-Hexaeder*-Gruppe

1) das $[6(4)_1 + 8(6)_2]$-flächige 6.4-Eck 5ter Art und

1') das ihm polar-reciproke $[6(4)_1 + 8(6)_2]$ eckige 6.4 Flach 5ter Art,

2) das $[8(3)_1 + 6(8)_3]$-flächige 8.3-Eck 7ter Art und

2') das ihm polar-reciproke $[8(3)_1 + 6(8)_3]$-eckige 8-3-Flach 7ter Art, jedes derselben in einer Anzahl von Varietäten.

Bei den gleicheckigen Polyedern sind die beiden componirenden Polyeder: Oktaeder und Hexaeder durch verschiedene Färbung gekennzeichnet; die einzelnen Zellen der gleicheckigen Sechsecke 2ter Art bei 1) und der gleicheckigen Achtecke 3ter Art bei 2) sind entweder durch verschiedene Färbung oder auch durch Fortnahme der mittleren Flächenteile kenntlich gemacht. Von besonderem Interesse sind diejenigen Varietäten, bei welchen Flächenteile von entgegengesetzten Vorzeichen auftreten (meist durch schwarze und weisse Färbung unterschieden), ohne dass sie deshalb aufhörten, zweiseitige Polyeder zu sein, welche das sog. *Möbius*sche Gesetz der Kanten befolgen.

b) Aus der *Ikosaeder-Pentagondodekaeder*-Gruppe ist als Beispiel eines *gleicheckigen* Polyeders höherer Art

1) das $[20(3)_1 + 12(10)_4]$ flächige $60(3)_1$-Eck der 19ten Art und zwar diejenige spezielle Varietät, bei welcher je drei Ecken einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben; als Beispiel eines *gleichflächigen* Polyeders höherer Art

2) das $[12(5)_1 + 20(3 + 3)_1]$ eckige $20(6 + 3)_4$-Flach der 11ten Art (vergl. die beiliegende Zeichnung einer Grenzfläche, deren zwei parallele an dem Polyeder durch Färbung kenntlich gemacht sind) dargestellt.

Die zahlreichen dieser Gruppe angehörigen gleicheckigen, gleichflächigen und zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder (zu welch letzteren auch die bekannten 4 *Kepler-Poinsot*'schen regelmässigen Sternpolyeder gehören) können ebenso, wie auch zahlreiche zu B) und C) gehörige Polyeder aus den

Fadenmodellen 3) des *Ikosaeders,* 4) des *Pentagondodekaeders,* 5) des (12 + 20)*flächigen* 30-*Ecks* (Triakontagons) entnommen werden.

Von zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyedern höherer Art dieser Gruppe sind drei (vergl. Kugelteilung S. 469—471, I—III) in besonderen Modellen dargestellt, nämlich

6) das $20(3 + 2.3)_2$flächige $60\,(3)_1$-Eck der 5ten Art,

7) das $20(3 + 2.3)_4$flächige $60\,(3)_1$-Eck der 25ten Art,

8) das $30(4 + 4 + 4)_3$flächige $2.60\,(3)_1$-Eck der 15ten Art,

bei welchen je zwei parallele Grenzflächen durch Färbung kenntlich gemacht sind; auch liegt jedem dieser Polyeder eine Zeichnung der Grenzfläche bei. Die drei diesen, sowie dem 4ten Polyeder (IV) polar-reciprok entsprechenden Polyeder können aus den Fadenmodellen 4) und 5) entnommen werden.

c) Aus der Gruppe der Polyeder mit *einer Hauptaxe* sind gleichfalls mehrere gleicheckige und gleichflächige Polyeder erster und höherer Art durch Modelle dargestellt.

d) Einige Modelle von *sphärischen* Figuren und Netzen, welche bei diesen und den nachfolgenden Polyedern in Betracht kommen.

134 B) Convexe Polyeder mit discontinuirlicher Oberfläche.

Von concentrisch regelmässigen Anordnungen regelmässiger Polyeder sind in Modellen (die einzelnen Polyeder eines Systems sind durch verschiedene Färbung gekennzeichnet) dargestellt:

1) Ein System zweier sich regelmässig kreuzender regulärer Tetraeder (Kepler's stella octangula),

2) Ein System von 5 concentrischen regulären Tetraedern,

3) Ein System von 10 concentrischen regulären Tetraedern mit zu je zwei zusammenfallenden Ecken und Flächen.

Bei 2) und 3) ist der innere Kern ein reguläres Ikosaeder, die äussere Hülle ein reguläres Pentagondodekaeder. [Vgl. das Fadenmodell A b) 4).]

4) Ein System von 5 concentrischen regulären Hexaedern; der innere Kern ist ein Rhombentriakontaeder, die äussere Hülle ein reguläres Pentagondodekaeder. [Vgl. Fadenmodell A b) 4).]

5) Ein dem System 4) polar-reciprokes System von 5 concentrischen regulären Oktaedern; der innere Kern ist ein reguläres Ikosaeder, die äussere Hülle ein gleicheckiges (12 + 20)flächiges 30-Eck (Triakontagon). [Vgl. das Fadenmodell A b) 5).]

Ferner sind in Modellen dargestellt:

6) α) β) Zwei Systeme von zwei sich kreuzenden rhombischen Sphenoiden,

7) Ein System von 6 concentrischen (2 + 2 + 2)flächigen 2.4-Ecken; der innere Kern ist ein Hexaeder, die äussere Hülle ein (6 + 8 + 12)-flächiges 2.24-Eck,

8) Ein System zweier concentrischer Hexaeder, deren innerer Kern ein (2 + 8)eckiges 2.8-Flach (eine Doppelpyramide) ist,

9) Ein System dreier concentrischer Hexaeder; der innere Kern ist eine Combination eines Hexaeders mit einem Rhombendodekaeder, die äussere Hülle ein gleicheckiges (6 + 8)flächiges 6.4-Eck,

10) Ein System dreier concentrischer Octaeder, dem System 9) polar-reciprok entsprechend; der innere Kern ist ein gleichflächiges (6 + 8)-

eckiges 6.4-Flach, die äussere Hülle hat zu Eckpunkten die Eckpunkte eines Oktaeders und eines concentrischen Cubooktaeders.

135 **C) Nicht convexe Polyeder.**

Vgl. hierzu die beiden Abhandlungen des Verf.:

„*Über einige merkwürdige nicht convexe Polyeder*" (Marburger Berichte Januar 1877) und: „*Über einige Polyeder mit einseitiger Oberfläche*" (Marb. Ber. Januar 1879).

a) *Nicht convexe Polyeder mit zweiseitiger Oberfläche.*

1) Ein (8.3)eckiges 24-Flach der 18ten Art, begrenzt von 24 Fünfecken der zweiten Art mit 24 5flächigen Ecken mit je einem einspringenden Flächenwinkel. Der innere Kern ist ein archimedeisches (6 + 8 + 12)-eckiges 24-Flach 1ter Art, die äussere Hülle ein archimedeisches (6 + 8)-flächiges 8.3 Eck erster Art. Dies, sowie das ihm polar-reciprok entsprechende nicht convexe Polyeder 1') können aus den beiden *Fadenmodellen*

2) des archimedeischen (6 + 8) flächigen 8.3-Ecks und

3) des archimedeischen (6 + 8 + 12) flächigen 24-Ecks — entnommen werden. Die Grenzflächen der beiden nicht convexen Polyeder 1) und 1') sind auf besonderen Zeichnungen dargestellt.

b) *Nicht convexe Polyeder mit zweiseitiger Oberfläche, deren Oberfläche und cubischer Inhalt Null ist.*

1) und 2) Zwei Modelle von sog. *Stephanoiden.* Die Flächenteile von entgegengesetztem Zeichen sind durch schwarze und weisse Färbung unterschieden.

c) *Nicht convexe Polyeder mit einseitiger Oberfläche* (*Möbius*'sche Polyeder).

1) Ein Möbius'sches Polyeder, dessen Flächen durch die 6 Flächen eines Hexaeders und die vier auf den dreizähligen Axen senkrecht stehenden, sich im Mittelpunkt schneidenden Ebenen gebildet werden. Die 12 Ecken entsprechen den Eckpunkten eines Cubooktaeders.

2) Ein Möbius'sches Polyeder, welches durch die Erweiterung der Flächen eines Trigondodekaeders entsteht; die Eckpunkte sind eine Combination der Eckpunkte eines regulären Oktaeders und eines concentrischen regulären Tetraeders.

2') Das diesem polar-reciprok entsprechende Polyeder. (Vgl. die zweite der oben angeführten Abhandlungen, sowie Dr. *C. Reinhardt.* „*Zur Möbius'schen Polyedertheorie*". Ber. der kgl. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaft. März 1885.)

Ferner:

3) Ein Modell des bekannten *Möbius*'schen Trigondekaeders (*Möbius*, Ges. Werke Bd. II S. 482).

und 4) α) β) Zwei Modelle des diesem reciproken Polyeders, begrenzt von 6 Fünfecken mit 10 dreiflächigen Ecken.

NB. Die verschiedene Färbung (schwarz und weiss) der Flächenteile ist bei diesen Modellen nur zum Teil angegeben, da bekanntlich bei dem fortgesetzten Processe der Färbung schliesslich jeder Flächenteil beide Färbungen erhalten würde.

(E. Hess.)

136 **Einige Modelle von Tetraedern in desmischer Lage, von zwei einander gleichzeitig um- und eingeschriebenen Tetraedern und von zwei Tetraedern in neunfach hyperboloidischer Lage.** (Vgl. *F. Schur.* Math. Ann. XX. S. 276). Prof. **E. Hess**, Univ. Marburg.

137 **Drei räumliche Winkelspiegel (Polyederkaleidoskope) nebst zugehörigen Einlagen,** angefertigt von Optiker Dr. **Krüss** in Hamburg, nach Angabe von Prof. **E. Hess**, Univ. Marburg.

(Vgl. hierzu des Verf. Abhandlung: „*Ein Problem der Katoptrik*", Marb. Ber. 1879 S. 7—20; ebenda vom 15. Februar 1882; ferner: „*Über die Zahl und Lage der Bilder eines Punktes bei drei eine Ecke bildenden Planspiegeln*" (Marb. Ber. Januar 1888), „*Über Polyederkaleidoskope und deren Anwendung auf die Krystallographie*" (Neues Jahrb. f. Mineralogie. 1889. Bd. I S. 54—65) und: „*Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung*" § 57 S. 262.)

Wie in den aufgeführten Abhandlungen genauer auseinandergesetzt ist, haben folgende Systeme von je drei eine Ecke bildenden Planspiegeln, wenn A_i die Flächen —, α_i die ebenen Winkel der dreiflächigen Ecken bedeuten:

1) $A_1 = 90^\circ$, $A_2 = A_3 = 60^\circ$; $\alpha_1 = 180^\circ - 2\eta$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \eta$,

2) $A_1 = 45^\circ$, $A_2 = 60^\circ$, $A_3 = 90^\circ$; $\alpha_1 = 90^\circ - \eta$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_3 = \eta$,

3) $A_1 = 36^\circ$, $A_2 = 60^\circ$, $A_3 = 90^\circ$; $\alpha_1 = \psi$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = 90^\circ - \varphi - \psi$,

wobei $\operatorname{tg} \eta = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\operatorname{tg} \psi = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$ ist, die Eigenschaft, von einem im Innern der Ecke befindlichen Punkte $m - 1$ Bilder zu erzeugen, welche mit dem Punkte selbst den Eckpunkten des allgemeinsten gleicheckigen Polyeders

1) der Hexakistetraeder-Gruppe, $m = 24$,

2) der Hexakisoktaeder-Gruppe, $m = 48$,

3) der Diakishexekontaeder-Gruppe, $m = 120$

entsprechen.

Legt man senkrecht zu dem Radiusvector eines innerhalb der spiegelnden Ecke befindlichen Punktes eine Ebene und bestimmt die dreieckige Schnittfigur derselben mit den Seitenflächen der Ecke, so stellen die $m - 1$ Spiegelbilder eines solchen Dreiecks mit diesem zusammen die vollständige Oberfläche eines gleichflächigen Polyeders dar, wobei für besondere Lagen der Ebene sich zwei und mehrere Dreiecke zu einer Grenzfläche vereinigen können. Es lassen sich auf diese Weise alle den angegebenen

Gruppen zugehörigen gleichflächigen (und speciell regulären) Polyeder (erster und höherer Art) mit Hilfe dieser Spiegel zur Anschauung bringen, wenn ein passend ausgeschnittenes Dreieck in richtiger Lage in das Innere einer solchen Ecke gebracht wird.

Aber auch die zugehörigen *gleicheckigen* Polyeder, alle Combinationsgestalten, sowie überhaupt die Oberfläche jedes Körpers, welchem die betreffenden Symmetrieebenen, deren je drei nächst benachbarte die Seitenflächen einer spiegelnden Ecke bilden, zukommen, werden durch jene Spiegelapparate erzeugt, wenn man den durch die Ebenen der Ecke ausgeschnittenen Teil der Oberfläche eines solchen Körpers in der richtigen Lage in die Ecken hineinbringt.

Wenn man das einzulegende Dreieck oder den entsprechenden Teil der Oberfläche möglichst *offen* herstellt, so kann das Innere der ganzen zur Anschauung gebrachten Form, insbesondere die Lage und der Verlauf der sämtlichen Symmetrieebenen und der Symmetrieaxen, welche durch die Kanten der Ecken und deren Spiegelbilder dargestellt sind, sehr bequem überblickt und verfolgt werden.

Zu jedem der drei Polyederkaleidoskope ist eine Reihe von passenden Einlagen beigefügt.

(E. Hess.)

138 **Die den regulären Polyedern entsprechenden regulären Gebietseinteilungen auf der Kugel,** ausgeführt im **math. Institut der techn. Hochschule München,** (Prof. **Dyck**).

1. Tetraeder. Einteilung in Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

2. Oktaeder. " " " " " " $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.

3. Ikosaeder. " " " " " " $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$.

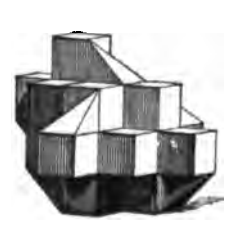
139 **Modelle zur Darstellung von regulären Gebietseinteilungen des Raumes.** Von Prof. **A. Schönflies** in Göttingen. Verlag **L. Brill,** Darmstadt.

Specialkatalog 211-222, (pag. *46* u. *89.*)

Die Modelle repräsentiren 12 Typen solcher Einteilungen in Fundamentalbereiche, von denen 10 zu grösseren Bereichen zusammengesetzt sind.







Das Nähere vergl. in der der Modellserie beigegebenen Abhandlung, sowie in des Urhebers Abhandlungen „Über Translationsgruppen" Math. Annalen Bd. 28, 29, 34 und in: Schönflies „Krystallsysteme u. Krystallstructur" Leipzig 1891.

140 **Modelle zu Gruppen von Raumtransformationen.** Mit Unterstützung der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin nach den Angaben von **A. Schoenflies** angefertigt von Universitäts-Mechaniker **F. Apel** zu Göttingen, ausgestellt von der **K. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.**

Die in Rede stehenden Gruppen betreffen solche Transformationen des Raumes in sich, bei denen die Abstände der einzelnen Punkte ungeändert bleiben. Für jede dieser Gruppen gibt es eine unendliche Reihe von Bewegungen; das Gesetz, nach welchem die zugehörigen Drehungsaxen und Schraubenaxen im Raume verteilt sind, sollen die Modelle veranschaulichen.

Die bezüglichen Gruppen (Raumgruppen) lassen sich isomorph auf solche Gruppen von Raumtransformationen beziehen, die sämtlich einen Punkt fest lassen (Punktgruppen), d. h. auf diejenigen, die von Herrn Klein cyklische Gruppen, Diedergruppen, Tetraedergruppen, Oktaedergruppen und Ikosaeder-

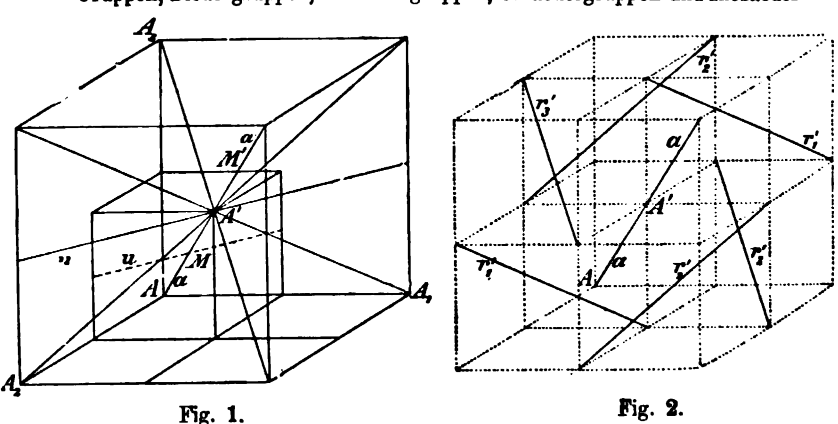


Fig. 1. Fig. 2.

gruppen genannt worden sind. Hierzu sind jedoch nur solche von diesen Gruppen tauglich, deren Drehungsaxen die Periode 2, 3, 4 oder 6 haben, resp. — krystallographisch gesprochen — zweizählig, dreizählig, vierzählig oder sechszählig sind. Jeder Operation einer dieser Punktgruppen entspricht in der zu ihr isomorphen Raumgruppe eine unendliche Reihe von Operationen, die aus einer von ihnen durch Multiplication mit unendlich vielen geeigneten Translationen ableitbar sind, und zwar bilden alle diese Translationen selbst eine Gruppe (Translationsgruppe), die bei der isomorphen Beziehung der Identität der Punktgruppe gegenübersteht.

Für die Modelle sind nur solche Gruppen berücksichtigt worden, die den Oktaedergruppen isomorph sind, deren Axen also den Kanten, Flächen-

diagonalen und Körperdiagonalen eines Würfels parallel laufen. Axen von gleicher Farbe sind solche Axen, die durch die Operationen der Gruppe zur Deckung gelangen können. Um den Modellen nicht durch Häufung der Fäden die Übersichtlichkeit zu nehmen, ist die Verteilung der Axen von der Periode 3 an besonderen Modellen kenntlich gemacht worden; es gibt für alle Gruppen nur zwei verschiedene Verteilungsgesetze der dreizähligen Axen, und zwar gilt das Modell 8 (Fig. 1) für die Gruppen, denen die Modelle 1 bis 5 und 10 bis 13 entsprechen, das Modell 9 dagegen (Fig. 2) für 6 und 7. Die Form der Modelle 1 bis 7 entspricht im Allgemeinen dem Fundamentalbereich der in jeder Gruppe enthaltenen Translationsgruppe.

Die Modelle 10 bis 13 zeigen ausser der Axenverteilung die durch die Symmetrieebenen der Gruppen bestimmte Raumteilung, resp. deren Fundamentalbereich.

Die Modelle 1 bis 7 beziehen sich auf diejenigen Gruppen, die in meiner Schrift über Krystallsysteme und Krystallstructur (Leipzig, 1891) mit O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 resp. O_7 und O_8 bezeichnet worden sind; den Modellen 10 bis 13 entsprechen die Gruppen O_h^1, O_h^4, O_h^7, O_h^9 (vgl. a. a. O. S. 543—549); es sind dies die einzigen Oktaedergruppen, bei denen die Symmetrieebenen eine von der Würfelteilung verschiedene Raumteilung liefern.

(Schoenflies.)

Vergleiche zu dieser Gruppe auch noch die in Abteilung III aufgezählten:

Modelle zur Theorie der Krystallstructur von **Sohncke.**
Krystallographischen Modelle von **Groth.**
Modelle zur Raumeinteilung von **Herschel.**
Krystallmodelle von **F. Thomas** in Siegen.
Krystallmodelle von **Steigerwald Neffe,** München.

141 Projectionsmodelle der sechs regelmässigen vierdimensionalen Körper von Dr. **V. Schlegel** in Hagen i. W. Verlag **L. Brill,** Darmstadt.

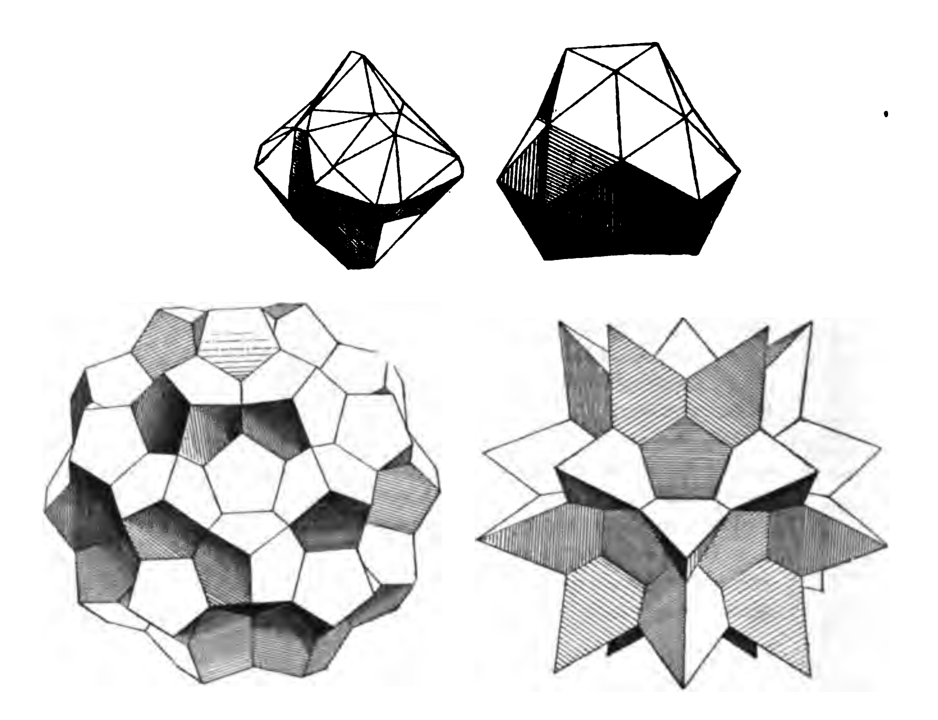
Specialkatalog 183—186, 200, 201 (pag. *31* u. *87*).

183. Fünfzell. 184. Achtzell. 185. Sechzehnzell. 186. Vierundzwanzigzell. 200. Sechshundertzell. 201. Hundertzwanzigzell.

Vergl. *Schlegel* »Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde« Nova Acta d. ksl. leop. Carol. Akad. Bd. 44, Nr. 4, sowie die der Modellserie beigegebene Abhandlung.

142 Ansichten, Netze und Modelle aus Cartonpapier zu den Projectionsmodellen der zwei letzten regelmässigen, vierdimensionalen Körper (Sechshundertzell, Hundertzwanzigzell.) Nach Zeichnungen von **V. Schlegel** in Hagen i. W. Verlag **L. Brill,** Darmstadt.

Specialkatalog 208—210 (pag. *32* u. *89*). (Abbldg. s. nächste Seite).



143 **Projectionsmodell des vierdimensionalen vierseitigen Prisma's und seine Zerlegung in vier inhaltsgleiche Fünfzelle.** Von **V. Schlegel** in Hagen i. W. Verlag **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 202 (pag. *33* u. *88*.)

Vergl. *Schlegel*: Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions. C. r. de l'Association franç. pour l'avanc. des Sciences 1885, sowie die dem Modell beigegebene Note.

L. Ebene Curven.

144 **Modell aus Messingrahmen und gespannten Drähten über die Erzeugung von Kegelschnitten durch zwei cyklisch-projective Strahlenbüschel.** Von Prof. **Chr. Wiener** in Karlsruhe. (Ausgeführt 1865).

Projicirt man ein Strahlenbüschel, durch welches der volle Winkel in eine Anzahl gleicher Teile geteilt wird, und nimmt die Projection zweimal, so erhält man zwei cyklisch-projective Strahlenbüschel, derart, dass einem Strahle des einen jeder Strahl des andern als entsprechend

zugeordnet werden kann; darunter befindet sich ein Paar congruenter Büschel. Zwei solche Strahlenbüschel sind durch feine Drähte dargestellt, welche in quadratische Rahmen eingespannt sind. Diese werden lose über einander gelegt und können gegen einander verschoben werden. Hängt man nun ein durch ein Gewichtchen beschwertes Häkchen an dem Kreuzungspunkte irgend zweier Drähte beider Rahmen ein, und dann in regelmässiger Folge Häkchen in den Kreuzungspunkten der folgenden Drähte, so bezeichnen die Häkchen Punkte eines Kegelschnittes, welcher sich beim Verschieben der Rahmen gegen einander durch das Gleiten der Häkchen auf den beiden umfassten Drähten verändert. Es können auf diese Weise alle Arten von Kegelschnitten, Ellipsen und Kreise, Hyperbeln, Parabeln dargestellt werden.

(Chr. Wiener.)

145 **Die verschiedenen Arten des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschar,** 12 Blätter Zeichnungen, ausgeführt (1885) **im math. Institut der techn. Hochschule München.** (Prof. **W. Dyck**), von stud. **J. Kleiber.**

Die Blätter stellen die nach den Realitätsverhältnissen der Grundelemente, bezw. deren getrennter oder vereinigter Lage zu unterscheidenden Typen dar.

146 **Die sieben Haupttypen der ebenen Curven dritter Ordnung, nach Möbius auf einer Kugel dargestellt.** Ausgeführt im **Math. Seminar der Univ. Tübingen**, unter Leitung von Prof. **A. Brill**, von cand. **Dollinger**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 204 u. *205* (pag. *40* u. *75*).

Von den 7 Typen dieser sphärischen Curven sind drei durch Spaltung eines der 5 Newton'schen Haupttypen entstanden. Sie bestehen aus einem unpaaren Zug und unterscheiden sich nur durch die Lage der Verbindungslinie der Wendepunkte gegen das Dreieck der Wendetangenten. Sie sind hier auf *einer Kugel* (Nr. 204) vereinigt. Die *andere Kugel* (Nr. 205) enthält die Typen mit Oval, mit Doppel-, Rückkehr- und isolirtem Punkt.

Vergleiche hiezu die pag. 275 aufgezählten Fadenmodelle der Kegel dritter Ordnung.

47 **Die verschiedenen Typen der rationalen Curven vierter Ordnung** ($p = 0$). Fünf Blätter Zeichnungen, ausgeführt im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von stud. **Chr. Wolff.**

Man vergl. hierzu den Aufsatz von *Brill*, Math. Annalen. Bd. 12.

148 **Die verschiedenen Typen der ebenen Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten** ($p = 1$). Drei Blätter Zeichnungen, ausgeführt (1880) nach Angabe von **H. Wiener** von stud. **Chr. Wolff. Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Man vergl. bez. der gestaltlichen Verhältnisse dieser Curven und der gewählten Constructionsweise die Inaug.-Dissertationen der Herren *Wiener* (München 1880) und *P. Vogel* (Erlangen 1878).

149 **Zwei Tafeln zur näherungsweisen Darstellung einer Curve: a) von $y = \cos x$ durch die Anfangsglieder der Taylor'schen Reihe. b) von $y = \sqrt{x}$ durch die Anfangsglieder der Fourier'schen Reihe,** ausgeführt (1892) im **Math. Institut der technischen Hochschule München** (Prof. **Dyck**) von stud. **Baumer.**

Die beiden Tafeln sollen (für Zwecke des Unterrichts) den charakteristischen Unterschied illustriren, der zwischen der näherungsweisen Darstellung einer Function mit Hilfe der Taylor'schen Reihe und der mit Hilfe der Fourier'schen Reihe besteht.

Für die Curve $y = \cos x$ sind die neun ersten Näherungscurven gezeichnet, für $y = \sqrt{x}$ die ersten fünf.

(Dyck.)

---

150 **Sechs Tafeln über die Schönheit der Linien, hervorgebracht durch Stetigkeit und Regelmässigkeit,** von Prof. **Chr. Wiener,** techn. Hochsch. Karlsruhe, 1888.

Die *formale Schönheit der Linien* beruht allein auf ihrer Gestalt und ist unabhängig von dem Gegenstande, an welchem sie auftreten, während ihre *charakteristische Schönheit* ein Zeichen der Beglückungsfähigkeit dieses Gegenstandes ist. Die formale Schönheit wird durch ihre Gesetzmässigkeit hervorgebracht, und zwar insbesondere durch die Stetigkeit und die Regelmässigkeit, wobei unter Regelmässigkeit die nach einer gewissen Regel stattfindende Wiederholung von Teilen verstanden sein soll. Wir nennen eine krumme Linie zwischen zweien ihrer Punkte stetig von der 1. Ordnung, wenn man auf ihr von dem einen Punkte zum andern gelangen kann, wenn also die Linie keine Unterbrechung erleidet; stetig von der 2. Ordnung, wenn bei diesem Durchlaufen die Tangente alle Zwischenlagen durchschreitet, wenn also die Linie keine Ecken besitzt; stetig von der 3. Ordnung, wenn dabei der Krümmungskreis alle Zwischengestalten durchläuft, wenn also an keiner Stelle ein Sprung von einer Krümmung zu einer davon verschiedenen stattfindet; und kann ebenso von Stetigkeiten höherer Ordnung sprechen. Die bezeichneten drei Stetigkeiten empfindet ein Beschauer angenehm, und den Mangel, selbst der dritten, fühlt er als unbefriedigend und verletzend, auch wenn er ungeübt ist.

Das erste Blatt zeigt eine Ellipse und 4 Kreisbogenovale (Korbbogen) von demselben Axenverhältnisse (1 : 2). Die letzteren sind aus 4 Kreisbogen von zweierlei Halbmessern zusammengesetzt. Keine derselben erreicht auch nur annähernd die Schönheit der Ellipse. Am er-

träglichsten ist diejenige, bei welcher das Verhältnis des grösseren zum kleineren Halbmesser ein Minimum ist, weniger, wenn die Differenz dieser Halbmesser am kleinsten wird; noch etwas besser wirkt eine Ovale, welche zwischen den letzt genannten liegt. — Ebenso zeigen construirte Curven 4. Ordnung schönere Formen, als Linien von angenäherten Gestalten, die aus wenigen Kreisbogen zusammengesetzt sind.

Die Regelmässigkeit kann durch Symmetrie hervorgebracht werden; deswegen zeigen Kreisbogenovale, da sie zwei Symmetrieaxen besitzen, doch noch eine gewisse Schönheit. Auf der Symmetrie beruht die Wirkung des Kaleidoskopes, zu welchem auch unschöne Linienzüge durch symmetrische Wiederholung im Winkel zu angenehm wirkenden Sternfiguren zusammengesetzt werden. Auch neben einander liegende wiederholte Formen wirken angenehm, wie Bauglieder, die Bestandteile eines Gitters u. a. Eine Veränderung bei der Wiederholung, wie sie in gesetzmässiger Weise durch die perspective Abbildung hervorgebracht wird, erhöht den Reiz. — Der Kreis hat unendlich viele Symmetrieaxen und wurde von den Alten für die vollkommenste Linie erklärt; er ist aber wegen seiner unveränderlichen Krümmung arm gegen die Ellipse. Es sind noch die Sinuslinie, welche von *Hogarth* für die Schönheitslinie erklärt wurde, sowie ihre perspective Veränderung, dargestellt; ebenso die verschlungene Cykloide, welche als Projection einer Schraubenlinie auftreten kann. Die Schlangenlinie, worunter die Schraubenlinie des Cylinders und die Schneckenlinie des Kegels gemeint sind, erklärte Hogarth für die reizvollste Linie. Besonders befriedigend wirkt eine Schar von gesetzmässig in einander übergehenden Linien, wie die Cassinischen Linien, welche die Lemniskate einschliessen. (Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Karlsruhe; Vortrag vom 11. Mai 1888; in dem bald erscheinenden 11. Bande.)

(Chr. Wiener.)

M. Algebraische Flächen.

Flächen zweiter Ordnung.

151 **Kreiskegel mit ebenen Schnitten nach einer Ellipse, Hyperbel und Parabel** (aus Gips), nach den Schnitten zerlegbar. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

152 **Kegel mit Kreis-, Ellipsen-, Parabel- und Hyperbelschnitt** (aus Holz) nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).

(Näheres *Specialkatalog*.)

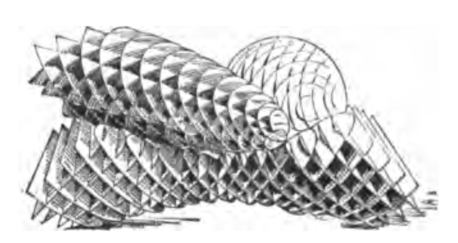
153 **Beweglicher Cylinder, in ein einschaliges Hyperboloid deformirbar,** nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).
(Näheres *Specialkatalog.)*

154 **Einschaliges Hyperboloid in Fadenconstruction,** nach Angabe von **G. Köpp**, ausgeführt von der **Lehrmittelanstalt J. Ehrhard & Co.** in Bensheim (Hessen).
(Näheres *Specialkatalog.)*

155 **Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung,** construirt nach Angabe von Prof. **A. Brill** (München) Univ. Tübingen. Verlag **L. Brill,** Darmstadt.

Specialkatalog pag. *1* und *57*.

5, *6*. Zwei Ellipsoide.
10. Einschaliges Hyperboloid.
18. Zweischaliges Hyperboloid.
22. Elliptisches Paraboloid.
26. Hyperbolisches Paraboloid.
16. Kegel.



Diese im Jahre 1874 veröffentlichten Modelle verdanken ihr Entstehen der Anregung, die das auf der Mathematischen Versammlung in Göttingen ausgestellte Modell eines elliptischen Paraboloids, von Prof. *Henrici* in London, aus Halbkreisen zusammengesetzt, dem Urheber gab. Er änderte die Construction in zweckentsprechender Weise ab und dehnte das Verfahren auf die Darstellung aller Flächen zweiter Ordnung aus.

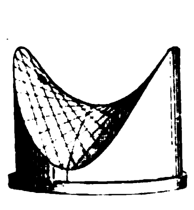
Näheres vergl. die der Modellserie beigegebene Abhandlung.
(A. Brill.)

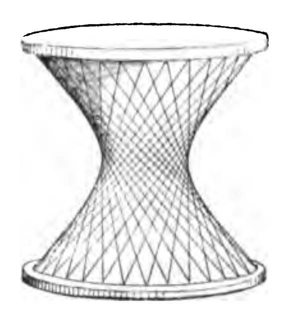
156 **Gipsmodelle von Flächen zweiter Ordnung,** ausgeführt (1878) unter Leitung von Prof. **A. Brill** von stud. mech. **R. Diesel; Math. Institut der techn. Hochschule München.** Verlag **L. Brill,** Darmstadt.

Specialkatalog pag. *7* und *57*.

1, *2*. Zwei Ellipsoide.
8, *9*. Zwei einschalige Hyperboloide.
17. Zweischaliges Hyperboloid.

20. Elliptisches Paraboloid.
23. 24. 25. Drei hyperbolische Paraboloide.
14. Elliptischer Kegel.





Die gleiche *Serie mit aufgetragenen Krümmungslinien* vgl. unter I. Ebendort unter I . . . . vergleiche man auch die *Serie confocaler Flächen zweiter Ordnung von Schwarz und Neovius.*

157 **Fadenmodelle von Flächen zweiter Ordnung**, dargestellt durch Seidenfäden in Messinggestellen. Verlag **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog pag. *7* u. *58.*
11. Unveränderliches Hyperboloid mit Asymptotenkegel. (Fig. 1.)

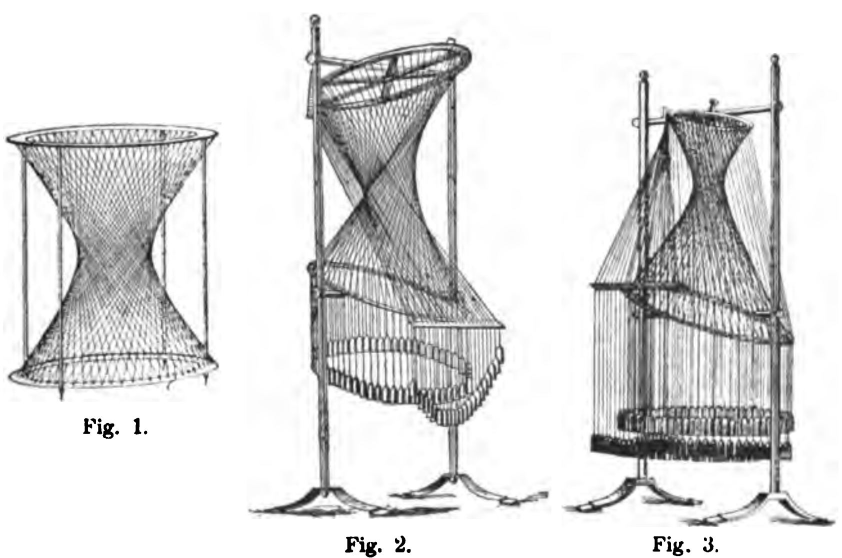


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

12. Bewegliches Hyperboloid mit einer Schar von Erzeugenden und mit einem berührenden hyperbolischen Paraboloid. Die Leitkreise können auch schief gegeneinander gestellt werden, wodurch man (vgl. Fig. 2) windschiefe Flächen vierter Ordnung erhält.

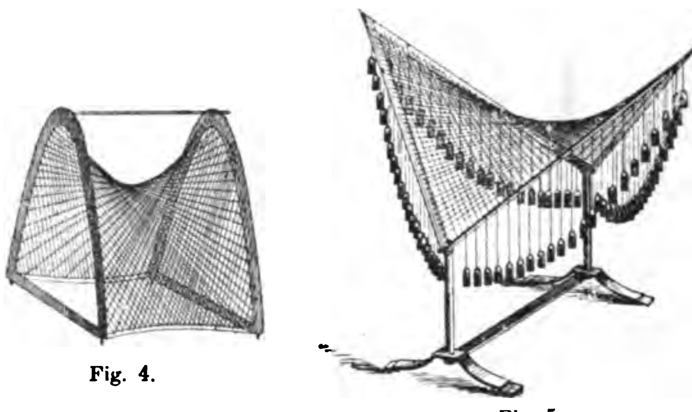


Fig. 4. Fig. 5.

13. Bewegliches Hyperboloid mit zwei Scharen von Erzeugenden (Fig. 3.)

28. Unveränderliches hyperbolisches Paraboloid. (Fig. 4.)

29. Bewegliches hyperbolisches Paraboloid. (Fig. 5.)

158 **Fadenmodelle zur Herstellung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, sowie der Classenkegelschnitte aus zwei projectiven Punktreihen.** Hergestellt (1878 und 1892) von stud. math. **E. Lange** und **K. Fischer** im **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Es sind in

1. zwei ähnlichen Punktreihen
2. zwei gleichlaufend
3. zwei entgegenlaufend projectiven Punktreihen

die entsprechenden Punkte durch Fäden verbunden; die Lagen der beiden auf einander bezogenen Punktreihen können beliebig geändert und dadurch die verschiedenen Flächen, bez. im Grenzfall Curven zweiter Ordnung erzeugt werden. Man vergl. hierzu die auf dem gleichen Princip beruhenden Modelle von *Buka* (unter N, Nr. 186.)

159 **Zwei Kegel mit zwei gemeinsamen Tangentialebenen,** nach Angabe von Prof. **Ch. Wiener**, techn. Hochschule Karlsruhe, ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Fadenmodell. Die Spitze des einen Kegels ist beweglich. Die in zwei Ellipsen zerfallende Schnittcurve der beiden Kegel ist durch kleine, je in die entsprechenden Erzeugenden eingeschaltete Ringe markirt.

160 **Zwei Fadenmodelle,** darstellend den Schnitt zweier Flächen 2. O.
in 4 reellen Geraden
in 2 reellen Geraden und 2 imaginären Geraden 2. Art (nach *Staudt*),
von Privatdocent **H. Wiener**, Univ. Halle a. S.

161 **Modell zweier beweglicher Hyperboloide, welche immer confocal bleiben.** Von Prof. **O. Henrici** in London.

Im Jahre 1873 stellte Prof. *Henrici* einem seiner Schüler im University College die Aufgabe, aus dünnen Stäben ein einschaliges Hyperboloid herzustellen, indem er an drei sich nicht schneidende Stäbe andere anlegte und dieselben, wo sie sich schneiden, durch einen Faden zusammenband. Er sagte, dass das so entstehende Modell bald fest werden würde. Zu seiner Überraschung stellte sich jedoch heraus, dass das Modell beweglich blieb. Es war nicht schwer, nachträglich den Grund hiervon einzusehen und es ergab sich der Satz: Wenn man die Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids als starre Geraden betrachtet, die überall, wo sie sich treffen, fest verbunden sind, aber so, dass an jedem Schnittpunkte eine freie Bewegung der einen um die andere möglich bleibt, so ist das Hyperboloid nicht starr, sondern erlaubt eine Deformation in eine einfach unendliche Anzahl anderer Hyperboloide.

Jeder Punkt auf der Fläche bewegt sich bei der Deformation immer auf der Normalen. Hält man bei der Deformation den Mittelpunkt und die Richtungen der Hauptaxen fest, so bilden die verschiedenen Lagen des Hyperboloids eine Reihe confocaler Hyperboloide, während jeder Punkt die Schnittlinie eines festen confocalen Ellipsoids und eines solchen zweischaligen Hyperboloids durchläuft. Die verschiedenen Lagen eines Punktes sind daher, im Ivory'schen Sinne, entsprechende Punkte auf den verschiedenen Hyperboloiden.

Das bewegliche Hyperboloid lässt sich in doppelter Weise so deformiren, dass alle Erzeugenden in einer Ebene liegen. Man erhält dann die Hesse'schen Grenzflächen, begrenzt durch die Focalcurven des Systems, welche als Einhüllende der Erzeugenden erscheinen. Die eine ist, wie bekannt, eine Hyperbel, die andere eine Ellipse. Es werde nun eine Zeichnung dieser Ellipse gemacht mittelst einer Anzahl Tangenten. Diese werden so gewählt, dass ihre Schnittpunkte auf confocalen Ellipsen respective Hyperbeln liegen, d. h. durch die Tangente wird der ausserhalb der Ellipse liegende Teil der Ebene in Vierecke zerlegt. Geht man nun von einem Schnittpunkte aus längs einer Diagonale eines solchen Vierecks und in demselben Sinne längs der Diagonale des nächsten Vierecks, so erhält man eine Reihe von Punkten auf einer Ellipse oder Hyperbel,

je nachdem man die eine oder die andere Diagonale wählt. Um dies zu erreichen, verfährt man wie folgt. Zunächst wählt man die Axen der Focalellipse und verzeichnet das dieser Ellipse umschriebene Rechteck, dessen Seiten diesen Axen parallel sind und bestimmt ihre Brennpunkte. Mittelst der letzteren findet man die Scheitelpunkte derjenigen Ellipse, welche durch die Ecken dieses Rechtecks geht und der ersten confocal ist. Das durch diese Punkte bestimmte Parallelogramm ist wieder der ersten Ellipse umschrieben. Durch die Punkte, wo die Seiten des Parallelogramms diejenigen des Rechtecks schneiden, lässt sich abermals eine confocale Ellipse legen, deren Scheitelpunkte wieder mittelst der Brennpunkte zu ermitteln sind. Von diesen zieht man Tangenten an die erste Ellipse. Man hat dann 16 Tangenten der letzteren. Diese geben jede doppelt gerechnet die 32 Erzeugenden, aus denen jedes Hyperboloid des Modelles gebildet ist. Auf diese Zeichnung wurden die Stäbe längs den Tangenten gelegt und die Schnittpunkte markirt. An den markirten Stellen erhielten die Stäbe kleine Einkerbungen und wurden nachher durch Zwirnfäden zusammengebunden. Es entstand so ein Modell, welches sehr frei beweglich ist. Auf demselben sind die Krümmungslinien diejenigen Curven, welche man erhält, wenn man von einem Schnittpunkte auf die oben beschriebene Weise zum nächsten übergeht.

Bei der Deformation des Modelles beschreibt dann eine solche Curve ein confocales Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid.

Das so angefertigte Modell wurde im Januar 1874 der London Math. Society vorgelegt.

Bald darauf wurden zwei weitere Modelle nach derselben Zeichnung angefertigt und so verbunden, dass sie sich zusammen bewegen und zugleich confocal bleiben. Dies ward auf folgende Weise bewerkstelligt. Bekanntlich bilden sechs confocale Flächen, zwei von jeder Art, eine Anzahl krummflächiger Parallelepipede, welche alle ihre Diagonalen von gleicher Länge haben. Vier solche Diagonalen-Paare, durch Stäbe repräsentirt, wurden angebracht und zeigten sich genügend, die gewünschte Verbindung herzustellen.

Es ist dies das Modell, welches ausgestellt ist.

Es dürfte von Interesse sein, auch die Anfertigung der Stäbe zu beschreiben. Die Stäbe aus Tannenholz, wie sie zu Matten vielfach benützt werden, sind zu zerbrechlich. Ich wählte daher Lance-wood, welches, wenigstens in England, zu Wagenschaften, sowie zu Masstäben etc. vielfach benützt wird. Es ward auf einer Sägemühle in dünne Stäbe geschnitten und dann, um diese abzurunden, durch die Löcher einer zum Drahtziehen gebrauchten Platte gezogen. Es ist hierbei nötig, die Stäbe einige Zeit in Wasser zu legen und sowie sie zu hart werden, wiederholt zu erweichen.

Es mögen hier noch einige weitere Eigenschaften des beweglichen Hyperboloids angegeben werden.

Es ist von Interesse zu bemerken, dass das bewegliche Hyperboloid erlaubt, eine durch Tangenten, jede doppelt gezählt, bestimmte Ellipse durch eine endliche räumliche Deformation in eine Hyperbel überzuführen.

Ferner erhält man einen sehr anschaulichen Beweis von Brianchon's Theorem. Markirt man nämlich auf dem Hyperboloid ein durch sechs Erzeugende gebildetes Sechseck, so sieht man sofort, dass dessen Diagonalen sich in einem Punkte schneiden, weil sie nämlich die Schnittlinien von drei Ebenen sind. Deformirt man nun, bis die Fläche in eine Focalcurve des Systems übergeht, so erhält man, als Grenzfall, Brianchon's Satz.

Auch die weitere Entwickelung der Theorie und Anwendung des beweglichen Hyperboloids möge erwähnt werden. Bald nachdem ich das erste Modell der Math. Soc. vorgelegt hatte, stellte Prof. *Greenhill* an der Universität Cambridge eine auf dasselbe bezügliche Examinationsaufgabe. Diese ward nachher von *Cayley* behandelt (Messenger of Mathematics) und hiedurch ward die Eigenschaft der Beweglichkeit weiter bekannt. Dann haben sich verschiedene Mathematiker mit derselben beschäftigt. Namentlich haben *Darboux* und *Mannheim* schöne Anwendungen auf Poinsot's Theorie rotirender Körper gemacht.

(O. Henrici.)

Flächen höherer Ordnung.

(Vergl. hiezu auch eine Reihe der unter N, O, P aufgezählten Modelle.)

162 **Zwei stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden.** Von Prof. **Chr. Wiener**, Karlsruhe. Verlag von **B. G. Teubner**. Leipzig 1869. Ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

163 **Serie von Flächen dritter Ordnung, sämtliche charakteristische Typen derselben darstellend, sowie die wichtigsten ihrer Hesse'schen Flächen.** Ausgeführt 1884 von Prof. **Rodenberg** (Darmstadt), Hannover. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog:

30. Die Diagonalfläche (Fig. 1).

31-35. Fläche mit vier reellen conischen Knotenpunkten und collineare Verwandlungen derselben.

36, 37. Fläche mit drei reellen conischen Knotenpunkten.

38. Fläche mit einem biplanaren Knotenpunkt B_3, dessen zwei Tangentialebenen reell sind.

39. Fläche mit einem biplanaren Knotenpunkt B_3, dessen Tangentialebenen conjugirt imaginär sind.

40. Fläche mit drei reellen biplanaren Knotenpunkten B_3.

41–44. Flächen mit biplanaren Knotenpunkten höherer Ordnung (B_4, B_5, B_6).

45–48. Flächen mit uniplanarem Knotenpunkt U_6, bez. U_7, U_8.

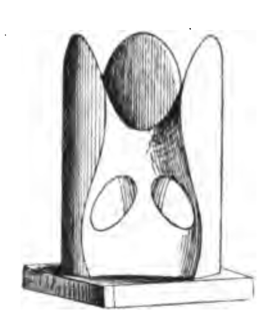


Fig. 1.

49–52. Regelflächen dritter Ordnung.

53. Drahtmodell zur Darstellung der Abbildung der Flächen mit 1, 2, 3, 4 conischen Knotenpunkten auf den Punktraum (reelles Pentaeder).

54 und *55.* Hesse'sche Fläche zur Fläche mit vier reellen conischen Knotenpunkten (Nr. *31*; Fig. 2.)

56. Hesse'sche Fläche zur Fläche mit drei reellen conischen Knotenpunkten (Nr. *36*; Fig. 3).

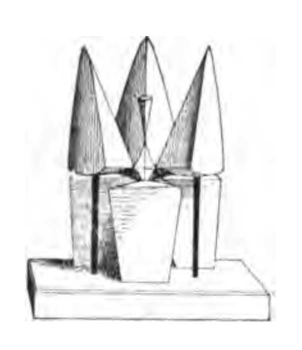


Fig. 2.

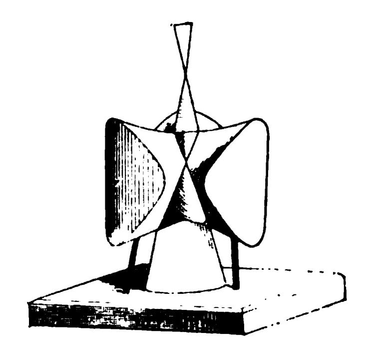


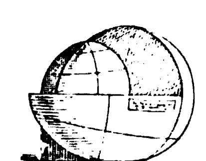
Fig. 3.

Näheres vergl. pag. *14* und *60* des Specialkataloges von ***L. Brill***, sowie die der Modellserie beigegebene Abhandlung, in welcher auch die Literatur über den Gegenstand angeführt ist.

164 **Zehn Modelle von Cykliden,** ausgeführt im **math. Institut der technischen Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von Assistent **P. Vogel** und stud. math. **S. Finsterwalder** (1880 und 1884). Verlag von **L. Brill,** Darmstadt.

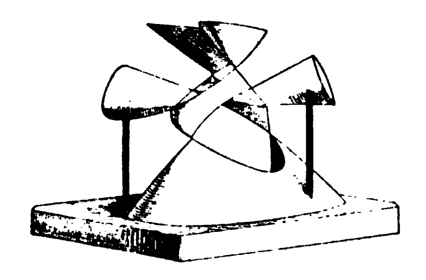
Specialkatalog 57—66, pag. *11*, *21* und *65*.

Die Modelle *57—63* stellen *Dupin'sche Cykliden* dar (vergl. eine Abhandlung von Clerk Maxwell im Quart. Journ. of Math. Bd. 9). — Nr. *58*, *59* sind Abgüsse der im Besitze des math. Seminars in Berlin befindlichen, von Herrn *Kummer* angefertigten Originale. Die Modelle *64—66* stellen allgemeine Cykliden dar; Nr. *64* mit 2 imaginären Doppelpunkten, Nr. *65* mit 2 imaginären und einem reellen, Nr. *66* mit einem uniplanaren Knotenpunkt, der durch Zusammenziehen der drei Knoten in *65* entstanden ist.



165 **Drei Modelle der Kummer'schen Fläche,** ausgeführt im **math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **F. Klein**), von stud. math. **K. Rohn** (1877). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 67 - 69, pag. *5* und *66*, wo auch die einschlägige Literatur citirt ist.



Die drei Modelle unterscheiden sich nach der Realität der Knotenpunkte: 16, 8, 4 der Knotenpunkte (und Doppeltangentialebenen) reell.

166 **Serie von Flächen vierter Ordnung mit vier längs Kreisen berührenden Ebenen,** nach Geh. Rat Prof. **Kummer**, Univ. Berlin. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 70—75; pag. *19* und *67*.

Die sechs Modelle sind Copien der im Besitz des math. Seminars der Universität Berlin befindlichen Originale. Man vergl. die Abh. von *Kummer* in den Monatsber. der k. Akad. d. W., Berlin 1862.

Die Gleichung aller dieser Flächen lässt sich auf die Form

$$\varphi^2 - \lambda pqrs = 0$$

bringen, wo $\varphi = o$ die Gleichung einer Kugel, p, q, r, s die linken Seiten der Gleichungen der Ebenen eines regulären, mit der Kugel concentrischen Tetraeders bedeuten. Dabei ergibt das gegenseitige Grössenverhältnis

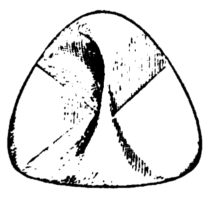


Fig. 1. Fig. 2.

von Kugel und Tetraeder die verschiedenen Typen, unter denen sich insbesondere auch die Steiner'sche (sog. Römische) Fläche befindet (Nr. 72; Fig. 1).

167 Drei Modelle der Steiner'schen Fläche, ausgeführt von Prof. **K. Rohn,** an der techn. Hochschule Dresden.

Bei der allgemeinen Steiner'schen Fläche mit ***drei reellen*** Doppelgeraden:

$$2xyzw + a_1y^2z^2 + a_2z^2x^2 + a_3x^2y^2 = 0$$

haben die Pinchpoints auf diesen die Coordinaten:

$0, 0, 1, \pm\sqrt{a_1 a_2}$, ferner $0, 1, 0, \pm\sqrt{a_1 a_3}$, endlich $1, 0, 0, \pm\sqrt{a_2 a_3}$.

Bei gleichem Vorzeichen der a sind alle Pinchpoints null, bei verschiedenem aber nur auf einer Doppelgeraden. Dieser Fall ist modellirt; die Ebenen, welche längs Kegelschnitten berühren, sind imaginär; die benützte Gl. ist: $4xyz + y^2z^2 + z^2x^2 - 4x^2y^2 = 0$.

Die Steiner'sche Fläche mit ***Selbstberührungsgerade*** und einer ***Doppelgeraden***, die durch Zusammenrücken zweier Doppelgeraden aus der allgemeinen entsteht, zeigt nur noch 3 Pinchpoints (ausserhalb des dreifachen Punktes) und zwar ***einen*** auf der Doppel- und ***zwei*** auf der Selbstberührungsgeraden. Durch ersteren Punkt und je einen der beiden letzteren gehen die beiden Ebenen, die die Fläche längs eines Kegelschnittes berühren. Modellirt ist die Fläche: $x^2z - x^4 - x^2z^2 - y^2z^2 = 0$, sie trägt auf der y-Axe die Pinchpoints $\pm\frac{1}{2}$, auf der z-Axe den Pinchpoint 1.

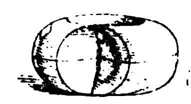
Die Steiner'sche Fläche mit ***Selbstosculationsgeraden*** besitzt nur noch einen einzigen Pinchpoint und durch ihn eine längs eines Kegelschnitts (im Modell ein Kreis) berührende Ebene. Im Modell schneidet auch die Ebene durch die singuläre Gerade senkrecht zur Osculationsebene einen Kreis aus. Die Gleichung der Fläche ist: $-wx^2 + (xz - y^2)^2 = 0$.

(Rohn.)

168 Drei Gipsmodelle, einer Familie von Flächen vierter Ordnung angehörend. Von Ingenieur **K. A. Mayer** in Einbeck (Hannover).

169 Modell einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden (sog. böhmisches Gewölbe) und einer Fläche achter Ordnung, angefertigt (1885) im **math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von stud. math. **Finsterwalder**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 77 und *78;* pag. *21. 22* und *69.*



Die Fläche vierter Ordnung entsteht dadurch, dass ein Kreis sich mit seinem Mittelpunkte auf einem festen Kreise fortbewegt, dabei mit seiner Ebene immer parallel zu sich selbst und senkrecht zum festen Kreise bleibend.

Die Fläche achter Ordnung entsteht durch Bewegung einer Kreislinie, deren Ebene senkrecht zur Ebene zweier sich senkrecht schneidender Geraden bleibt, während die Endpunkte eines Durchmessers bezw. auf diesen Geraden gleiten.

170 Gipsmodell der Fläche, welche die Kugeln von gleichem Radius einhüllt, deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen; angefertigt von Prof. **O. Henrici**, ausgestellt von der **Londoner Mathematischen Gesellschaft.**

Die Fläche ist von der 6. Ordnung. Sie hat eine Doppelcurve und eine Cuspidalcurve. Auf einer Seite der Ebene, in welcher die Leitparabel liegt, ist die äussere Fläche, auf der anderen der im Innern liegende Teil mit den singulären Curven dargestellt. Die Doppelcurve ist eine Parabel, welche der Leitparabel congruent ist, aber in einer zur letzteren rechtwinkligen Ebene liegt. Die Fläche kann also auch als Einhüllende der Kugel aufgefasst werden, welche so rollt, dass sie beide Zweige einer Parabel berührt. Die Doppelcurve tritt an zwei Punkten A aus der Fläche heraus und wird dann isolirte Curve.

Die Cuspidalcurve besteht aus zwei endlichen Zweigen, die sich in den Punkten A Spitzen bildend vereinigen.

(O. Henrici.)

171 Fläche 6. Ordnung, geometrischer Ort der Mittelpunkte der Sehnen einer symmetrischen Raumcurve 4. Ordnung 1. Species. Ausgeführt im **mathematischen Institut der technischen Hochschule München** (unter Leitung von Prof. **Finsterwalder**) vom gepr. Lehramtscand. **F. Böhmländer.**

Die Mittelpunktsfläche der Sehnen einer Raumcurve kann immer als Rückungsfläche aufgefasst werden, die durch Bewegung parallel zu sich selbst der auf die halbe Dimension reducirten Raumcurve entsteht, wobei ein Punkt wieder eine gleiche Raumcurve beschreibt. Auf einer solchen Fläche liegt demnach eine doppelte Schar congruenter Raumcurven.

Von den beiden Modellen stellt das grössere, zerlegbare den Teil der Fläche dar, der von den Mittelpunkten reeller Sehnen erfüllt wird, auf dem kleineren Modell ist die Fläche erweitert, wodurch noch die reellen Mittelpunkte von Sehnen mit conjugirt imaginären Endpunkten zur Erscheinung kommen. Der mittlere Teil beider Modelle ist der Ort der Mittelpunkte von Sehnen, deren Endpunkte auf verschiedenen Zweigen der Curve liegen, der umgebende Teil enthält die Mittelpunkte der Sehnen eines Zweiges. Die Enveloppe der Curvenschar auf diesem Teil ist die ursprüngliche Raumcurve.

(Finsterwalder.)

Vergleiche hier und für die folgende Lit. N. noch eine Reihe der unter No. 128 aufgeführten Modelle des Verlages von *Delagrave*, Paris.

N. Raumcurven und abwickelbare Flächen; Regelflächen.

172 **Die Raumcurven dritter Ordnung auf Cylindern zweiter Ordnung.** Ausgeführt im **Mathem. Institut der techn. Hochschule München** (unter Leitung von Prof. **Klein**) von stud. math. **E. Lange** (1879). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 90 (pag. *13* und *73*), sowie die dem Modell beigegebene Abhandlung.

a) Die cubische Ellipse. b) Die cubische Hyperbel. c) Die cubische Parabel. d) Die cubisch-hyperbolische Parabel.

173 **Die vier Gestalten der Raumcurve 3. Ordnung.** Vier Fadenmodelle und vier Drahtmodelle von Privatdocent **H. Wiener**, Univ. Halle a/S.

Die Gestalten der Raumcurve dritter Ordnung sind dargestellt

a) durch die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten.

b) als Punktcurven durch Drähte.

174 **Modell aus Holzrahmen und Seidenfäden über die cubische hyperbolische Parabel als teilweiser Schnitt zweier Cylinder zweiten Grades,** ausgeführt von dem Studirenden **Duffing**, 1881, im **Seminar für darstellende Geometrie an der techn. Hochschule zu Karlsruhe** unter Leitung von Prof. **Chr. Wiener.**

Von den im Seminar angefertigten derartigen Modellen der Raumcurven 3. Ordnung ist dieses Beispiel ausgewählt. Ein parabolischer und ein hyperbolischer Cylinder mit seinen beiden Asymptotenebenen sind aus Fäden von verschiedener Farbe dargestellt und so angeordnet, dass die eine Asymptotenebene durch die unendlich ferne Erzeugende des parabolischen Cylinders geht. Dadurch haben beide Cylinder eine unendlich

ferne Erzeugende gemein, und der Rest ihrer Schnittcurve ist die cubische hyperbolische Parabel, welche die Gerade und die Parabel zu Asymptoten hat, in welchen der parabolische Cylinder von den genannten Asymptotenebenen geschnitten wird. Die Curven sind durch weisse bezw. schwarze Perlen dargestellt, durch welche je ein Faden der beiden sich schneidenden Flächen geht.

(Chr. Wiener).

175 Vier Fadenmodelle zu der Raumcurve vierter Ordnung erster Art und ihrer abwickelbaren Fläche. Hergestellt (1884) von **H. Wiener,** jetzt Privatdocent Univ. Halle a/S. Verlag von **L. Brill,** Darmstadt.

Specialkatalog 91—94 (pag. *24* und *74*). Die Modelle sollen die Haupteigenschaften derjenigen Raumcurven vierter Ordnung, die der Schnitt der Flächen zweiter Ordnung eines Büschels sind, sowie der abwickelbaren Fläche ihrer Tangenten und der Doppelcurve dieser Fläche zur Anschauung bringen.

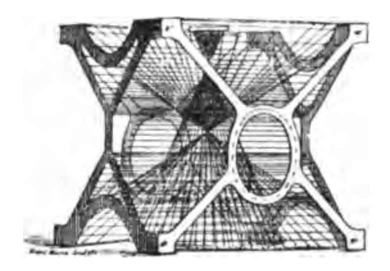


Fig. 1.

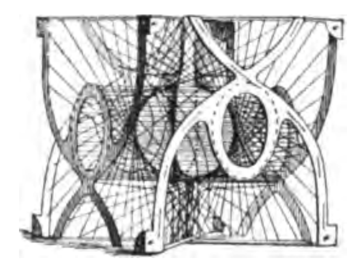


Fig. 2.

91. Erster Fall: Die Curve liegt auf vier reellen Kegeln. Darstellung der Curve als Schnitt dieser Kegel. (Fig. 1.)

92. „ „ Die abwickelbare Fläche der Tangenten der Curve.

93. Zweiter Fall: Die Curve liegt auf zwei reellen und zwei imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt jener beiden. Die abwickelbare Fläche ihrer Tangenten. (Fig. 2.)

94. Dritter Fall: Die Curve liegt auf vier imaginären Kegeln. Darstellung als Schnitt zweier geradliniger Hyperboloide. Die abwickelbare Fläche der Tangenten.

176 Modelle aus Holzrahmen und Seidenfäden über die Raumcurve 4. Ordnung 2. Art als teilweiser Schnitt einer Regelfläche 3. Grades mit einem einschaligen Hyperboloide. Construirt und ausgeführt im **Seminar für darstellende Geometrie an der techn. Hochschule zu Karlsruhe** unter Leitung von Prof. **Chr. Wiener.**

Diese beiden Flächen bilden die fragliche Schnittcurve, wenn sie ausserdem 2 Gerade gemein haben, welche nicht in einer Ebene liegen,

oder welche in der Doppelgeraden der Fläche 3. Grades zusammenfallen. (Vgl. *Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, Bd. 2, S. 459.) Der letztere Fall ist in den Modellen zu Grunde gelegt; beide Regelflächen sind durch Fäden dargestellt, und ihre Schnittlinie durch Perlen oder durch einen aufgelegten stärkeren Faden. Die Fälle sind nach der Anzahl der reellen unendlich fernen Punkte unterschieden. Diese verschiedenen Fälle sind durch die gegen einander concentrisch gelegten Richtkegel der beiden Flächen hergestellt, deren Erzeugenden bezw. mit einer Erzeugenden der sich schneidenden Flächen parallel sind. Die Schnittlinien der Richtkegel mit einer Ebene sind eine Curve 3. Ordnung mit einem Doppelpunkte, welcher der Doppelgeraden entspricht, und ein durch diesen Doppelpunkt gehender Kegelschnitt. Ausserdem haben diese Curven 4 Punkte gemeinsam, von deren Reellität die Reellität der unendlich fernen Punkte unserer Raumcurve abhängt.

a) *Die 4 unendlich fernen Punkte sind alle imaginär.* Das Modell ist von dem Studirenden *Eisele* im Jahre 1881 hergestellt.

b) *Zwei unendlich ferne Punkte sind reell und getrennt.* Stud. *Ullmann*, 1881.

Man erkennt das Schneiden der Curve mit den Erzeugenden der einen Schar des Hyperboloides in je 3 Punkten und der anderen Schar in je einem Punkte. Die Curve windet sich schraubenartig im Sinne der letzteren Erzeugenden.

c) *Die 4 unendlich fernen Punkte sind reell und fallen zusammen.* Stud. *Zimmermann*, 1882.

d und e) *Die 4 unendlich fernen Punkte sind reell und getrennt.* Studirender und Assistent *Tesch*, 1892.

d) Die Curve besteht aus 4 Ästen; jeder Ast strebt seinen beiden unendlich fernen Punkten auf den verschiedenen Seiten eines elliptischen Schnittes des Hyperboloides zu.

e) Wie vorher; nur streben zwei Äste ihren unendlich fernen Punkten auf den verschiedenen Seiten jenes elliptischen Schnittes zu, zwei auf derselben Seite. Einer der ersteren Äste zeigt den Verlauf einer Schlangenlinie.

(Chr. Wiener.)

177 **Drei Modelle aus Holzrahmen und Seidenfäden über die Raumcurve 4. Ordnung 2. Art als Schnitt zweier Flächen F und G 2. Grades und deren Imaginärprojectionen in Bezug auf einen Punkt *P*, der eine gemeinsame Polarebene P zu F und G besitzt.** Construirt und ausgeführt im **Seminar für darstellende Geometrie an der technischen Hochschule zu Karlsruhe** unter Leitung von Prof. **Chr. Wiener**.

Unter der Imaginärprojection eines Kegelschnittes k in seiner Ebene (vergl. die angeführte darstellende Geometrie, Bd. 1, S. 315 ff.) in Bezug auf einen Punkt *P* und seine Polare p zu k verstehe ich die Gesamtheit

der Punkte, welche auf Strahlen, die von P ausgehen, in Bezug auf k einander conjugirt und zugleich durch *P* und p harmonisch getrennt sind. Diese Punkte sind reell auf den Strahlen, welche den k imaginär schneiden. Die Imaginärprojection ist wieder ein Kegelschnitt und heisst auch die zu k in Bezug auf *P* und p conjugirte Curve. Ist *P* unendlich fern, so sind jene Punktepaare die ideellen Doppelpunkte der auf den Strahlen gebildeten Involution conjugirter Punkte; ihre Abstände von p, gemessen auf dem Strahle, sind die ihres Faktors i beraubten rein imaginären Coordinaten der Curvenpunkte. Für zwei Kegelschnitte k und l derselben Ebene werden die imaginären Schnittpunkte dargestellt durch ihre Imaginärprojectionen in Bezug auf einen Punkt *P*, welcher dieselbe Gerade p zur Polaren in Bezug auf k und l besitzt, wenn man die Imaginärprojectionen k' und l' von k und l in Bezug auf *P* und p zum Schnitt bringt. Die Strahlen aus *P* durch je 2 solche Schnittpunkte besitzen dann dieselbe Involution conjugirter Punkte zu k und l, oder sie besitzen von beiden Curven ihre gemeinsamen Punkte.

Entsprechend kann man von einer Fläche F 2. Grades die Imaginärprojection F' in Bezug auf einen Punkt *P* und seine Polarebene P bestimmen; sie ist wieder eine Fläche 2. Grades (Bd. 2, S. 89 ff.); und entsprechend die Imaginärprojection der Schnittcurve zweier Flächen F und G 2. Grades in Bezug auf einen Punkt *P* und seine in Bezug auf beide Flächen gemeinsame Polarebene P (Bd. 2, S. 317 ff.). (Solcher Paare *P* und P gibt es 4, welche das den beiden Flächen gemeinsame Polartetraeder bilden.)

a) ***Die beiden Flächen* F *und* G *sind eine Kugel und ein Umdrehungscylinder, der die Kugel berührt und durch ihren Mittelpunkt geht.*** Als Ebene P werde diejenige gewählt, welche durch die die Kugel berührende Erzeugende des Cylinders und durch den Kugelmittelpunkt geht; ihr gemeinsamer Pol *P* zu F und G ist der unendlich ferne Punkt einer auf P senkrechten Geraden. Die Schnittlinie von F und G hat eine lemniskatenartige Gestalt und projicirt sich aus *P* auf P als Stück einer Parabel. Die Imaginärprojectionen von F und G sind bezw. ein gleichseitiges Umdrehungshyperboloid und ein gleichseitiger hyperbolischer Cylinder; ihr Schnitt projicirt sich aus *P* auf P als die Ergänzung jenes Parabelstückes zur ganzen Parabel. Der projicirende Cylinder der Schnittcurve von F und G und ihrer Imaginärprojection ist daher ein voller parabolischer Cylinder.

Das Modell ist von dem Studirenden *Seiffert* (1885) angefertigt. Die Kugel ist aus Parallelkreisen aus Draht vorgestellt.

b) ***Die Flächen* F *und* G *sind eine Kugel und ein mit ihr concentrisches abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, das von der Kugel ganz eingeschlossen wird.*** Die Schnittlinie ist durchaus imaginär. Als P und *P* sind bezw. die Äquatorebene des Ellipsoides und der unendlich ferne Punkt einer auf ihr senkrechten Geraden gewählt. F' und G' sind ein gleichseitiges

und ein ungleichseitiges Umdrehungshyperboloid und ihre Schnittlinie besteht aus zwei gleichen zu P parallelen und symmetrischen Kreisen. Angefertigt von den Studirenden *Häuser* (1886) und *Joos* (1890).

c) *Das Entsprechende, wenn das Ellipsoid excentrisch gegen die Kugel liegt, aber wieder ganz von ihr eingeschlossen wird.* Die Imaginärprojection der imaginären Schnittlinie projicirt sich aus *P* auf P als ein Kreis, dagegen auf eine durch die Mittelpunkte beider Flächen und durch *P* gelegte Ebene senkrecht als zwei Stücke einer Parabel.

Das Modell wurde 1888 begonnen und 1891 von dem Studirenden *Baumann* vollendet.

(Chr. Wiener.)

178 **Sieben Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen der Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species**, construirt (1892) von Prof. **K. Rohn** an der technischen Hochschule zu Dresden. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 231—337 (pag. *50* und *74*). Von den als unvollständiger Schnitt einer Fläche zweiter mit einer Fläche dritter Ordnung darstellbaren Raumcurven sind (durch ihre abwickelbaren Flächen) dargestellt:

231. Raumcurve 4. Ordnung mit 4 reellen Tangenten, die sie noch ausserdem schneiden; sie besitzt keine reellen Punkte mit Wendeebenen und liegt ganz im Endlichen.

232. Raumcurve 4. Ordnung mit 4 reellen Punkten mit Wendeebenen.

233. Raumcurve 4. Ordnung ohne reelle Punkte mit Wendeebenen und ohne reelle, sie schneidende Tangenten.

234. Raumcurve 4. Ordnung mit zwei Streckungspunkten, d. i. Punkten, in denen drei consecutive Curvenpunkte in gerader Linie liegen.

235 und *236.* Raumcurve 4. Ordnung mit zwei reellen Punkten mit Wendeebenen und zwei reellen, sie schneidenden Tangenten.

237. Raumcurve 4. Classe, die aus VI durch reciproke Raumtransformation abgeleitet ist.

179 **Modelle von developpablen Flächen algebraischer Raumcurven.** Fadenmodelle von Prof. **Björling** in Lund, im Verlag der **Gleerup'schen** Universitäts-Buchhandlung in Lund. Ausgestellt vom **Mathem. Institut der technischen Hochschule München**.

Der grössere Teil dieser Flächen wird als osculirende Developpable von bestimmten Raumcurven erhalten, nur zwei derselben Nr. *2* und *6* sind Developpable, die zwei Kreisen umgeschrieben sind, während Nr. *8* eine zwei congruenten Ellipsen in zwei parallelen Ebenen mit zu einander senkrechten Axenrichtungen umschriebene Developpable ist. Man sehe die den Modellen beigegebenen Erläuterungen, in welchen

auch die Charaktere der Flächen angegeben sind. (Vergl. auch Salmon anal. Geom. d. Raumes II. Aufl. pag. 78.)

Von *Björling* rührt noch eine zweite (hier nicht ausgestellte) Serie von Modellen von Raumcurven und Developpablen-Singularitäten her.

1. Developpable einer cubischen Parabel. $x^2 = ay$, $xy = bz$; Gleichung der Fläche:

$$4bx^3z - 3ax^2y^2 - 6abxyz + 4a^3y^3 + ab^2z^2 = 0.$$

2. Abwickelbare Fläche, die zwei Kreisen umbeschrieben ist, die sich in zwei zu einander senkrechten Ebenen befinden und beide die Schnittlinie derselben berühren.

3. Die Rückkehrcurve dieser abwickelbaren Fläche hat die Gleichung $3x^2 + 3y^2 + 2xz = 0$, $z^2 = ax$, ist 4. Ordnung und besitzt einen stationären Punkt und eine stationäre Ebene. Die Doppelcurve ist eine Hyperbel. Gleichung der Fläche

$$x.(9x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xz - ak)^2$$
$$+ 4(3x^2 + 3y^2 + 2xz).(9x^2z + 9y^2z + z^3 + 6xz^2 + axz + 3ax^2 + 3ay^2) = 0.$$

4. Osculirende Developpable der Curve vierter Ordnung $y^2 + z^2 = a^2$, $y^2 = ax$. Letztere besitzt vier stationäre Ebenen und einen im Unendlichen liegenden isolirten Doppelpunkt. Die Doppelcurve besteht aus zwei ebenen Curven dritter Ordnung. Gleichung der Fläche:

$$(xy^2 + xz^2 + az^2 - a^3) = 4y^2(ax + z^2 - a^2)(y^2 + z^2 - a^2).$$

5. Desgl. der Curve vierter Ordnung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$. Die Cuspidalcurve besitzt zwei reelle und zwei imaginäre stationäre Ebenen und einen Doppelpunkt. Die Doppelcurve ist in zwei ebene Curven dritter Ordnung zerfallen. Gleichung der Fläche

$$[(x - a)^3 + xy^2 + (a - 2x)z^2]^2 =$$
$$= 4y^2(ax + z^2 - a^2)[(x - a)^2 + y^2 - z^2].$$

6. Developpable, umgeschrieben zwei Kreisen in senkrechten Ebenen, von welchen der eine die Ebene des andern berührt. Die Rückkehrcurve ist hier sechster Ordnung und besitzt vier reelle stationäre Tangenten, zwei reelle stationäre Punkte und eine Doppelschmiegungsebene. Die Doppelcurve ist vierter Ordnung und besteht aus einem Kreis und einer Parabel.

7. Osculirende Developpable der Curve vierter Ordnung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 30^2, \quad x^2 + y^2 = 31x,$$

welche sechzehn stationäre Tangentialebenen besitzt, wovon vier reell sind. Die Doppelcurve sechzehnter Ordnung zerfällt in vier ebene Curven vierter Ordnung, von welchen zwei reell sind.

8. Developpable, umschrieben zwei congruenten Ellipsen, die in parallelen Ebenen so liegen, dass die grosse Axe der einen parallel der kleinen der andern ist. Die Rückkehrkante ist zwölfter Ordnung und besitzt zwei vierfache Punkte (einen im Unendlichen), vier isolirte Doppelpunkte und vier Spitzen.

(Aus den Erläuterungen von Björling.)

180 Fadenmodell einer developpablen Fläche vierter Ordnung, ausgeführt und ausgestellt von Privatdoc. **J. Keller,** Polytechnicum Zürich.

Ein gerader Kreiskegel, dessen Mittelpunkt F auf der Bildebene liegt, dessen Axe auf dieser senkrecht steht und dessen Erzeugenden mit der Axe Winkel von 45^{0} einschliessen, bildet die Grundlage der Betrachtung. Jede Ebene des Raumes schneidet diesen Kegel in einer Curve 2. Grades, deren Orthogonalprojection auf die Bildebene den Kegelschnittpunkt F zum Brennpunkte, die Spur der Ebene zur entsprechenden Directrix f und die trig. Tangente des Neigungswinkels der Ebene zur Bildebene als numerische Excentricität c besitzt. Die Betrachtungen über Curven 2. Grades auf der Bildebene mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkte (monoconfocale Kegelschnitte) übertragen sich damit auf Fragen über gewisse Lagen von Ebenen im Raume. — (Siehe meine Veröffentlichungen hierüber: „Über monoconfocale Kegelschnitte", 27. Jahrgang, pag. 1—29 und „Orthogonalconjugirte Scharen monoconfocaler Kegelschnitte", 32. Jahrgang, pag. 33—79 der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich.)

Schneide die Ebene E aus unserem Fundamentalkegel den Kegelschnitt K_r, dessen Orthogonalprojection auf die Bildebene K ist, dann entsprechen allen Ebenen des Raumes, welche K_r berühren, Kegelschnitte der Bildebene, welche mit K monoconfocal sind und ihn berühren. Schliessen die Ebenen ausserdem mit der Bildebene einen constanten Winkel φ ein, so kommt den entsprechenden Kegelschnitten auf der Bildebene eine constante num. Excentricität, somit auch ein constantes Axenverhältnis zu. Wenn endlich der Winkel φ übereinstimmt mit dem Winkel α, den die Ebene E selbst mit der Bildebene einschliesst, so besitzen die bezüglichen Kegelschnitte dasselbe Axenverhältnis wie K. Diesen Specialfall illustrirt unser Modell. Für die Ebene E ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$; ihr entspricht auf der Bildebene der Kegelschnitt K von der num. Excentricität $\frac{2}{3}$, also dem Axenverhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{5}$. Die betreffenden Tangentialebenen umhüllen eine developpable Fläche von der Ordnungszahl 4; sie besitzt auf der Ebene (x, z) eine Doppelcurve von der 2. Ordnung und ihr Schnitt mit der Bildebene (x, y) ist eine Curve 4. Ordnung, deren Tangenten die Directricen der bezüglichen Kegelschnitte sind. Man erkennt im Modell auch die Rückkehrcurve der dev. Fläche. Der Ebene E^*, die mit E symmetrisch zur Bildebene liegt, entspricht die symmetrische Fläche F_4^*.

(J. Keller.)

181 **Fünf Fadenmodelle der Typen der Kegel dritter Ordnung**, von Privatdocent **H. Wiener**, Univ. Halle a. S.

Vergleiche hiezu auch die pag. 255 aufgezählten Darstellungen der ebenen Curven dritter Ordnung auf einer Kugel.

182 **Vier einfache Fadenmodelle**, von Privatdocent **H. Wiener**, Univ. Halle a. S.

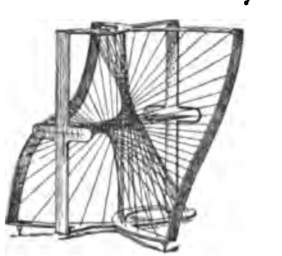
Die Modelle stellen dar:

a) Eine bewegliche Umdreh-Regelfläche mit den beiden Scharen von Erzeugenden.

b) Geradlinige Flächen, die durch eine Raumcurve vierter Ordnung mit (unendlich fernem isolirten) Doppelpunkt hindurchgehen:

1. Das rechtwinklige Paraboloid.
2. Einen Kreiscylinder und 2 parabolische Cylinder.
3. Das Cylindroid.

183 **Vier Fadenmodelle der Regelflächen dritten Grades**, angefertigt im **mathem. Seminar der techn. Hochschule zu Karlsruhe** unter Leitung von Prof. **Chr. Wiener** von stud. techn. **C. Tesch**. Verlag **L. Brill**, Darmstadt.





Specialkatalog 223—226; pag. 44 und 64.

184 **Serie von Regelflächen vierter Ordnung**, construirt von Prof. **K. Rohn**, techn. Hochschule Dresden. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.



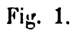


Fig. 1.



Fig. 2.

Specialkatalog 163—172: pag. 27 und 68. Man vergl. hier den Aufsatz von *Rohn*: *„Über die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung“*. Math. Ann. Bd. 28, sowie die der Modellserie beigegebene Abhandlung.

Die Modelle gliedern sich nach der Einteilung der Regelflächen in:

1. Flächen mit zwei Doppelgeraden (Nr. *163—167*).
2. Flächen mit Doppelgerade und Doppelkegelschnitt (Nr. *170*).
3. Flächen mit Doppelcurve dritter Ordnung (Nr. *171*, *172*).
4. Flächen mit einer dreifachen Geraden (Nr. *168*, *169*).

185 **Windschiefe Fläche 4. Ordnung mit einer Doppelgeraden und einem geraden Leitkegel.** Fadenmodell, ausgeführt (1881) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**) von stud. **S. Finsterwalder.**

Es ist ein spiegelnder Kreis-Cylinder und eine durch die Axe gehende leuchtende Linie gegeben. Denkt man sich die Linie an den einzelnen Tangentialebenen des Cylinders gespiegelt, so entsteht die modellirte Fläche aus den Spiegelbildern. Die leuchtende Gerade wird Doppellinie, welche in den Schnittpunkten mit dem Cylinder Pinchpoints hat.

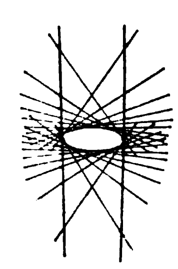
186 **Fünf bewegliche Modelle aus Stahlstäben für den Unterricht in synthetischer und darstellender Geometrie,** von Prof. **F. Buka**, techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg, angefertigt und ausgestellt von **Winckelmann & Söhne**, Verlagsbuchhandlung, Berlin.

Die Construction der Modelle schliesst sich möglichst eng der Methode der synthetischen Geometrie an. Die Träger von Punktreihen I. Ordnung sind durch Eisenstäbe, solche II. Ordnung durch Messingreifen ersetzt; die Punkte der Punktreihen werden durch kleine Messingringe vertreten, welche an den bestimmten Stellen freibeweglich an die Träger angeschlossen sind. Je zwei homologe Punkte werden durch einen dünnen Stahlstab verbunden. Sind auf diese Weise möglichst einfache Gebilde erzeugt — etwa aus projectiv gleichen Punktreihen Parallelstrahlenbüschel — so sieht man aus ihnen bei stetiger Veränderung der relativen Lage der Leitgebilde die allgemeinen Formen — im erwähnten Falle Parabeln und Paraboloide — entstehen.

Modell I. Zwei projectiv gleiche Punktreihen I. Ordnung mit den Verbindungslinien homologer Punkte zeigen den stetigen Übergang aus Parallelstrahlenbüscheln in Parabeln, hyperbolische Paraboloide und gewöhnliche Strahlenbüschel. Durch Combination des Modelles mit einem gleichartigen wird ein Rhombus mit zwei zu seinen Seiten parallelen Scharen Gerader hergestellt und derselbe durch stetige Bewegung in Parabeln und Paraboloide mit beiden Scharen Gerader — darunter gleichseitige — übergeführt.

Modell II. Mit Hilfe zweier projectiven Punktreihen I. Ordnung und der Verbindungslinien homologer Punkte erhält man in continuirlicher

Folge Strahlenbüschel I. Ordnung, Ellipsen (darunter den Kreis), einmantelige Hyperboloide und Hyperbeln.



Modell III. Eine Punktreihe I. und eine zu ihr projective II. Ordnung (Kreis) zeigen — zum Teil in stetiger Folge — verschiedene prägnante Formen der 3 Typen geradliniger Flächen III. Ordnung (mit ihren Doppelgeraden) und den Übergang derselben in solche II. Ordnung.

Modell IV. Zwei projectiv gleiche und gleich grosse Kreise zeigen, je nachdem sie behufs Verbindung homologer Punkte gleichstimmig oder ungleichstimmig in parallele Ebenen gelegt worden, durch stetige Bewegung

1. den Übergang aus dem Parallelstrahlenbüschel in elliptische Cylinder, Rotationscylinder, in Rotations- und allgemeine Hyperboloide und Kegel, sowie in verschiedene Flächen IV. Ordnung
2. den Übergang aus dem Parallelstrahlenbüschel in das geradlinige Kreisconoid und verschiedene andere Arten geradliniger Flächen IV. Ordnung mit Doppelcurven, endlich in eine dem Plücker'schen Conoid verwandte Flächenfamilie III. Ordnung.

Aus dem Modell lassen sich auch Hyperboloide mit beiden Scharen Gerader herstellen.

Modell V. Mit Hilfe einer Schraubenlinie von ca. 4 Umgängen können die verschiedensten Arten rechts und links geschränkter windschiefer (darunter axialer) Schraubenflächen, ihre Selbstschnitte, ihr Schnitt mit einer zur Axe normalen Ebene, der Schnitt zweier Schraubenflächen von gleicher Axe etc. gezeigt werden. — Die axialen Schraubenflächen lassen sich durch stetigen Übergang in einander überführen.

Zur bequemen Handhabung der Modelle I—IV und zur Fixirung der erzeugten Flächen und Curven dient ein mit 2 verschiebbaren Kugelgelenken versehenes Stativ.

Sämtliche Modelle bestehen in allen ihren Teilen nur aus Metall und sind in solchem Masstabe angefertigt, dass die erzeugten Gebilde selbst in grösseren Auditorien von den Zuhörenden schon während des Vortrages deutlich gesehen werden können.

(Buka.)

Preis der ganzen Serie mit Stativ 200 *M.* Bei Einzel-Bezug kostet Modell Nr. I (Doppelmodell) 40 *M.*, Nr. II 25 *M.*, Nr. III 30 *M.*, Nr. IV 35 *M.*, Nr. V 60 *M.* und das Stativ 30 *M.*

187 Schraubenlinie mit ihrer abwickelbaren Fläche, ausgeführt 1892 von Stud. **K. Fischer**, im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Dyck.**)

Das Modell dient zur Demonstration der Lage des auf die Curve bezüglichen Coordinatensystems.

188 **Drei Fadenmodelle der Regelschraubenflächen.** Im **Seminar für darstellende Geometrie an der techn. Hochschule zu Karlsruhe** unter Leitung von Prof. **Chr. Wiener** ausgeführt von Assistent **C. Tesch.** Verlag von **L. Brill,** Darmstadt.

Specialkatalog 227—230 pag. *48* und *73.*

Die Regelschraubenflächen entstehen dadurch, dass eine Gerade sich längs einer Schraubenlinie so bewegt, dass sie stets denselben Winkel mit der Normalebene auf die Axe der Schraubenlinie einschliesst. Je nachdem dieser Winkel gleich, kleiner oder grösser ist als der von der Tangente an die Schraubenlinie mit jener Normalebene gebildete, erhält man die drei in Nr. *227* und *228; 229, 230* dargestellten Fälle.

---

189 **Sechs Modelle zur Analysis situs von Raumcurven.** Von Privatdocent **H. Brunn,** Univ. München.

Die Modelle beziehen sich auf eine in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften zu München, Jahrg. 1892, Heft I veröffentlichte Arbeit „Über Verkettung", und stimmen bis auf das Schnüremodell überein mit Figuren desselben.

Eine Anzahl geschlossener, verschlungener Curven oder „Ringe" bildet eine „Kette". Die Anzahl der Querschnitte an verschiedenen Ringen, welche mindestens, bezw. höchstens nötig ist, um sämtliche Glieder der Kette von einander zu trennen, heisse ihre Minimal-, bezw. Maximal-Zerschneidungszahl.

Die Modelle No. 2, 3, 4, 5 sind Ketten, für welche diese charakteristischen Zahlen gleich der Einheit sind. Es lässt sich kein Glied in diesen Ketten aufschneiden oder hinwegdenken, ohne dass dieselben vollständig zerfallen. Es sind Ketten „ohne Unterketten". Durch Modell Nr. 5 ist ersichtlich, dass solche Ketten ohne Unterketten mit beliebig grosser Gliederzahl gebildet werden können. Modell Nr. 1 dagegen ist eine Kette, für welche die Zerschneidungszahlen gleich zwei sind. Wenn man einen Ring A aufschneidet, so hängen die beiden andern immer noch zusammen, und bilden somit eine Unterkette der ursprünglichen Kette. Die Modelle Nr. 1 und 2 sind bereits bei Tait (Vergl. am oben ang. Ort Nr. 2) in etwas anderem Zusammenhange erwähnt. Das Schnüremodell Nr. 6 endlich soll bequem die Bildung und Auflösung beliebiger Ketten ermöglichen. Das Aufhaken, bezw. Zuhaken einer Schnur entspricht der Ausführung, bezw. Aufhebung eines Schnittes. Ein hübsches Experiment ist es, mittels dieser Schnüre das im II. Teil des erwähnten Aufsatzes geschilderte specielle Verfahren der Bildung von Ketten ohne Unterketten darzustellen und den Zerfall der ganzen Kette durch Aufhaken eines ganz beliebigen Ringes herbeizuführen.

Die Zerschneidungszahlen finden praktische Anwendung z. B. bei der Frage, wie viele Glieder einer Metallkette von gegebener Form mindestens geschweisst oder gelötet werden müssen.

(H. Brunn.)

O. Modelle zur Liniengeometrie.

Brennlinien; Strahlensysteme, Brennflächen, Centraflächen; Complexe.

190 Brennlinien, entstanden durch Reflexion bezw. Brechung der von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen an einem Kreise. 6 Blatt Zeichnungen von stud. math. **S. Finsterwalder** (1881—82). **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**).

Die ersten 3 Blätter beziehen sich auf die Reflexion bei verschiedener Entfernung des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt. Die Brennlinien sind als Evoluten Pascal'scher Schneckenlinien (secundäre Brennlinien, Linien gleicher Phase der Lichtbewegung) construirt. In den Fällen, wo die Entfernung ∞, oder gleich dem Radius ist, werden die Brennlinien Epicykloiden. Die einfallenden Strahlen sind nach gleichen Winkelabständen geordnet, so dass die Dichtigkeit der reflectirten Strahlen ein Mass der Helligkeit abgibt.

Die drei letzten Blätter beziehen sich auf die Brechung. Der Brechungsindex ist zu $\frac{3}{2}$ angenommen. Jedem einfallenden Strahl entsprechen geometrisch 2 gebrochene Strahlen, unter gleichem Winkel zur Normalen liegend, von denen der eine physikalisch mögliche schwarz, der andere nach Cayley sog. falschgebrochene rot gezeichnet ist. Die grünen Kreise sind Huyghens'sche Elementarwellen, deren Enveloppe die secundäre Brennlinie (hier ein Cassinisches Oval) liefert. Besonders bemerkenswert ist der in Fig. V dargestellte Fall, wo der leuchtende Punkt in einem der sog. „aplanatischen" Punkte der Kugel liegt, und die falsch gebrochenen Strahlen sich dann in dem conjugirten aplanatischen Punkte schneiden. Da bei der Umkehr der Bewegungsrichtung im einfallenden Strahl der falsch- und richtig gebrochene Strahl die Rolle vertauschen, so folgt hieraus der praktisch wichtige Satz, dass Strahlen, die auf einen Punkt zulaufen durch eine passend gewählte Kugellinse „in aller Strenge" in einem andern Punkte vereinigt werden, unabhängig von der Apertur der Linse. (Vgl. Cayley's „Memoir upon Caustics" Phil. Trans. of th. London S. Bd. 147).

(S. Finsterwalder.)

191 **Modell einer speciellen Fläche zwölfter Ordnung,** angefertigt im **Math. Institut der technischen Hochschule München** (Prof. **Brill**) von stud. math. **Finsterwalder** (1882). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

(*Specialkatalog 79*; pag. *17* und *70.*)

Die Fläche entsteht durch Aufeinanderschichten der verschiedenen Katakaustiken eines Kreises, wobei die Kreise einen geraden Cylinder, die leuchtenden Punkte eine seine Axe unter 45° schneidende Linie bilden.

Vergl. hiezu noch die unter Nr. 274 aufgeführten Wandtafeln für den math.-optischen Unterricht von *Füchtbauer*.

---

192 **Drei Arten unendlich dünner Strahlenbündel** von Prof. **E. Kummer** in Berlin, ausgeführt von **W. Apel**, Universitätsmechaniker in Göttingen. Verkaufspreis 50 M.

Diese Modelle illustriren das Verhalten aller zu einander unendlich benachbarten Strahlen eines beliebigen Strahlensystems. Wie Kummer im Anschluss an Hamiltons Untersuchungen im 57. Bd. des Crelle'schen Journales gezeigt hat, existirt auf jedem Strahl eines Systems ein stets reeller Mittelpunkt und zwei reelle oder conjugirt imaginäre Brennpunkte in gleicher Entfernung von demselben. Sind erstere reell, so kann man alle zu dem Strahle benachbarten als durch zwei zu dem Ausgangsstrahl in den Brennpunkten senkrecht stehende, unendlich kurze Brennlinien gehend annehmen. In dem Falle, wo das Strahlensystem aus den Normalen zu einer Fläche gebildet wird, haben diese Brennlinien noch die specielle Eigenschaft, dass die durch sie und den Ausgangsstrahl gelegten Ebenen, die Brennebenen des Ausgangsstrahls, senkrecht zu einander stehen.

In den Modellen sind nun zur Darstellung der Verhältnisse von den doppelt unendlich vielen zu einem Strahl benachbarten Strahlen diejenigen herausgegriffen, welche durch eine kleine geschlossene Curve um den Ausgangsstrahl (hier speciell ein kleiner Kreis auf der Deckfläche des Modells) gehen. Diese bilden dann eine windschiefe Begrenzungsfläche des unendlich dünnen Strahlenbündels. Im Falle reeller Brennpunkte hat diese Fläche Doppelgerade. Für Normalensysteme stehen diese ausserdem senkrecht zu einander. Bei imaginären Brennpunkten werden auch die Doppelgeraden imaginär und die Begrenzungsflächen erhalten eine hyperboloidische Gestalt. In diesem Falle kann man auch von einem Drehsinn der Nachbarstrahlen gegen den Ausgangsstrahl reden. Die drei Modelle stellen neben den Grenzfällen (Kegel und Cylinder) alle mathematisch möglichen unendlich dünnen Strahlenbündel dar.

(Finsterwalder.)

193 Lineares Strahlensystem (Congruenz) mit conjugirt imaginären Leitlinien und

194 Lineares Strahlensystem (Congruenz) mit zusammenfallenden Leitlinien, ausgeführt 1877 von stud. math. **K. Rohn** (nunmehr Professor in Dresden) im **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Im erstgenannten Modell sind die Strahlen einesteils nach Erzeugenden einer Schar von Hyperboloiden, andernteils nach solchen von Paraboloiden geordnet.

Im zweiten Modell sind die Strahlen nach Büscheln geordnet, deren Ebenen durch die Leitlinie gehen, während die Mittelpunkte auf derselben liegen. Die Reihe der Mittelpunkte auf der Leitlinie ist projectivisch zum Büschel der Ebenen.

195 Strahlensystem 5. Ordnung, entstanden durch Brechung eines excentrisch gelegenen Strahlenbündels in einem centrirten Linsensystem. Nach Angabe von Prof. **S. Finsterwalder** ausgeführt von Assistent **G. Diem. Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Ein leuchtender Punkt befinde sich ausserhalb der Axe eines centrirten Linsensystems, aber noch in einer so geringen Entfernung von derselben, dass die von ihm in das Linsensystem gelangenden Strahlen als wenig geneigt gegen die Axen angesehen werden können. Ausserdem sei die Öffnung des Linsensystems klein im Verhältnis zu den Radien der Linsen. In erster Annäherung werden sich dann die gebrochenen Strahlen in einem Bildpunkte schneiden. Dabei werden die cos. der Winkel der Strahlen gegen die Axen gleich 1, die sin. den Winkeln gleich gesetzt. In zweiter Annäherung kann man die Potenzen jener Winkel bis zur fünften excl. berücksichtigen und erhält dann die Abweichung der gebrochenen Strahlen von dem gemeinsamen Schnittpunkt. Die Theorie zeigt, dass innerhalb dieser Näherung der Charakter dieser Abweichung ganz unabhängig von der Complication des Linsensystems ist und die gebrochenen Strahlen immer durch ein zu 2 Ebenen symmetrisch gelagertes Strahlensystem 5. Ordnung dargestellt werden können. Dasselbe steht in naher Verwandtschaft mit dem Normalensystem der Flächen 2. Ordnung. Seine Brennfläche ist bis auf eine homogene Deformation identisch mit der eines elliptischen Paraboloides. Dieselbe wurde zuerst von R. Hamilton entdeckt und beschrieben, doch in so knapper Kürze, dass die Untersuchung, über die nur ein Referat an die Öffentlichkeit kam, ganz in Vergessenheit geriet. (Reports of the B. Association 1834.)

Erst im Jahre 1867 hat *L. Seidel**) die allgemeine Form der Gleichung der Fläche gegeben, ebenfalls ohne die Ableitung zu publicieren. Nach

*) Sitzungsber. der K. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1867. Schon 1857 hatte L. Seidel eine Beschreibung der Fläche ohne Formeln gegeben. Gelehrte Anzeigen der k. bayr. Akademie der Wiss. 1857.

dieser Gleichung hat stud. math. *L. Schleiermacher* (jetzt Professor in Aschaffenburg) ein Gipsmodell der Brennfläche hergestellt, das zum Vergleiche mit ausgestellt ist. Die vollständige Ableitung der Gleichung aus den von Seidel aufgestellten dioptrischen Näherungsformeln gab 1890 *S. Finsterwalder* in den Abhandlungen der bayer. Akad. II. Cl. XVII. Bd. III. Abt. 1891.

Bezüglich der Ausführung des Modelles ist zu bemerken, dass die Strahlen nach windschiefen Flächen 4. Ordnung angeordnet sind, welche einfallenden Strahlen entsprechen, die durch die Ränder verschieden grosser concentrischer Blenden hindurchgehen. Dabei ist die Ebene der Blenden so gewählt, dass die windschiefen Flächen nach 2 Ebenen symmetrisch werden und elliptische Querschnitte haben. Je näher die einfallenden Strahlen an der Blendenmitte sind, um so hellgelber ist die Farbe der Fäden, welche die gebrochenen Strahlen im Modelle darstellen. Gegen die Randstrahlen zu wird der Ton immer rötlicher.

Bezüglich der Dimensionen des Modells im Verhältnis zur Wirklichkeit sei bemerkt, dass beispielsweise ein besseres Fernrohrobjectiv einige Kilometer Brennweite besitzen müsste, bis die Brennfläche am Rande des Gesichtsfeldes Querdimensionen von der Art des Modelles erhielte.

(Finsterwalder).

196 **Brennfläche, welche von einem zur Axe wenig geneigten Parallelstrahlensystem nach dessen Durchgang durch ein centrirtes Linsensystem eingehüllt wird.** Ausgeführt im **Math. Institut der techn. Hochschule München.** (Prof. **Brill**) von stud. **L. Schleiermacher**, Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

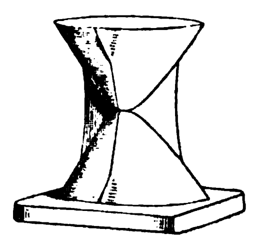
Specialkatalog 149—151 (pag. 3 u. 86).

(Vgl. Seidel, Schumachers Astron. Nachrichten, Nr. 1027 ff., Monatsberichte der Berliner Akademie, Dec. 1872. Finsterwalder, Abh. der bayer. Akad. von 1891.) Die Fläche ist von der 9. Ord. Vergl. hiezu noch das unter Nr. 195 ausgestellte Fadenmodell von Prof. Finsterwalder.

197 **Centrafläche des dreiaxigen Ellipsoids,** ausgeführt (1862) von stud. **H. A. Schwarz** (jetzt Prof., Univ. Berlin); vervielfältigt von Bildhauer **Lehde** in Berlin. Ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Man sehe hiezu den Bericht von *Kummer* „Über ein Modell der Krümmungsmittelpunktsfläche des dreiaxigen Ellipsoids“ in den Monatsberichten der k. pr. Akademie d. W., 1862, pag. 426; ferner den Aufsatz von *Cayley* „On the Centro Surface of an Ellipsoid“, Transactions of the Cambridge Philos. Soc., Bd. 12.

198 **Centralfläche des einschaligen Hyperboloids.** Ausgeführt (1877) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von stud. **W. Dyck.** Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.



Specialkatalog 152—154. (pag. 3 u. 86.) Die Fläche ist 12. Ordnung. Bez. weiterer Angaben vergl. die beigegebene Abhandlung.

199 **Cylindroid** von Prof. **Rob. S. Ball**, L. L. D., F. R. S., Univ. Dublin. Ausgestellt von der **London Mathematical Society.**

Diese Fläche, deren Gleichung $z(x^2 + y^2) = 2mxy$ wurde von Plücker im Zusammenhang mit der Theorie des linearen Complexes behandelt. Wegen ihrer kinematischen und physikalischen Bedeutung sehe man „Theory of Screws" von R. S. Ball, Dublin 1876.

200 **Cylindroid mit Complexcurven**, ausgeführt (1891) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Finsterwalder**) von Assistent **G. Diem.**

Jeder Complex ersten Grades von Geraden ist bestimmt durch seine Axe und eine Constante k. (Die Gleichung des Complexes sei in der einfachsten Form $p_{12} + k\,p_{34} = o$). Die Axen der Complexe eines Büschels sind alle einer Ebene parallel und erfüllen ein Cylindroid. Die auf der Fläche gezeichneten Geraden stellen solche Axen dar. Trägt man auf jeder Axe, von ihrem Schnittpunkt mit der Doppelgeraden des Cylindroids aus den Wert von k, der dem betreffenden Complex des Büschels zukommt, ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine sogenannte Complexcurve. Variirt man auf der Fläche die Directricen des Büschels, so erhält man dadurch andere Werte von k, und somit andere Complexcurven.

(Diem.)

201 **Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades.** Von Prof. **F. Klein**, jetzt Univ. Göttingen.

Bekanntlich hat *Plücker* in den letzten Jahren seines Lebens bei seinem Studium der Liniencomplexe zweiten Grades zahlreiche auf deren Theorie bezügliche Modelle anfertigen lassen. Das allgemeine Interesse an den wirklichen Gestalten auch complicirterer Flächen war ihm aus

seiner physikalischen Beschäftigung erwachsen*); die nähere Gliederung seiner Ansätze habe ich hernach, so gut das unter Benutzung des Nachlasses gelingen wollte, in der 1869 erschienenen zweiten Abteilung der „Neuen Geometrie des Raumes" zur Darstellung gebracht. Die so auf Plücker selbst zurückgehenden Modelle bildeten indess keine vollständige Serie, waren auch im einzelnen ungleichwertig, und es lag gewiss nicht im Sinne ihres Urhebers, wenn dieselben später trotzdem verschiedentlich als zusammengehörige Collection verbreitet worden sind. Ich habe deshalb im Herbst 1871, um das Wesentliche der Sache herauszuheben, von mir aus 4 neue Modelle der hauptsächlichen in Betracht kommenden Flächentypen veröffentlicht, wobei ich die Verhältnisse so wählte, dass die jedesmal in Betracht kommenden singulären Punkte und Ebenen sämtlich reell ausfielen. Von diesen Modellen repräsentirt:

Nr. 1. die allgemeine Kummer'sche Fläche (die Singularitätenfläche der Complexe zweiten Grades) mit 16 Doppelpunkten und 16 Doppelebenen,

Nr. 2. die allgemeine Complexfläche, d. h. die Kummer'sche Fläche mit Doppelgerade und noch 8 Doppelpunkten und 8 Doppelebenen,

Nr. 3. die besondere Complexfläche, deren Leitlinie eine Complexgerade ist (mit Rückkehrgerade und noch 4 Doppelpunkten bezw. Doppelebenen),

Nr. 4. diejenige Complexfläche, deren Leitlinie eine singuläre Linie des Complexes ist (mit Selbstberührungsgerade und noch 2 Doppelpunkten bezw. Doppelebenen).

Besagte Modelle können ja auch noch heute beim Studium der Liniengeometrie wie überhaupt als Beispiele von Flächen höherer Ordnung interessiren, wenn sie leider auch von dem Mechaniker nicht so sorgfältig ausgeführt worden sind, als dies wünschenswert gewesen wäre. Aber man muss zufügen, dass man inzwischen gelernt hat, die bei diesen Flächen vorkommenden Gestalten sehr viel vollkommener zu beherrschen, als dies durch einzelne nach irgend welchem Princip herausgegriffene Beispiele geschieht. Ich habe 1877 in einem Vortrage vor der Münchener Naturforscherversammlung darauf hingewiesen, dass sich die sämtlichen hier in Betracht kommenden Flächenformen aus einander durch Continuität ableiten lassen. Dieser Satz ist dann 1881 durch *Rohn* (in Bd. 18 der Mathematischen Annalen) auf eine besonders einfache Aussage zurückgebracht worden. Man erzeugt nämlich alle hier möglichen Gestalten in übersichtlicher Weise von den Flächen zweiten Grades aus. Man hat einfach auf irgendwelcher Fläche zweiten Grades nach Belieben 4 Er-

*) Plücker selbst erzählte mir einmal, dass er namentlich durch den Verkehr mit *Faraday* dazu angeregt worden sei; dieser selbst habe die Modellconstruction als Mittel benutzt, um sich als Nichtmathematiker die ihm jeweils notwendigen mathematischen Formeln verständlich zu machen.

zeugende der einen Art und 4 Erzeugende der anderen Art zu ziehen, und nun die Felder, in welche die Fläche dabei zerlegt wird, abwechselnd doppelt zu überdecken, bezw. freizulassen. Die verschiedenen, zu unterscheidenden gestaltlichen Möglichkeiten entstehen dabei, je nachdem man diese 2mal 4 geraden Linien reell oder imaginär oder auch zum Teil zusammenfallend wählen will. Insbesondere entsteht die „Complexfläche“ mit ihren beiden oben angeführten Specialisationen, wenn man 2, bezw. 3 oder alle 4 Erzeugenden der einen Art zusammenfallen lässt. Dies setzt natürlich voraus, dass die Erzeugendensysteme als solche reell sind, dass man also auf einer geradlinigen Fläche zweiten Grades operirt. Besonders schön ist übrigens gerade der Fall, wo eine nichtgeradlinige Fläche zweiten Grades vorgegeben ist, auf der natürlich nur zwei conjugirt imaginäre Quadrupel von Erzeugenden angenommen werden können, die sich in 4 reellen Punkten der Fläche durchsetzen. Da hat man dann entweder die ganze Fläche verschwinden zu lassen, worauf man nur 4 isolirte Punkte übrig behält, oder die ganze Fläche doppelt zu überdecken, was zwei in einander gekapselte Mäntel ergibt, die in den 4 Punkten als Doppelpunkten zusammenhängen, womit man den von der Fresnel'schen Fläche her bekannten Typus erhält.

(F. Klein.)

P. Modelle und Zeichnungen zur Krümmungstheorie.

Allgemeines; Confocale Flächen zweiter Ordnung; Krümmungslinien.

202 **Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden** von Geh. Rat Prof. **Kummer**, Univ. Berlin. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 76; pag 19 und *69.*

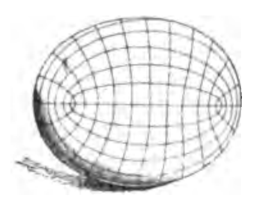
Die Fläche ist nach einem in Besitz des math. Seminars der Universität Berlin befindlichen Originale hergestellt. Sie stellt den geometrischen Ort der Krümmungskreise aller Normalschnitte in einem gewöhnlichen Punkte positiver Krümmung einer Fläche dar. Sie bildet gleichzeitig das einfachste Beispiel einer im endlichen geschlossenen sog. „Doppelfläche“ (Fläche mit umkehrbarer Indicatrix).

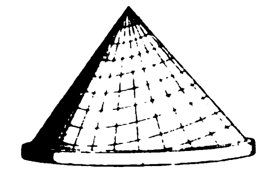
203 **Serie von Flächen zweiter Ordnung mit den Krümmungslinien.** Ausgeführt 1878 im **Math. Institut der techn. Hochschule München**, unter Leitung von Prof. **A. Brill**, von stud. **R. Diesel**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 95—101 (pag. 7 und 75).

95, 96. Zwei Ellipsoide.

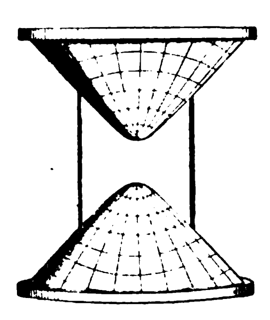
97. Einschaliges Hyperboloid.

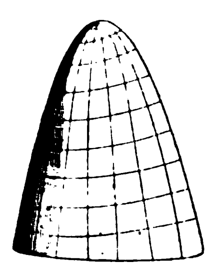




98. Elliptischer Kegel.

99. Zweischaliges Hyperboloid.





100. Elliptisches Paraboloid.

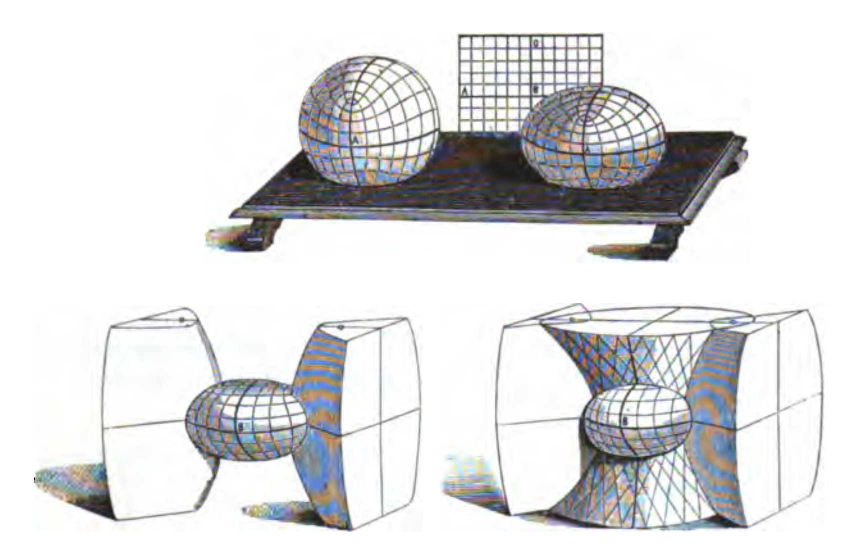
101. Hyperbolisches Paraboloid je mit den Krümmungslinien.

204 **Modelle zur Lehre von den confocalen Flächen zweiten Grades**, zum Teil ausgeführt von Prof. **E. R. Neovius**, a. d. Univ. Helsingfors (1885), zum Teil (1887) ausgeführt im **Math. Seminar der Univ. Göttingen** unter Leitung von Prof. **H. A. Schwarz** von stud. **R. Haussner**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 188—196 (pag. 35 und 76).

188—190. Krümmungslinien des Ellipsoids; conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Kugel. Die Einteilung des Ellipsoids durch die aufgezeichneten 18 Krümmungslinien ist so getroffen, dass die auf der Fläche entstehenden Vierecke Quadraten möglichst nahe kommen. Die Forderung ist durch die conforme Abbildung des Ellipsoids auf ein ebenes Rechteck präcisirt, in welchem diese Vierecke in Quadrate übergehen. Die Nabelpunkte des Ellipsoids entsprechen dabei den Eckpunkten dieses Rechtecks. Modell *190* stellt die conforme Abbildung auf der Kugel dar, bei welcher den drei Hauptschnitten des Ellipsoids drei grösste Kreise der Kugel entsprechen.

191—196. Die zum Ellipsoid gehörigen confocalen (ein- und zweischaligen) Hyperboloide, in den verschiedenen Combinationen mit dem Ellipsoid, zur Veranschaulichung der gegenseitigen Lage der confocalen Flächen. Auf den Hyperboloiden sind Krümmungslinien *nicht* aufgezeichnet, weil eine *anschliessende* Fortsetzung der auf dem Ellipsoid getroffenen Verteilung der Krümmungslinien auf die Hyperboloide *nicht möglich* ist, wie sich direct aus dem Umstande folgern lässt, dass die Möglichkeit einer derartigen Fortsetzung die (unmögliche) Einteilung



des Raumes in kleinste Würfel mit Hilfe der confocalen Flächen 2. Grades mit sich bringen würde. Die auf dem einschaligen Hyperboloid aufgetragenen zwei Scharen von Erzeugenden bezeichnen je zu zweien die Brennstrahlen des Kegels, welcher von ihrem Schnittpunkt an das Ellipsoid berührend gelegt ist.

Bezüglich der weiteren Beziehungen dieser Modelle zur oben berührten Frage der conformen Abbildung vergl. man Neovius „Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf eine die Krümmungslinien des Ellipsoids betr. Aufgabe", Acta Soc. Fennicae, Bd. 15, 1885.

(Dyck.)

205 Fläche, auf welche das Ellipsoid durch parallele Normalen conform abgebildet wird. Im **Mathematischen Seminar der Universität Göttingen**, unter Leitung von Prof. **Schwarz**, ausgeführt von **K. Reinbeck** in Einbeck. Verlag **L. Brill**, Darmstadt.

Die Fläche wird durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate geteilt. Mit Hilfe des Modells lässt sich eine Vorstellung

gewinnen von der Gestalt derjenigen Flächen, auf welche die übrigen Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden.

206 **Zwei Modelle zu Staude's Fadenconstruction des Ellipsoids aus zwei confocalen Flächen zweiten Grades bezw. den zwei Focalcurven des confocalen Systems.** Construirt (1884) von **O. Staude** (jetzt Prof., Univ. Rostock). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 109, 110 pag. *21* und *78*.

Vergl. die den Modellen beigegebene Abhandlung, sowie den Aufsatz von Staude Math. Annalen Bd. 20.

207 **Röhrenschraubenfläche mit Krümmungslinien,** ausgeführt 1882 im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**) von Assistent **Th. Kuen.** Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Die Fläche ist die Enveloppe aller Kugeln von constantem Radius, deren Centra auf einer Schraubenlinie liegen. Das eine System der Krümmungslinien besteht aus den zur mittleren Schraubenlinien senkrechten Kreisen, das andere aus transcendenten Curven (weiss), die jedoch nicht Schraubenlinien wie die blau gezeichneten sind. Das Problem führt auf Kreisfunctionen, die Asymptotencurven führen dagegen auf elliptische Functionen.

Siehe bez. der Krümmungslinien auch noch die unter No. 231 aufgeführten Zeichnungen von *Finsterwalder*.

Asymptotencurven.

208 **Serie von 12 Modellen verschiedener Rotationsflächen mit aufgezeichneten Asymptotencurven.** Ausgeführt (1885) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von studd. **Herting** (Nr *113--123*) und **Sievert** (Nr. *124*). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 113—124 (pag. *21* und *78*).

Dargestellt sind folgende Fälle:

	Meridiancurve der Rotationsfläche:	Projection der Asymptotencurven in Polarcoordinaten:
113.	$r = z^2;$	$\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \log r$
114.	$27 r = z^3;$	$\varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \log r$
115.	$z r^2 = 8;$	$\varphi = \sqrt{3} \log r$
116.	$z r = 6;$	$\varphi = \sqrt{2} \log r$

117. $z = 6 \log r;$ $\varphi = \log r$

118. $25\, r^2 = z^3;$ $\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \log r$

119. $z = \alpha \sqrt{r - a};$ $\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \log [2 (r + \sqrt{r (r - a)}) - a]$

120. $z = \alpha (r - a)^{\frac{1}{3}};$ $\varphi = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \log [2 (r + \sqrt{r (r - a)}) - a]$

121. $z = \alpha (r - a)^{\frac{2}{3}};$ $\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \log [2 (r + \sqrt{r (r - a)}) - a]$

122. $z = \alpha (r - a)^2;$ $r = a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$

123. $z = \frac{1}{c}\left[r \sqrt{d^2 - r^2} - d^2 \arccos \frac{r}{d} \right];$ $\varphi = \arccos \frac{r}{d}$

124. $z = \cos r;$ $\varphi = \int \sqrt{\frac{- \operatorname{cotg} r}{r}}\, dr.$

Näheres vergl. die den Modellen beigegebene Abhandlung.

209 **Die Projectionen der ebengenannten Asymptotencurven der Rotationsflächen in Richtung der Rotationsaxe.** Zwölf Blätter Zeichnungen, ausgeführt (1885) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von studd. math. **Herting** und **Sievert.**

210 **Asymptotencurven der Steiner'schen Fläche,** von Prof. **K. Fink** in Tübingen. **Math. Seminar der Univ. Tübingen** (Prof. **Brill**).

Die Curven sind, wie Clebsch (Crelle, Band 67) gezeigt hat, Raumcurven 4. Ordnung 2. Species, die jeden der 4 Kegelschnitte berühren, in welche die parabolische Curve zerfällt. Sie stellen auf dem vorliegenden Modell der Fläche (Nr. *71* des Brill'schen Verlags, auf Veranlassung von Prof. Kummer in Berlin construirt) sich als geschlossene Curven dar, die ungefähr die Gestalt eines windschiefen Vierecks mit abgerundeten Ecken besitzen.

Durch eine Collineation geht die Gleichung jener Fläche in die Form über:

$$zxy = Ax^2y^2 + Bx^2 + Cy^2,$$

für welche sich die Differentialgleichung der Projection der Curven auf die xy-Ebene leicht integrirt.

(A. Brill.)

211 **Fläche dritter Ordnung, vierter Classe, mit vier reellen conischen Knoten, auf welche eine Asymptotencurve aufgezeichnet ist.** Ausgeführt 1877 im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **F. Klein**), von stud. **Bacharach.**

Specialkatalog 125 (pag. *5* und *79*).

Die Asymptotencurven dieser Fläche sind (vergl. Clebsch, Crelle's J. Bd. 67) Raumcurven 6. Ordnung 4. Classe.

212 **Zwei bohnenförmige Körper zur versuchsweisen Bestimmung der parabolischen Curve, der Krümmungs- und Asymptotenlinien**, angegeben von Prof. **A. Brill**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Auf dem negativ gekrümmten Teil dieser Fläche, welcher einfach zusammenhängend ist, verlaufen die Asymptotencurven zickzackförmig, mit Spitzen auf der parabolischen Curve aufstehend; dabei treten jedenfalls zwei wesentlich singuläre Punkte derselben auf, von der unter Nr. 232 dieses Katalogs gekennzeichneten Art.

---

213 **Zwei bewegliche Flächennetze zur Darstellung von Systemen „äquidistanter Curven“ auf beliebigen Flächen.** Ausgeführt (1892) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Dyck**).

Hiezu beigegeben verschiedene Flächen zweiter Ordnung aus Gips und Holz (zum Teil aus der Collection *Delagrave*, vergl. No. 128), sowie zwei grosse Tractrixflächen).

Die beiden Netze sind aus gleichlangen Messingröhrchen, durch welche Fäden gezogen und geknüpft sind, hergestellt und innerhalb der Grenzen des Materials um die Vereinigungsstellen frei beweglich.

Die beiden Netze gestatten einzelne der von *Voss* (im ersten Teile dieses Kataloges) gegebenen Resultate über äquidistante Curvensysteme praktisch zu realisiren und dürften sich auch zu Vorlesungszwecken bei Einführung der krummlinigen Coordinaten besonders eignen.

Siehe bez. der Asymptotencurven auch noch die unter No. 228 und 232 aufgeführten Modelle und Zeichnungen.

Geodätische Linien.

214 **Sieben Modelle zur Darstellung des Verlaufes der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid.** Ausgeführt (1877 und 1880) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (unter Leitung von Prof. **A. Brill**) von den studd. math. **K. Rohn** und **A. v. Braunmühl**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 102—108 (pag. *3, 11* und *77*).

102. Geodätische Linien auf dem verlängerten Rotationsellipsoid.

103. Geodätische Linien durch die Nabelpunkte eines dreiaxigen Ellipsoides.

104—107. Verlängerte bez. abgeplattete Rotationsellipsoide mit geodätischen Linien und Enveloppen von Systemen solcher, welche von einem Punkt ausgehen. (Modelle je in zwei Grössen.)

108. Dreiaxiges Ellipsoid nebst Andeutung der Enveloppe von geodätischen Linien, welche von einem Punkt ausgehen.

Näheres vergl. die den Modellen beigegebenen Abhandlungen (zu *102*, *103* von Rohn, zu *104*—*108* von Braunmühl), sowie bezüglich der letzteren Modelle die Abh. von Braunmühl im 14. und 20. Bd. der Math. Annalen.

Siehe hiezu auch die unter No. 216 und 219 aufgeführten Modelle.

Abwickelung zweier Flächen auf einander.

215 **Modelle zur Demonstration der Abwickelung zweier Flächen aufeinander.** Ausgeführt im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**), von Assistent **P. Vogel**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 137—139 (pag. *18* und *82*).

Die Modelle beziehen sich speciell auf die Abwickelung eines Rotationsellipsoides auf eine zugehörige Schraubenfläche, nach Bour, Journal de l'école polyt. Bd. 22. Ein Rotationsellipsoid aus Messingblech lässt sich auf die beiden anderen aus Gips hergestellten Modelle (des Rotationsellipsoides und der Schraubenfläche) aufbiegen.

Siehe hiezu ausser den in den nächstfolgenden Abschnitten aufgeführten Modellen auch noch die in Abteilung III unter Kinematik aufgeführten Modelle, welche die praktischen Anwendungen der Abwickelung zweier Flächen auf einander vorführen.

Flächen constanten Krümmungsmasses.

216 **Serie von Flächen von constantem Krümmungsmass.** Ausgeführt (1877, 1880) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**). Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 126—136 (pag. *3*, *5*, *11*, *21* und *80*).

126—128. Die drei Typen von Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass mit geodätischen Linien. Nach Zeichnungen von E. Bour (Journal de l'Ecole Polytechnique, Tome 22) ausgeführt von Assistent *P. Vogel*.

129. Flächenstreifen von constanter positiver Krümmung aus Messingblech in Kugelzone, einem Centriwinkel von fast 90° entsprechend.

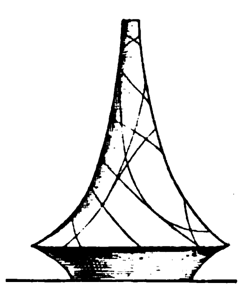
130. Hohle Halbkugel aus Messingblech.

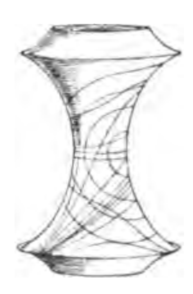
131. Schraubenfläche von constantem positiven Krümmungsmass, auf die vorhergehenden 3 Flächen abwickelbar. Schneidet man aus der vorherigen Kugel eine von 2 gleich grossen Parallelkreisen begrenzte Zone (einem Centriwinkel von 90° entsprechend) heraus, so geht diese durch gegenseitige Verschiebung der Endschnitte in diese Schraubenfläche über, wie sich dies mit Hilfe der Kugelzone aus Messingblech zeigen lässt. Von stud. math. *Kuen.*

132—134. Die drei Typen von Rotationsflächen von constantem negativen Krümmungsmass.

132. Kegeltypus nebst geodätischen Linien (blau) und einer Haupttangentencurve. Von stud. math. *Bacharach.*

133. Hyperboloidtypus. Es ist ein System paralleler geodätischer Linien aufgezeichnet (grün), worunter sich 2 (rot) befinden, die sich dem Kehlkreis asymptotisch nähern. Die geschlossenen Curven sind geodätische Kreise. Von stud. math. *W. Dyck.*



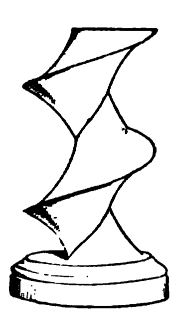


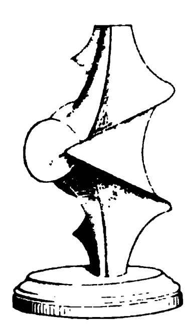
134. Rotationsfläche der Tractrix. Die Fläche bildet den Übergang zwischen den beiden vorgenannten Flächen und entspricht der Kugel bei den Flächen constanter positiver Krümmung. Die blau gezeichneten Curven auf ihr sind verschiedene geodätische Linien, die rote ist eine Asymptotencurve. Von stud. math. *Bacharach.*

135. Schraubenfläche von constantem negativen Krümmungsmass, deren Meridiancurve die Tractrix ist. Vergl. U. Dini, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris 1865, I. Sem. pag. 340; Th. Kuen, Berichte der kgl. bayer. Akad. 1884. Von Assistent *P. Vogel.*

136. Fläche von constantem negativen Krümmungsmass mit ebenen Krümmungslinien nach Enneper. Sie entsteht aus der Tractrixfläche von der Krümmung $-\frac{1}{t^2}$ dadurch, dass man auf den Tangenten an ein System von parallelen geodätischen Linien das Stück t in bestimmtem Sinn aufträgt. (Vgl. Bianchi, Math. Annalen Bd. 16, sowie Enneper, Göttinger Nachrichten 1868; Th. Kuen, Sitzungsberichte der kgl. bayr. Akad. 1884, Heft II.) Modellirt von stud. math. *Mack.* Erläuterung hierzu von Assistent *Th. Kuen.*

Die Flächen Nr. *133, 135, 136* besitzen das nämliche Krümmungsmass. Um ihre Abwickelbarkeit auf einander und besonders ihre Verschiebbarkeit in sich selbst zu zeigen, sind





136 a. Zwei Flächenstreifen von constantem negativen Krümmungsmass aus biegsamem Messingblech, vom Krümmungsmass der Flächen beigegeben.

Näheres vergl. die den einzelnen Modellen beigegebenen Abhandlungen.

217 **Zwei Modelle von Flächen von constantem positiven Krümmungsmass, mit einem System ebener Krümmungslinien**, ausgeführt von Studienlehrer **Sievert**, Nürnberg. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 206, 207 (pag. *39* und *80*).

Man vergl. hiezu die Abhandlungen von Enneper (Gött. Nachr. 1868), und Kuen, Bayer. Akad. Sitzungsber. 1884, ferner die Inaugural-dissertation von Sievert (Tübingen 1884), sowie die den Modellen beigegebene Abhandlung.

218 **Häute aus Papier von constantem negativen Krümmungsmass**, ausgeführt 1892 im **Math. Institut der techn. Hochschule München**.

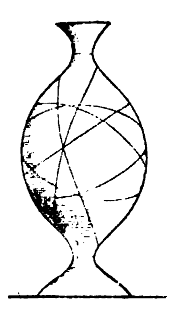
Eine solche Haut ist zusammengesetzt aus congruenten geodätischen Dreiecken mit den Winkeln $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ und $\frac{1}{7}\pi$. Der pseudosphärische Defect eines solchen ist $\frac{1}{42}\pi$. Damit ist, falls das Krümmungsmass der Fläche bekannt vorausgesetzt wird, auch Oberfläche und Seitenlängen des Dreiecks bekannt. Das Krümmungsmass wurde gleich dem der Tractrixfläche des Brill'schen Verlages (Nr. *134*) angenommen, auf welcher demnach die Haut abwickelbar ist. Die Dreiecke wurden aus den Seitenlängen zuerst geradlinig construirt und später so krummlinig begrenzt, wie es die kleineren Winkel und der kleinere Flächeninhalt der pseudosphärischen Dreiecke verlangt. Dann konnten sie in feuchtem Zustande auf die Tractrixfläche aufgepasst und genügend genau aneinandergefügt werden,

ein Verfahren, das schon von *Schwarz* zur Herstellung solcher Häute benützt worden ist. Theoretisch hat das Aneinanderfügen keine Grenze. Wie die ausgestellten Häute zeigen, stellen sich aber praktische Schwierigkeiten ein, die bewirken, dass grössere Häute zwar in den einzelnen Teilen ungefähr das richtige Krümmungsmass besitzen, aber keineswegs geeignet sind, eine exacte Vorstellung von ausgedehnten Flächen mit streng constantem Krümmungsmass zu liefern. Sie können in ihrer ganzen Ausdehnung nur als Continua aufgefasst werden, deren Krümmungsmass innerhalb geringer Grenzen variabel ist.

(Finsterwalder.)

Flächen constanter mittlerer Krümmung (Minimalflächen).

219 **Drei Typen von Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung.** Ausgeführt (1877) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**) von stud. **A. v. Braunmühl**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.



Specialkatalog 140—143 (pag. *5* und *83*.)

140. Unduloid (vergl. Fig.)

141, *142*. Nodoid.

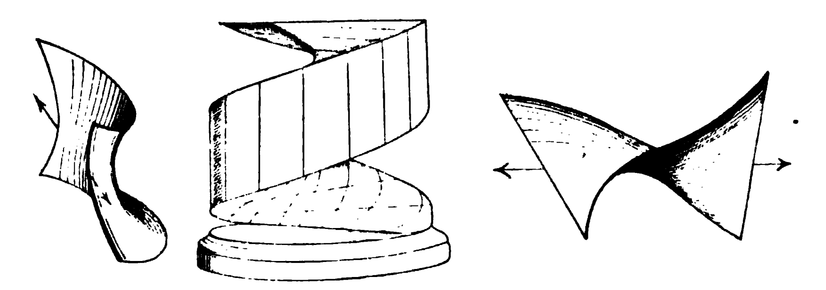
143. Catenoid.

Auf den Flächen sind geodätische Linien aufgetragen. Näheres vergl. man in der den Modellen beigegebenen Erläuterung.

220 **Catenoid und Schraubenfläche nebst zugehöriger biegsamer Lamelle aus Messingblech.** Hergestellt im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**) von stud. **Herting**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 144—146 (pag. *17* und *83*).

Die Modelle dienen zur Veranschaulichung der Ossian Bonnet'schen Biegung der einen Minimalfläche in die zweite. Bei dieser (an der



Messinglamelle wirklich ausführbaren Biegung) gehen die Krümmungslinien der einen Fläche in die Asymptotencurven der andern über. (Vergl. *Schwarz* in *Crelle's* Journal Bd. 80.)

221 **Minimalfläche neunter Ordnung nach Enneper.** Hergestellt im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**) von stud. **Herting** Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 147 (pag. *17* und *84*).

Man vergl. hiezu den Aufsatz von Enneper in den Göttinger Nachr. 1871. Die Fläche ist ihre eigene Bonnet'sche Biegungsfläche, d. h. sie kann so auf sich selbst aufgebogen werden, dass die Krümmungslinien (weiss) in die Asymptotencurven (rot) übergehen. Ein galvanoplastischer Abzug der Fläche, der die Symmetrieverhältnisse der Fläche noch deutlicher zur Anschauung bringt, liegt bei.

222 **Catalan'sche Minimalfläche.** Hergestellt unter Leitung von Professor **E. R. Neovius**, Univ. Helsingfors, von stud. **Laine.** Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 238 (pag. *41* und *84*).

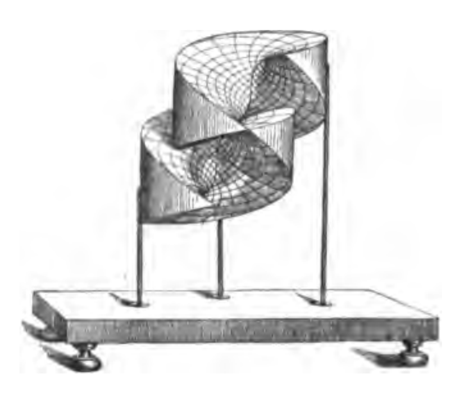
Diese Fläche gehört zu den Minimalflächen, welche eine Schar reeller Curven zweiten Grades enthalten, und zwar sind es hier Parabeln. Diese Parabeln und deren orthogonale Trajectorien veranschaulichen die Eigenschaft der Fläche, dass sie durch die beiden Curvenscharen in unendlich kleine Quadrate geteilt werden kann.

223 **Modell einer Minimalfläche, welche eine Schar reeller Parabeln enthält, deren Ebenen mit einer festen Ebene des Raumes einen constanten Winkel einschliessen.** Modellirt unter Leitung von Professor **E. R. Neovius** von stud. **Hj. Tallqvist,** Universität Helsingfors. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 203 (pag. *39* und *84*).

Das vorliegende Modell stellt diejenige Minimalfläche dar, welche durch geometrische Addition der gewöhnlichen Schraubenfläche und der

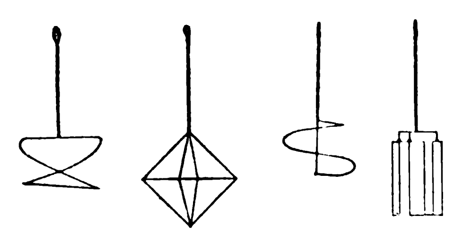
sog. *Catalan*'schen Minimalfläche entsteht. Die Catalan'sche Fläche enthält bekanntlich eine Schar reeller Parabeln, deren Ebenen alle auf einer festen Ebene senkrecht stehen. Auf der Additionsfläche liegt



ebenfalls eine Schar reeller Parabeln, deren Ebenen mit einer festen Ebene einen *constanten*, von 90° verschiedenen Winkel, hier von 45°, einschliessen.

Näheres vergl. die dem Modell beigefügte Abhandlung.

224 Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen mittelst Seifenlösung. **Math. Institut der technischen Hochschule München** (Professor **A. Brill**); Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.



a. Zwei Ringe mit Griff und Füssen zur Darstellung der Rotationsflächen constanter mittlerer Krümmung (Plateau, Statique des liquides, T. 1. p. 93—103).

b. Schraubenlinie zur Darstellung der windschiefen Schraubenfläche (ibd. p. 216).

c—g. Kanten des Oktaeders, der vierseitigen Pyramide, des dreiseitigen Prisma's, des Tetraeders und Würfels (vgl. Schwarz, *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche,* 1871, pag. 84).

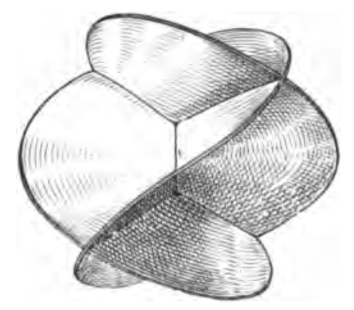
h. Kanten des sechsseitigen Prisma's (ibd. p. 93).

i. Drahtgestell zur Darstellung der ersten der fünf von Scherk (Crelle's Journal, XIII. p. 185) angegebenen Minimalflächen.

k. Zwei rechtwinklig gekreuzte Rechtecke zur Darstellung der fünften Scherk'schen Minimalfläche.

225 **Minimalfläche fünfter Classe,** 1880 modellirt von stud. **C. Schilling** im **math. Seminar der Univ. Göttingen** (Prof. **Schwarz**), galvanoplastisch reproducirt und ausgestellt durch das **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

In der Abhandlung „*Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*“, hat Herr *Weierstrass* auf die Aufgabe hingewiesen, alle algebraischen Minimalflächen einer bestimmten Classe zu ermitteln. Nach den Untersuchungen von *Henneberg* und *Lie* ist die niedrigste hierbei auftretende Classe die fünfte. Die zugehörigen Minimalflächen, die alle einander ähnlich sind, hat *Schilling* in seiner Inaug.-Dissertation (Göttingen 1880) näher untersucht.



Ihre Gleichungen lassen sich in der Form schreiben:

$$x = \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s_1^3}\right) - 3\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right) + 3\,(s + s_1) - (s^3 + s_1^3),$$

$$y = i\left[\left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_1^3}\right) + 3\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) + 3\,(s + s_1) + (s^3 - s_1^3)\right],$$

$$z = 3\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s_1^2}\right) + 3\,(s^2 + s_1^2).$$

Die Fläche ist von der 15. Ordnung. Sie ist eine Doppelfläche und deshalb wurde ihre Darstellung als eine (im Original aus Pappe hergestellte, im vorliegenden Modell galvanisch erzeugte) „Flächenhaut“ gewählt.*) Die aufgezeichneten Curven bilden ein quadratisches Netz von Raumcurven 6. und 3. Ordnung auf der Fläche.

Bezüglich der näheren Ausführungen sei auf die schon oben genannte Dissertation von Schilling verwiesen.

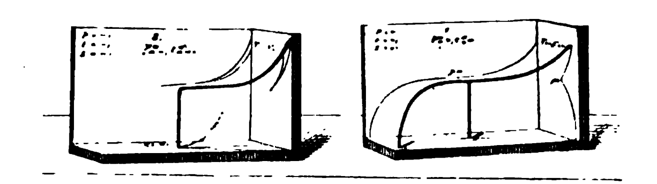
(Dyck.)

*) Die Vorteile einer solchen Darstellung, welche den eigentlichen Charakter einer Fläche zur Anschauung bringt, tritt hier gegenüber den stets mehr als Körpern erscheinenden Gipsmodellen und ähnlichen deutlich hervor.

Q. Singuläre Vorkommnisse bei Curven und Flächen.

226 **Acht Modelle über die Abhängigkeit der Rückkehrelemente der Projectionen einer unebenen Curve von denen der Curve selbst.** Von **Ch. Wiener**, Professor an der technischen Hochschule zu Karlsruhe. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 82—89; pag. 23 und *73.*



Wenn sich auf einer unebenen Curve ein Punkt und mit ihm die Tangente und die Schmiegungsebene der Curve hinbewegt, so kann an einer Stelle jedes dieser Elemente seinen Bewegungssinn beibehalten oder ihn umkehren. Dieses Verhalten wird der Charakter der Curve, und ein umkehrendes Element ein Rückkehrelement genannt. Durch Verbindung der verschiedenen Charaktere treten acht Möglichkeiten ein. — Die Projection der Curve auf eine Ebene zeigt im Allgemeinen für den Punkt und die Tangente dieselben Charaktere wie die unebene Curve selbst. Nur bei den Projectionen auf die drei Hauptebenen, die Schmiegungs-, die Normal- und die rectificirende Ebene zeigen sich Änderungen der Charaktere, so dass hier Spitzen und Wendepunkte in der Projection auftreten können, die an der Curve nicht vorhanden sind, und solche verschwinden, die sich an der Curve befinden.

Die Modelle zeigen die acht möglichen Fälle. Sie stellen die Curven aus Draht und die Projectionen auf die drei Hauptebenen durch Zeichnung dar und lassen durch Visiren oder Schattenwerfen die Abhängigkeit ihrer Charaktere, und durch allmähliche Änderung der Projectionsrichtung die Entstehung der Singularitäten der Projectionen erkennen.

(Chr. Wiener.)

227 **Sechs Modelle zur Kartographie** von Privatdocent **H. Wiener**, Univ. Halle a/S.

Ideale Bergkuppen, Sattel, dreifacher Sattel, Kessel.

28 **Modelle für die verschiedenen Typen conischer Knotenpunkte mit Angabe des Verlaufes der parabolischen Curve und der Haupttangentencurven in der Umgebung dieser Punkte.** Ausgeführt 1891 im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Dyck** und **Finsterwalder**) von Reallehrer **A. Sucharda** in Prag.

Berücksichtigt man in der Taylor'schen Entwicklung der Flächengleichung im Knotenpunkt die Glieder zweiter und dritter Ordnung

$$u_2 + u_3 + \ldots = o.$$

so hat man bekanntlich nach der Realität der sechs Schnittgeraden der Kegel zweiter Ordnung $u_2 = o$, und dritter Ordnung $u_3 = o$ vier Hauptfälle zu unterscheiden: *6, 4, 2, 0 dieser Schnittgeraden reell.* Zur Darstellung dieser Fälle sind mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung möglichst einfache Gleichungen zu Grunde gelegt:

a) $(x^2 + y^2 - b^2z^2) - \lambda\, y\, (3\, x^2 - y^2) = o$

b) $(x^2 + y^2 - b^2z^2) - \lambda\, z\, (x^2 - y^2) = o$

c) $(x^2 + y^2 - b^2z^2) - \lambda\, x\, z^2 = o$

d) $(x^2 + y^2 - b^2z^2) - \lambda\, z^3 = o$

Wenn nun auch in den gewählten Beispielen gewisse mit der Einfachheit der Annahmen verbundene Specialisirungen auftreten, so sind dieselben doch andererseits allgemein genug, um Hauptmerkmale der verschiedenen Kategorien zu versinnlichen.

Die Haupttangentencurve berührt im Knotenpunkt die oben erwähnten Schnittgeraden von $u_2 = o$ und $u_3 = o$ in sechs durch den Knotenpunkt laufenden (reellen bez. imaginären) Ästen. Projicirt auf die xy-Ebene gestaltet sich ihr Verlauf (schematisch) wie folgt:

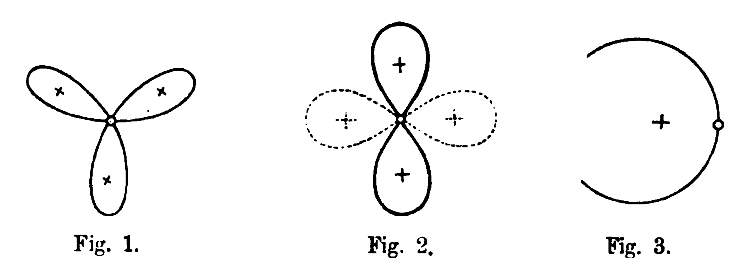


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

In den Fällen a und c liegt die Fläche symmetrisch zur xy-Ebene; die Figuren 1 und 3 sind also doppelt zählend für den oberen und unteren Teil der Fläche zu denken. Es sind 6 bez. 2 Teile positiver Krümmung, welche im Knotenpunkte zusammenstossen.

Im Fall b ist die Fläche nicht symmetrisch zur xy-Ebene, vielmehr der obere Teil gegen den unteren um 90° verdreht. Die ausgezogenen bez. punktirten Linien der Figur 2 beziehen sich auf den oberen bez. unteren Teil. Es stossen 4 positiv gekrümmte Flächenteile im Knotenpunkt zusammen.

Im Falle d (einer Rotationsfläche) trennt der Knotenpunkt den oberen positiv gekrümmten Flächenteil von dem unteren negativen.

Unseren Flächen (als solchen dritter Ordnung) gehören die in den oberen Figuren eingetragenen Geraden ihrem ganzen Verlaufe nach an. Die Discussion des Verhaltens der Haupttangentencurven in der Umgebung des Knotenpunktes an Hand der zugehörigen Differentialgleichung (die nur im Falle d integrirbar ist) liefert nun den folgenden (schematisch gegebenen) Verlauf derselben:

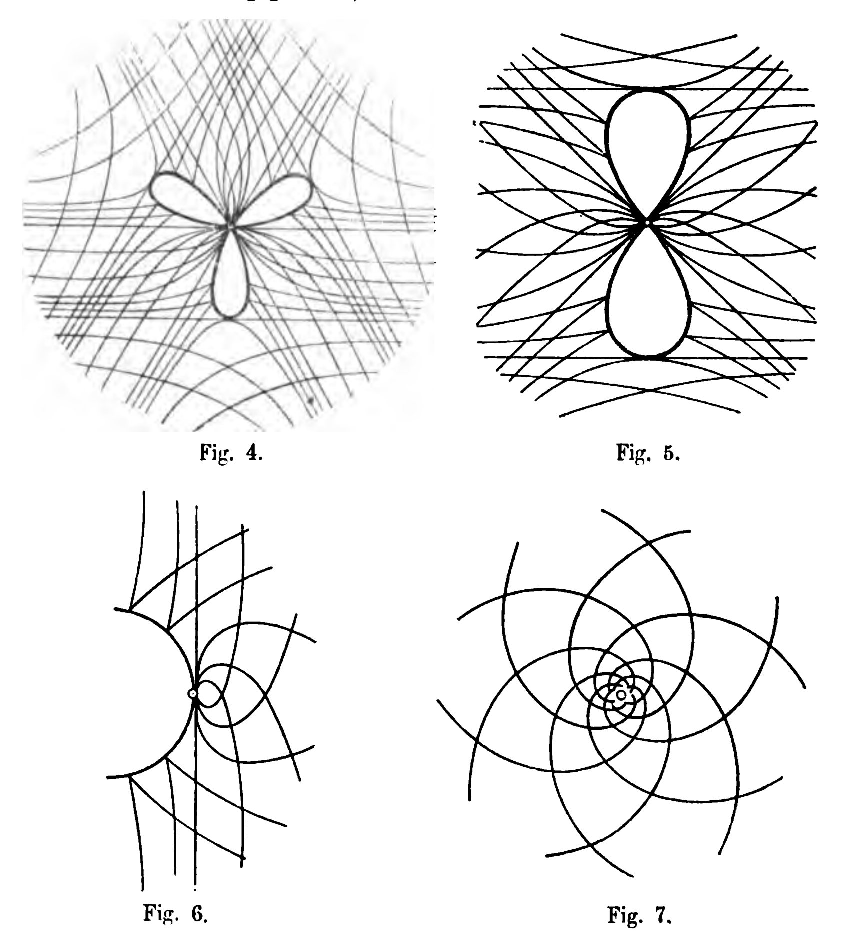


Fig. 4. Fig. 5.

Fig. 6. Fig. 7.

Auf den von Herrn Sucharda modellirten Flächen sind diese Haupttangentencurven nach einzelnen, von ihm genauer gerechneten Richtungen aufgetragen.

(Dyck.)

229 Modelle der beiden Hauptarten der „Faltenpunkte" von Professor **D. J. Korteweg**, Univ. Amsterdam.

Wenn eine Doppeltangentialebene sich über die Fläche, welche sie doppelt berührt, fortbewegt, kommt es vor, dass die beiden conjugirten Berührungspunkte (die Connoden) zusammenfallen. Die Punkte der Fläche, in welchen dies geschieht, werden *Faltenpunkte* genannt, weil solche Punkte sich am Anfang und Ende einer jeden Falte (man denke z. B. an den Faltenwurf eines Kleides) vorfinden.

In einem Faltenpunkte berühren sich die Flecnodalcurve (Curve der vierpunktigen Tangenten), die Spinodalcurve (Curve der parabolischen Punkte) und die Connodalcurve. Auf den Modellen ist die erste dieser Curven nicht angegeben, die zweite, welche die Grenze zwischen dem negativ gekrümmten (blaugefärbten) Teile der Fläche und dem positiv gekrümmten bildet, ist durch eine rote, die Connodalcurve durch eine blaue Linie angedeutet.

Die beiden Modelle Nr. 1 und 2 vergegenwärtigen die beiden Hauptarten der Faltenpunkte. Diese unterscheiden sich *erstens* dadurch, dass die Connodalcurve bei der ersten Hauptart auf dem positiv — bei der zweiten auf dem negativ gekrümmten Teile der Fläche liegt; *zweitens* ist auch der Tangentialdurchschnitt am Faltenpunkte verschieden. Bei der zweiten Hauptart zeigt dieser Schnitt zwei reelle, sich im Faltenpunkte berührende Zweige, bei der ersten Hauptart sind diese beiden Zweige imaginär und ist also der Faltenpunkt ein isolirter Punkt mit reeller Tangente.

Weiteres über Faltenpunkte und über die singulären Punkte der Flächen, die als vielfache Faltenpunkte zu betrachten sind, findet man *Wiener Berichte, Bd. 98, Abt. II, S. 1154.* 1889. Über ihre Bedeutung in der Thermodynamik sehe man *Maxwell, Theory of Heat, Chapter XII,* und *van der Waals, Théorie moléculaire d'une substance composée de deux matières différentes, Archives Neerlandaises, Tome 24.* (1891.)

(D. J. Korteweg.)

230 Modelle von deformirten homogenen „Doppelfaltenpunkten", von Prof. **D. J. Korteweg**, Univ. Amsterdam.

In einer 1890 in den *Archives Neerlandaises, T. 24, p. 295* veröffentlichten Abhandlung „*La théorie générale des plis et la surface ψ de van der Waals*" habe ich im ersten Abschnitte die Resultate angegeben einer Untersuchung über das Entstehen, Verschwinden und Zusammenfliessen der Falten einer in stetiger Umformung begriffenen Fläche und über die singulären Punkte, die dabei eine Rolle mitspielen.

Die erste der drei dort beschriebenen Entstehungsweisen einer Falte, die aus einem homogenen Doppelfaltenpunkte der ersten Art, illustrirt Modell Nr. 3. Wird nämlich die auf diesem Modelle dargestellte Falte rückwärts deformirt, dann zieht sie sich zu einem homogenen Doppelfaltenpunkte (homogen weil die beiden Faltenpunkte zur selben Art ge-

hören) zusammen, welcher Doppelfaltenpunkt einen isolirten Punkt der Connodalcurve (Curve der conjugirten Berührungspunkte der Doppeltangentialebenen) bildet und deshalb zur *ersten* Art gezählt wird.

Modell Nr. 4 dahingegen bezieht sich auf einen homogenen Doppelfaltenpunkt *zweiter* Art. Ein solcher Punkt ist ein *eigentlicher* Doppelpunkt der Connodalcurve und gibt zu ganz anderen Umbildungen der Falten Veranlassung als ein homogener Doppelfaltenpunkt erster Art. Er entsteht auf Modell Nr. 4 in dem Augenblicke, wo die beiden Faltenpunkte während einer Deformation zusammenfallen. Wird diese Deformation dann noch weiter fortgesetzt, dann verschwinden die Faltenpunkte und eine Doppeltangentialebene kann auf dem Modelle von der einen Seite zur anderen fortbewegt werden, ohne dass die Connoden imaginär werden.

Gehörten nun beide Faltenpunkte verschiedenen Falten an, dann vereinigen sich diese zu einer einzigen Falte. Interessanter ist der Fall, wenn beide die Endpunkte einer und derselben Falte bildeten, weil dann aus der durch Faltenpunkte abgeschlossenen Falte entweder eine doppelte oder eine einfache Ringfalte entsteht, und zwar jenachdem der linke und rechte Zweig der Connodalcurve des einen Faltenpunktes mit den gleichnamigen oder ungleichnamigen Zweigen des anderen Faltenpunktes correspondirte. Eine Ringfalte wird nämlich doppelt oder einfach genannt, je nachdem die beiden Connoden entweder verschiedene Curven beschreiben oder sich auf derselben Curve fortbewegen und also schliesslich ihre Stellen wechseln.

Über die Bedeutung der auf den Modellen angegebenen Linien, vergl. man die oben genannte Beschreibung meiner Modelle der beiden Hauptarten der Faltenpunkte.

(D. J. Korteweg.)

231 Die verschiedenen Typen des Verlaufs von Krümmungslinien in allgemeinen Nabelpunkten einer Fläche. Zeichnung von Professor **Finsterwalder**, techn. Hochschule München.

In einem Nabelpunkte verliert die quadratische Gleichung für die Krümmungsrichtungen ihren Sinn. An ihre Stelle tritt eine cubische Gleichung, welche 3 bevorzugte Richtungen definirt, in denen die Krümmungslinien auf den Nabelpunkt zulaufen. Dabei kann entweder der Fall eintreten, dass, wie in Fig. 1, 2, 3, 7, 8, nur einzelne Krümmungslinien durch den Nabelpunkt gehen, oder, wie in Fig. 4, 5 und 6, dass unendlich viele Krümmungslinien in einer ausgezeichneten Richtung sich berühren. Integrirt man die Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die Tangentialebene im Nabelpunkte näherungsweise, so findet man bei genauerer Discussion die in vorliegender Zeichnung zusammengestellten Typen für den Verlauf der Krümmungslinien.

Fig. 1 stellt den Fall dar, wie er bei einer Fläche mit dreifach symmetrischer Axe vorkommt; hier sind die ausgezeichneten Richtungen um je 120° von einander entfernt. *Fig. 3* und *4* geben den

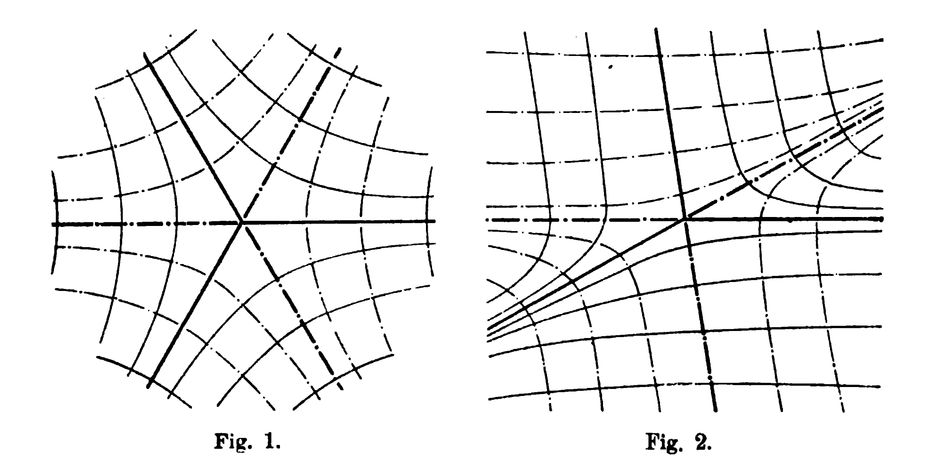


Fig. 1. Fig. 2.

Übergang durch den Grenztypus, bei welchem 2 ausgez. Richtungen senkrecht zu einander stehen. Im Grenztypus selbst bilden die Krümmungslinien in der Umgebung des Punktes ein einfaches recht-

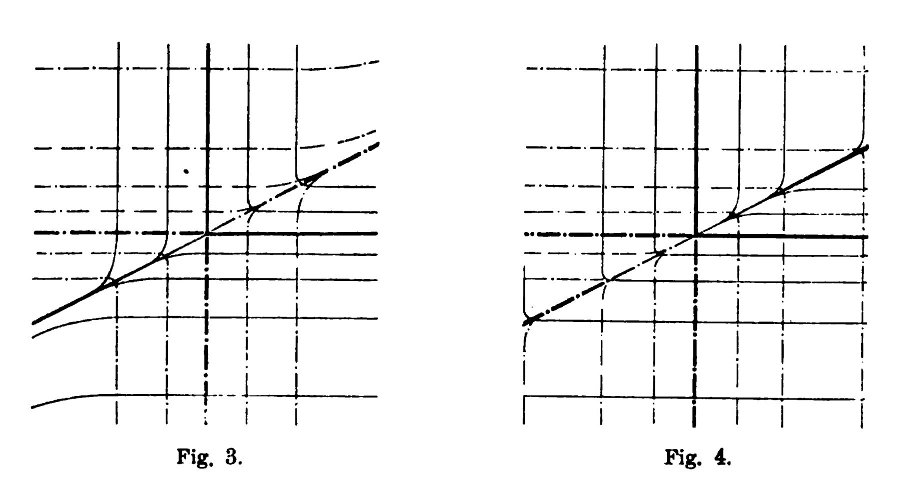


Fig. 3. Fig. 4.

winkliges Netz. In *Fig. 6* sind 2 der ausgezeichneten Richtungen zusammengefallen, in *Fig. 7* imaginär geworden, in *Fig. 8* laufen sie nach den Kreispunkten. Letzterer Fall tritt bei Flächen 2. Grades

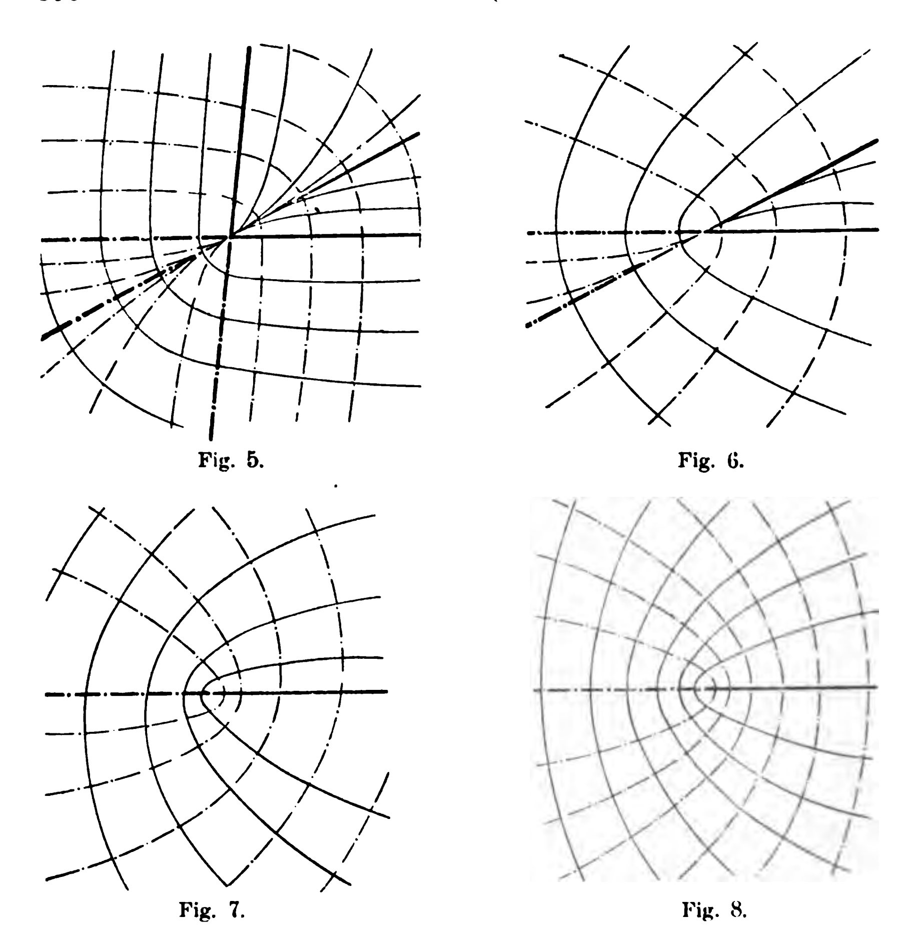


Fig. 5. Fig. 6.

Fig. 7. Fig. 8.

auf. Der Grenztypus findet sich auf den Scheitelpunkten von Rückungsflächen, falls diese Nabelpunkte sind.

(Finsterwalder.)

232 Die verschiedenen Typen der singulären Stellen der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Von Prof. **W. Dyck**, techn. Hochschule München.

Die Tafeln geben:

1. Die drei Typen der bei einer *Differentialgleichung erster Ordnung ersten Grades* auftretenden singulären Stellen. Sie ergeben sich wie bekannt aus der Gleichung:

$$(ax + by)\frac{dy}{dx} + (cx + dy) = o.$$

2. Die drei Typen der bei einer ***Differentialgleichung erster Ordnung höheren Grades*** auftretenden ***„wesentlich“ singulären*** Stellen.

Für sie ist charakteristisch die Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2cx\left(\frac{dy}{dx}\right) + bx^2 + 2ay = o;$$

die Darstellung des gestaltlichen Verlaufes des Curven-Systems folgt dabei durch eine quadratische Transformation aus den erstgenannten Fällen; die gegenseitige Zuordnung derselben ist unmittelbar in den untereinander geordneten Figuren I, II, III ersichtlich.

3. Den gestaltlichen Verlauf des Curvensystems in der Umgebung der bei der allgemeinen Differentialgleichung (höheren als ersten Grades) auftretenden ***„ausserwesentlich singulären“ Stellen*** (Fig. IV der Tafel).

Sie sind charakterisirt durch eine Gleichung:

$$o = ax - y + bx\left(\frac{dy}{dx}\right) + c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Die entsprechende Fig. V stellt ein singuläres Vorkommnis dar, wie es dem Falle Fig. IV analog auftritt, wenn man bei der Frage nach den singulären Stellen eines Curvensystems, statt von der Differentialgleichung als dem ursprünglichen Datum auszugehen, die Definition des Curvensystems durch eine Curvengleichung

$$\Phi\,(x, y, c) = o$$

mit einem willkürlichen Parameter c gegeben voraussetzt.

4. Die Figuren VI—IX der Tafel zeigen die Veränderungen, welche ein durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definirtes Curvensystem erleidet bei Änderung der Constanten der Differentialgleichung.

Betrachtet man speciell ein System von Differentialgleichungen

$$F\,(x, y, y') - k = o$$

mit k als willkürlichem Parameter, so sind die in den genannten Figuren dargestellten Übergänge dadurch charakterisirt, dass an der Sprungstelle der Deformation gleichzeitig mit $F - k = o$ auch die Gleichungen

$$F_1 = o,\ F_2 = o,\ F_3 = o$$

statthaben; und es geben die hier gezeichneten Fälle die verschiedenen bei diesem Durchgang möglichen Typen.

Ausser diesen wichtigsten Sprungstellen enthalten die in $F - k = o$ enthaltenen Systeme noch weitere, jedesmal ganz bestimmt geometrisch zu bezeichnende Übergangsstellen, die analytisch ebenso wie die genannten durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen definirt sind.

Der genaue Verfolg aller dieser verschiedenen Übergangsformen für eine vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung, in welche

ein zweckmässiger Parameter einzuführen ist, gestattet, die gestaltliche Anordnung der Integralcurven für eine solche Gleichung im allmählichen Entstehen anschaulich zu verfolgen.

Bezüglich einer eingehenderen Ausführung dieser Discussionen sei auf zwei Aufsätze von Dyck in den Sitzungsberichten der math. phys. Classe der k. b. bayer. Akad. d. W. vom Jahre 1891 (Heft 1) und 1892 (Heft 1) verwiesen.

Eine nicht uninteressante Anwendung der Discussion ist diejenige auf die gestaltlichen Verhältnisse der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche. Die in den Figuren I bis III charakterisirten Fälle treten hier allgemein auf und zwar für Punkte, in deren Umgebung die Gleichung der betr. Fläche sich darsteilen lässt in der Form:

$$z = \tfrac{1}{2}\, f_{22}\, y^2 + \tfrac{1}{2}\, f_{112}\, x^2 y + \tfrac{1}{24}\, f_{1111}\, x^4.$$

Hier ist die Unterscheidung der drei Typen I, II, III einfach gegeben durch die Ungleichungen:

$$\text{I.}\quad 25\, f^2_{112} - 8\, f_{1111}\, f_{22} < 0;$$
$$\text{II.}\quad 25\, f^2_{112} - 8\, f_{1111}\, f_{22} > 0,\quad 3\, f^2_{112} - f_{1111}\, f_{22} > 0;$$
$$\text{III.}\quad 25\, f^2_{112} - 8\, f_{1111}\, f_{22} > 0,\quad 3\, f^2_{112} - f_{1111}\, f_{22} < 0.$$

Die Punkte sind identisch mit den sog. „*Faltenpunkten*“ einer Fläche, wie sie von *Korteweg* näher untersucht worden sind. Die beiden von Korteweg unterschiedenen Kategorien trennen die hier mit I und III bezeichneten Fälle von Typus II. Man vergleiche hiezu die unter Nr. 229 ausgestellten beiden Modelle des Herrn Korteweg. Bezüglich einer näheren Charakteristik der Lage dieser Punkte auf der parabolischen Curve der Fläche vergl. eine Note von Dyck im ersten „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung“.

(Dyck.)

III. Abteilung.

Angewandte Mathematik.

Erster Abschnitt. Mechanik.

R. Apparate und Modelle zur Demonstration von Sätzen der Dynamik.

233 **Apparat zur Demonstration des Parallelogramms der Kräfte** von Prof. **Neesen**, Berlin.

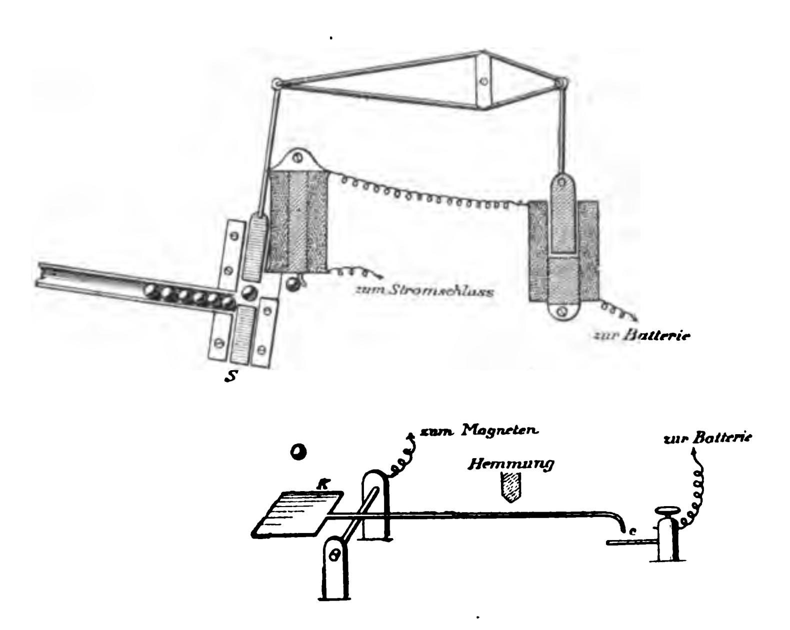
In ein Brett sind mehrere Halter einschraubbar, welche Rollen tragen. Über diese Rollen gehen Schnüre, die entweder an einem Punkte mit einander verbunden, oder an eine beliebig gestaltete Pappscheibe angehackt werden. Die anderen freien Enden der Schnüre tragen Gewichte. Auf den Schnüren sind mittelst kleiner Ösen Pfeile aus dünnem Metall angebracht, deren Länge proportional dem an der betreffenden Schnur angehängten Gewichte ist. Ein in Grade eingeteilter Papierkreis kann in das Brett so gesteckt werden, dass der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Vereinigungspunkt der Schnüre zusammenfällt. Zur Demonstration des Projectionssatzes befindet sich an der oberen horizontalen Kante des Brettes ein Masstab aus Feldern mit wechselnder Farbe. Längs dieses Masstabes ist ein Schlitten beweglich, welcher eine lange über das Brett reichende Stange trägt.

Durch verschiedenes Anhängen einer Schnur an verschiedenen Punkten einer auf der Pappscheibe parallel der Richtung der betreffenden Schnur gezogenen Linie lässt sich die Verlegbarkeit des Angriffspunktes nachweisen. Die Ablesung der Winkel zwischen den einzelnen Schnüren an dem eingesteckten Teilkreise gibt mit der Grösse der angehängten Pfeile das Gesetz der Grössenverhältnisse der Componenten und Resultante. Misst man durch Einstellen der an dem Schlitten befestigten Stange auf die Enden der genannten Pfeile die Grösse der Projectionen auf die obere Kante des Gestelles, so ergibt sich der Projectionssatz.

(Neesen.)

234 Apparat zur Bestimmung der Fallgeschwindigkeit von **F. R. Barrell**, M. A., B. Sc. University College, Bristol.

Der Apparat soll, ähnlich wie die Fallmaschine von ***Atwood*** (vor welcher er übrigens eine grössere Einfachheit des Princips voraus hat) hauptsächlich als Vorlesungsapparat dienen. Nun ist die Fallzeit für eine Fallhöhe von 1—3 Meter, die gewöhnlich zur Verfügung steht, zu kurz, um direct genauere Beobachtung zuzulassen. In dem vorliegenden Apparat fallen 50 bis 100 Kugeln unmittelbar hintereinander von derselben Höhe herab, so, dass die eine den Fall beginnt, wenn die vorhergehende ihn beendet hat. So lässt sich die Beobachtung auf ein Zeitintervall ausdehnen, das mit einer gewöhnlichen Uhr hinreichend genau bestimmt werden kann.



Die in einer Röhre enthaltenen Stahlkugeln laufen einzeln gegen einen Elektromagneten (vergl. vorstehende Figur), wobei der Austritt aus der Röhre durch ein verschiebbares Schliesstück S regulirt ist. Dieses Schliesstück S steht durch einen Hebel mit einem zweiten Elektromagneten in Verbindung (beide Elektromagneten hintereinander geschaltet). Senkrecht unter dem ersten Elektromagneten ist ein Stromschluss K, in Form einer Platte, auf welche die Stahlkugeln auftreffen. Beim Auffallen einer Kugel auf K wird der Strom unterbrochen, die nächste Kugel beginnt ihren Fall und die Senkung des Hebels bewirkt, dass eine dritte Kugel die Öffnung des Schlittens S passirt. Der Strom ist wieder geschlossen

und jene dritte Kugel am Elektromagneten fixirt, bis das Auffallen der zweiten Kugel den Stromkreis wieder öffnet und damit das Spiel von neuem beginnt.

Man kann leicht die zu beobachtende Zeit auf 30 bis 100 Secunden ausdehnen, wo dann die Genauigkeit 0,005 ja sogar 0,002 beträgt.

(F. R. Barell.)

235 **Apparat zur Demonstration der Gesetze der gleichförmig beschleunigten Rotationsbewegung** von Prof. **L. Boltzmann**, Univ. München, ausgestellt vom **Physikalischen Institut der Universität Graz**.

Eine möglichst leichte, möglichst reibungslos drehbare verticale Axe trägt zwei leichte senkrechte Querarme, an denen je eine ziemlich bedeutende Masse festgeklemmt werden kann. Die Axe verjüngt sich an einer Stelle so, dass ihr Durchmesser gerade halb so gross wird. Ein um die Axe gewickelter Faden läuft über eine Rolle und erzeugt, wenn er mit einem kleinen Gewicht belastet wird, eine gleichförmig beschleunigte Rotationsbewegung, welche wie bei der Atwood'schen Fallmaschine beobachtet wird, indem das fallende Gewicht sich dicht vor einer verticalen Scala bewegt. Durch Veränderung der Grösse des Fallgewichtes, durch Aufwicklung des Fadens auf den dünneren oder dickeren Teil der Axe kann das Drehmoment, welches die Rotation beschleunigt, durch Veränderung der Grösse und Lage der beiden grösseren Massen das Trägheitsmoment variirt werden. Einen ähnlichen Apparat fand ich, nachdem dieser längst fertig war, in Carls Repertorium beschrieben.

(L. Boltzmann.)

236 **Zwei Rotationsapparate zur Erzeugung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung**, construirt und ausgestellt von Ingenieur **K. A. Mayer** in Einbeck (Hannover.)

Beide Apparate dienen zur Demonstration des Satzes, dass eine continuirlich wirkende constante Kraft, bezw. eine Reihe in gleichen Intervallen auf einanderfolgender gleich starker Stösse eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringt.

Der erste Apparat mit Signalglocke, der zweite in einfachster Ausführung.

(K. A. Mayer.)

237 **Zwei Modelle zur Darlegung der Erhaltung des Schwerpunktes von Curven- und Flächenstücken bei gewissen Verbiegungen**, von **J. Kleiber**, Assistent an der techn. Hochschule München.

Erstes Modell.

Durchläuft ein Punkt P, ausgehend von der Anfangslage P_0 eine Raumcurve II, so beschreibt der Schwerpunkt S des von P durchlaufenen Curvenstücks, ausgehend von P_0, eine Curve Σ.

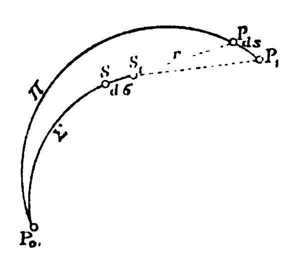


Fig. 1.

Sind nun P und P_1 zwei Nachbarlagen des in Bewegung befindlichen Punktes P, so kann der Schwerpunkt S_1 des Curvenbogens $P_0PP_1 = s + ds$ bestimmt werden aus den Schwerpunkten S und P der Teile: $P_0P = s$ und $\lim (PP_1) = ds$. Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Einzelteile und teilt deren Entfernung im umgekehrten Verhältnis der Bogenstücke s und ds. Setzen wir diese der Einfachheit wegen homogen voraus, so liegt 1) S_1 auf PS und 2) wird S_1 auf dieser Linie $PS = r$ durch die Relation bestimmt:

$$SS_1 : \lim (S_1P) = ds : s$$

oder:

$$d\sigma : r \quad = ds : s$$

woraus:

$$d\sigma = r \cdot \frac{ds}{s}.$$

Hieraus folgt der Satz:

„*Die Tangente in jedem Punkte* S *der Schwerpunktscurve* Σ *geht durch den Endpunkt* P *des zum Schwerpunkte* S *gehörigen Bogenstücks* P_0P *auf* Π."

Diese sämtlichen Tangenten von Σ bilden eine abwickelbare Fläche 𝔖 mit der Rückkehrkante Σ. Auf ihr liegt nach dem vorhergehenden Satz die Grundcurve Π. Aus der Art der Bestimmung des Punktes S_1 aus Dreieck SPP_1 ergibt sich nun sofort der folgende Satz:

„*Verbiegt man die abwickelbare Fläche* 𝔖 *so, dass die auf ihr gelegene Curve* Σ *Rückkehrkante bleibt* (*d. h. ihre erste Krümmung nicht ändert*), *so bleibt* Σ *immer Schwerpunktscurve der auf* 𝔖 *gelegenen und mit verbogenen Curve* Π *und die Erzeugende durch jeden ihrer Punkte* P *berührt die Rückkehrkante im Schwerpunkte* S *des Bogenstücks* P_0P."

Durch diese Verbiegungen der Fläche 𝔖 sind also besondere Verbiegungen des Curvenbogens P_0P definirt, für welche eine invariable Verbindung des zugehörigen Schwerpunkts S, wie oben angegeben, ermöglicht ist. —

Es möge noch bemerkt sein, dass jedem Anfangspunkte P_0 eine andere Schwerpunktscurve Σ_1 und also auch andere Fläche 𝔖 entspricht. Sämtliche Curven Σ erfüllen eine Fläche („Schwerpunktsfläche") und sind auf dieser jeweils als Schnitt der einem Punkte P_0 zugehörigen ersten Polarfläche charakterisirt.

Zweites Modell.

Zur Erläuterung des folgenden Satzes:

„*Ist* A_0 *ein fester,* S *ein veränderlicher Punkt der Rückkehrkante* Σ *einer abwickelbaren Fläche* 𝔖, *so kann man auf dieser immer eine bestimmte, durch* S_0 *verlaufende Curve* **A** *angeben, so dass der*

von Σ, **A** *und der durch* S *gehenden Erzeugenden* **H** *begrenzte Oberflächenteil von* $\mathfrak{S}$ *bei allen Verbiegungen der abwickelbaren Fläche, welche* Σ *zur Rückkehrkante haben, seinen Schwerpunkt unverändert in* S *behält.*"

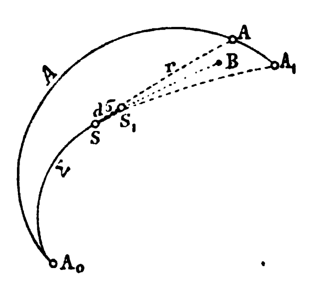


Fig. 2.

Nachweis. — Die Erzeugende **H** trifft Σ in S, **A** in A, die Nacherzeugende $\mathbf{H}_1$ diese Curven in S_1 bezw. A_1. Zwischen beiden liegt ein Oberflächenelement $S(S_1) A A_1$ vom Inhalt $\frac{1}{2} r^2 . d\vartheta$, wenn $r = AS$ und $d\vartheta$ der sog. Contingenzwinkel der Curve Σ, d. i. der Winkel von **H** und $\mathbf{H}_1$ ist. Der Schwerpunkt dieses Oberflächenelements liegt in einer Entfernung $SB = \frac{2}{3} r$ von S. Da nun S zugleich Schwerpunkt von $S_0 A S$ sein soll, so wird der Schwerpunkt S_1 von $S_0 A_1 S_1$ so auf der Verbindungsstrecke von S und B liegen, dass er diese im umgekehrten Verhältnis der zugehörigen Flächeninhalte teilt:

$$S_1S : S_1B = (\tfrac{1}{2} r^2 d\vartheta) : \left(\int \tfrac{1}{2} r^2 d\vartheta\right)$$

oder da $\quad S_1S = d\sigma, \lim (S_1B) = SB = \frac{2}{3} r$ ist:

folgt: $\quad d\sigma \int r^2 d\vartheta = r^2 d\vartheta \, \tfrac{2}{3} r = \tfrac{2}{3} r^3 d\vartheta.$

Nun ist
$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \rho$$

gleich dem Radius der ersten Krümmung der Rückkehrkante Σ und hiernach eine Function von ϑ; es stellt daher

$$\int r^2 d\vartheta = \frac{2}{3} \frac{r^3}{\rho}$$

eine Bedingungsgleichung für die Curve **A** vor. In dieser kommt die zweite Krümmung von Σ gar nicht vor. Aus dieser Thatsache folgert man die Eigenschaft, dass die Curve **A** auf $\mathfrak{S}$ bei allen oben bezeichneten Verbiegungen von $\mathfrak{S}$ sich nicht ändert. Die obige Bedingungsgleichung liefert durch Differentiation nach ϑ

$$r^2 = \frac{2}{3} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{r^3}{\rho}\right)$$

oder wenn man $\quad \dfrac{r^3}{\rho} = z$ setzt:

$$\rho^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \frac{dz}{d\vartheta}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung liefert aber sofort:

$$\frac{r}{\rho^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} \int \rho^{\frac{2}{3}} d\vartheta$$

und schliesslich
$$r = \frac{1}{2}\,\rho^{\frac{1}{3}} \int_0^{\vartheta} \rho^{\frac{2}{3}}\, d\vartheta$$

Ist speciell die in die Ebene ausgebreitete Curve Σ ein Kreis vom Radius ρ, so wird die Curve **A** definirt durch die Gleichung:

$$r = \frac{1}{2}\,\rho\,\vartheta$$

wobei $\rho\,.\,\vartheta$ nichts anderes als den Bogen S_0S bedeutet. Diesem Fall entspricht das ausgestellte Modell.

(J. Kleiber.)

238 **Die Kettenlinie auf der Kugel.** Ausgeführt (1880) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **A. Brill**) von Assistent **Fischer**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 156 (pag. *12* und *86*). Vergl. hiezu die Abhandlung von *Clebsch*, Crelle's Journal, Bd. 57. Die beiden auf der Kugel vereinigten Typen entsprechen dem Fall, wo das elliptische Integral sich auf ein Kreisintegral reducirt.

239 **Bahncurve eines schweren Punktes auf der Kugel (Curve des sphärischen Pendels)**, ausgeführt (1877) im **Math. Institut der techn. Hochschule München** (Prof. **Brill**) von Stud. **L. Schleiermacher**. Verlag von **L. Brill**, Darmstadt.

Specialkatalog 157 (pag. *6* und *87*). Bezüglich der Discussion der Bahncurve sei auf die Inaug.-Diss. von *L. Schleiermacher*, München 1877 verwiesen.

240 **Apparat zum Nachweis der Bewegung des Schwerpunktes, des Einflusses des Trägheitsmomentes, sowie der durch eine Momentankraft erzeugten Bewegung** von Prof. **Neesen**, Berlin.

Der Apparat besteht 1) aus kleinem Wagen, der auf Gelenkrollen läuft, ferner drei durch Federn auf die Unterlage gedrückte spitze Stifte trägt und verschiedene Löcher zum Einsetzen von Bleigewichten hat, 2) aus zwei Bleigewichten mit je zwei Einsatzstiften, 3) einer an den Tisch anschraubbaren kleinen Kanone mit durch Federkraft vorgetriebenem Bolzen, 4) aus einer glatten Unterlegplatte (Fensterscheibe oder Marmorplatte).

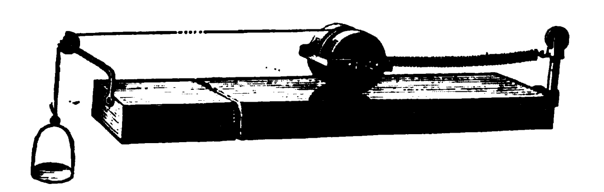
Zum Gebrauch wird Platte 4 berusst durch Bestreichen mit Alkohol, in welchem *etwas* Russ suspendirt wird. Man lässt den Alkohol verdunsten, so dass eine trockene Russchicht bleibt. Der Wagen wird vor die Mündung der Kanone gestellt, die Arretirung der Triebfeder gelöst, dann bewegt sich der Wagen entweder gradlinig oder sich verschiebend und gleichzeitig drehend je nach der Lage des Angriffspunktes. Die Be-

wegung markirt sich durch die von den vorstehenden Stiften in den Russ eingerissenen Linien. Der im Schwerpunkt angebrachte Stift beschreibt immer eine gerade Linie. Die Abhängigkeit des momentanen Drehungsmittelpunktes von der Entfernung der Angriffsstelle vom Schwerpunkt zeigt sich in den Linien bei Veränderung der Angriffsstelle. Schrägstellen des Wagens gegen die Kanone gibt die Wirkung von schief auf die Wagenwand treffenden Kräften. Verlegt man die Bleigewichte, so erhält man die Abhängigkeit der Bewegung vom Trägheitsmoment.

(Neesen.)

241 **Reibungsapparat** nach Proff. **Neesen** und **Paalzow**, Berlin.

Der Apparat besteht: 1) Aus einer in einem Rahmen drehbaren Walze um welche eine abwickelbare Schnur gewickelt ist. An dem Rahmen befinden sich 2 Schneiden zur Auflage von 2 Gewichten. 2) Aus mehreren Spiralfedern, welche an dem Rahmen eingehackt werden können und andrerseits an einem Stabe befestigt werden, der an dem einen Ende einer gewöhnlichen schiefen Ebene befestigt wird. An Stelle der Federn lässt sich eine Schnur anbringen, welche über eine Rolle an dem genannten Stabe läuft und am freien Ende eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichten trägt. Ebenso kann die über die Walze gehende Schnur über die gewöhnlich an der schiefen Ebene angebrachte Rolle geführt und gleichfalls am freien Ende mit einer Wagschale versehen werden.



Der Apparat soll zunächst die durch die Reibung verursachte Zugkraft bei umlaufenden Rädern demonstriren und messen. Zieht man an der Schnur, nachdem etwa die Feder in den Rahmen eingehängt ist, so geht die Walze solange vorwärts, bis die genannte Zugkraft gleich der Gegenkraft der ausgezogenen Feder ist, dann dreht sich die Walze auf der Stelle. Werden Gewichte auf den Rahmen gelegt, so geht die Walze weiter vor; ebenso wenn auf die glatte Fläche der schiefen Ebene Sandpapier aufgelegt wird. Durch Benützung der Schnüre mit Wagschalen lässt sich unter Abgleichung der Gewichte, so dass ein Stillstand der Walze oder ein Drehen auf der Stelle eintritt, der Reibungscoëfficient ermitteln.

Das Nähere ist in der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht 1889 Heft 3 enthalten.

(Neesen.)

242 Probestücke aus Bessemerstahl, auf Torsion geprüft im **Mechanisch-technischen Laboratorium der techn. Hochschule München**, Vorstand Prof. **J. Bauschinger**.

1. Rundwelle mit ursprünglich 7,75 cm Durchm.

Elasticitätsgrenzen bei 2125 kg m Torsions-Moment, entsprechend einer Maximalschubspannung von 2325 kg p. qcm an der Mantelfläche. Schub-Elasticitäts-Modul = 925000 kg p. qcm, Fliessgrenze bei 2250 kg m Torsionsmoment, entsprechend 2450 kg pro qcm. Verwunden und gebrochen mit 5425 kg m Torsionsmoment, entsprechend einer Schubspannung von 5950 kg pro qcm an der Mantelfläche.

2. Vierkantwelle mit ursprünglich quadratischem Querschnitt von 6,95 × 6,95 cm Grösse.

Elasticitätsgrenze bei 1750 kg m Torsions-Moment, entsprechend einer Schubspannung von 2330 kg pro qcm in der Mitte der Seitenflächen. Schubelasticitätsmodul = 889000 kg pro qcm. Fliessgrenze bei 2000 kg m Torsionsmoment, entsprechend 2660 kg pro qcm.

Verwunden und gebrochen mit 5650 kg m Torsions-Moment, entsprechend einer Maximalschubspannung von 7530 kg p. qcm in den Mitten der Seitenflächen.

3. Vierkantwelle mit ursprünglich rechteckigem Querschnitt von 13,82 × 3,50 cm Grösse.

Elasticitätsgrenze bei 1050 kg m Torsionsmoment, entsprechend 2770 kg p. qcm Schubspannung in den Mitten der breiten Seitenflächen. Schubelasticitätsmodul = 930000 kg pro qcm. Fliessgrenze bei ca. 1500 kg m Torsionsmoment, entsprechend einer Schubspannung von 4000 kg p. qcm.

Verwunden, aber nicht gebrochen mit 4600 kg m Torsions-Moment, entsprechend einer Maximal-Schubspannung von 12150 kg p. qcm in den Mitten der breiten Seitenflächen.

Alle Spannungen und der Elasticitäts-Modul nach den Saint-Venant-schen Formeln berechnet.

Die an den Kanten und den ursprünglich geraden Mantel- und darauf senkrechten Querlinien sichtbaren Gestaltsveränderungen rühren nicht bloss von Torsions- oder Schubkräften *senkrecht* zur Längsrichtung, sondern auch von Zugkräften *in* der Längsrichtung her, welch letztere dadurch hervorgebracht werden, dass die Enden der Probestücke beim Versuche *fest* eingespannt sein müssen.

(J. Bauschinger.)

243 Fünf Modelle zur Darstellung der Torsion von Prismen und einem (elliptischen) Cylinder, nach **De Saint-Venant**, Collection **Ch. Muret**, Paris, Verlag von **Delagrave**. Ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule München**.

Zum Vergleich mit den soeben aufgeführten Probestücken, wobei die Schlussbemerkung betr. der beim praktischen Versuch auftretenden Längsspannungen zu beachten ist.

Vergleiche zu diesen Modellen noch die unter No. 128 aufgeführten Photographien des Verlages von *Delagrave.*

---

244 **Abhandlungen und Werke zur graphischen Statik** von Prof. **H. T. Eddy,** Terre Haute, Indiana U. S. A.

Es liegen zur Ansicht auf die folgenden Werke und Abhandlungen von Eddy:

Researches in Graphical Statics.
Neue Constructionen aus der graphischen Statik.
Two general reciprocal Methods in Graphical Statics.
The Theorem of three Moments.
The Elastic Arch.
Maximum Stresses under concentrated Loads.
Auflagerungsdrucklinien und deren Eigenschaften.

S. Kinematische Modelle und Apparate, zugleich mit Bezug auf die Anwendungen in der Praxis.

245 **Zehn Modelle von Gelenkmechanismen,** in zwei Rahmen, von **A. B. Kempe,** M. A. F. R. S. London, Schatzmeister der London Math. Society.

Die Modelle No. 1 bis 5 illustriren die exacte Geradführung eines Punktes. Die ersten 4 Modelle sind von Kempe erfunden bez. nach den von ihm in den Proc. of the Royal Soc. No. 163 1875 gegebenen Entwicklungen construirt, während das fünfte Modell gleichzeitig von *Kempe* und *Sylvester* gegeben wurde. Dasselbe beruht auf der Anwendung des von Sylvester in der Zeitschrift Nature vol. XII pag. 214 beschriebenen, sogen. quadruplanaren Gelenkwerkes.

Das Modell No. 6 (man vergl. die aus Kempe's Büchlein: „How to draw a straight line" entnommenen Figg. 30 und 31) stellt einen Gelenkmechanismus vor, durch welchen zwei Glieder (Zirkelarme) um gemeinsame oder zu einander verschieden gelegene Fixpunkte mit gleich grosser, aber entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeit zu rotiren gezwungen sind. Der Apparat basirt auf dem Gedanken, dass, wenn zwei Contraparallelogramme einen Winkel gemeinsam haben, auch die übrigen gleich sein müssen. Es erscheinen nun im Apparate zwei proportionalseitige Contraparallelogramme, an einer Ecke invers geheftet.

Da die kleine Seite des ersten mit der grossen Seite des zweiten Contraparallelogramms identisch gemacht ist, so haben beide ein Glied vollkommen gemeinsam, an welchem sonach die gleichen übrigen Winkel anliegen. Man vergleiche übrigens „Messenger of Mathematics No. 44 New Series 1874“.

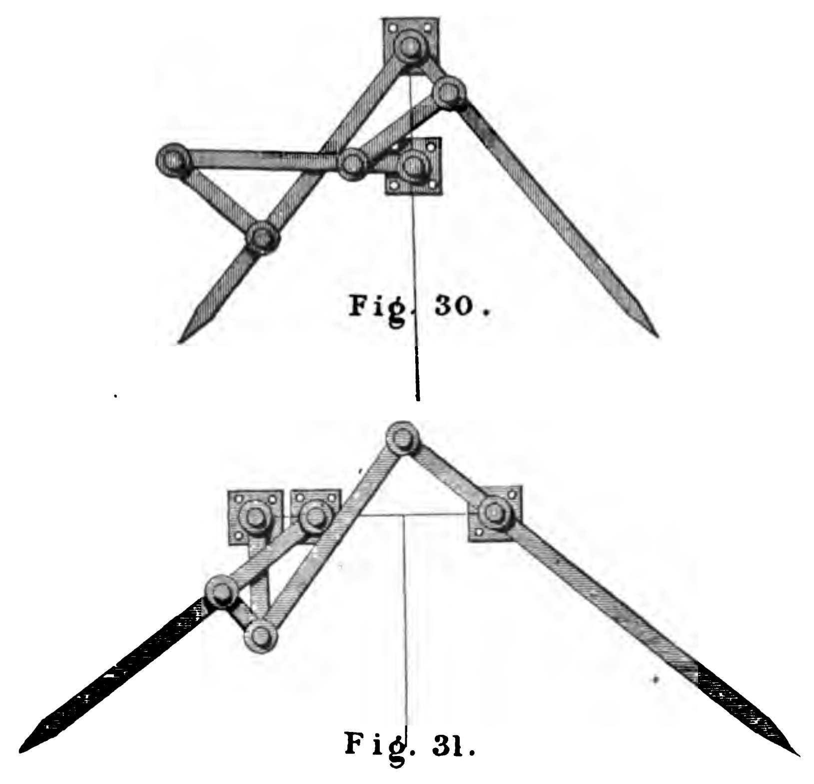


Fig. 30.

Fig. 31.

Die Modelle No. 7 und 8 stellen die Winkelvervielfacher oder wie *Sylvester* dieselben nennt: „Isoklinostaten“ vor. Die von einem Punkte auslaufenden, um diesen beweglichen Arme (ähnlich den Zirkelschenkeln) werden durch Zwischenschalten geeigneter, sich periodisch wiederholender, zwangläufiger Mechanismen gezwungen, der Reihe nach gleichen, durch Bewegung des Apparates aber veränderbaren Winkelabstand von einander zu behalten. Figur 32 zeigt den von Kempe angegebenen bei Modell No. 6 schon erklärten Zwischenmechanismus, Figur 33 den älteren, von Sylvester herrührenden.

Modell No. 9 zeigt eine vom Aussteller erfundene Geradführung, bei welcher ein bewegter Punkt durch geeignetes Gelenkwerk gezwungen wird, sich vertical zu bewegen.

Modell No. 10 führt den von Sylvester angegebenen „Plagiograph" oder „scew Pantograph" vor (vergl. Fig. 15). Durch diesen Apparat

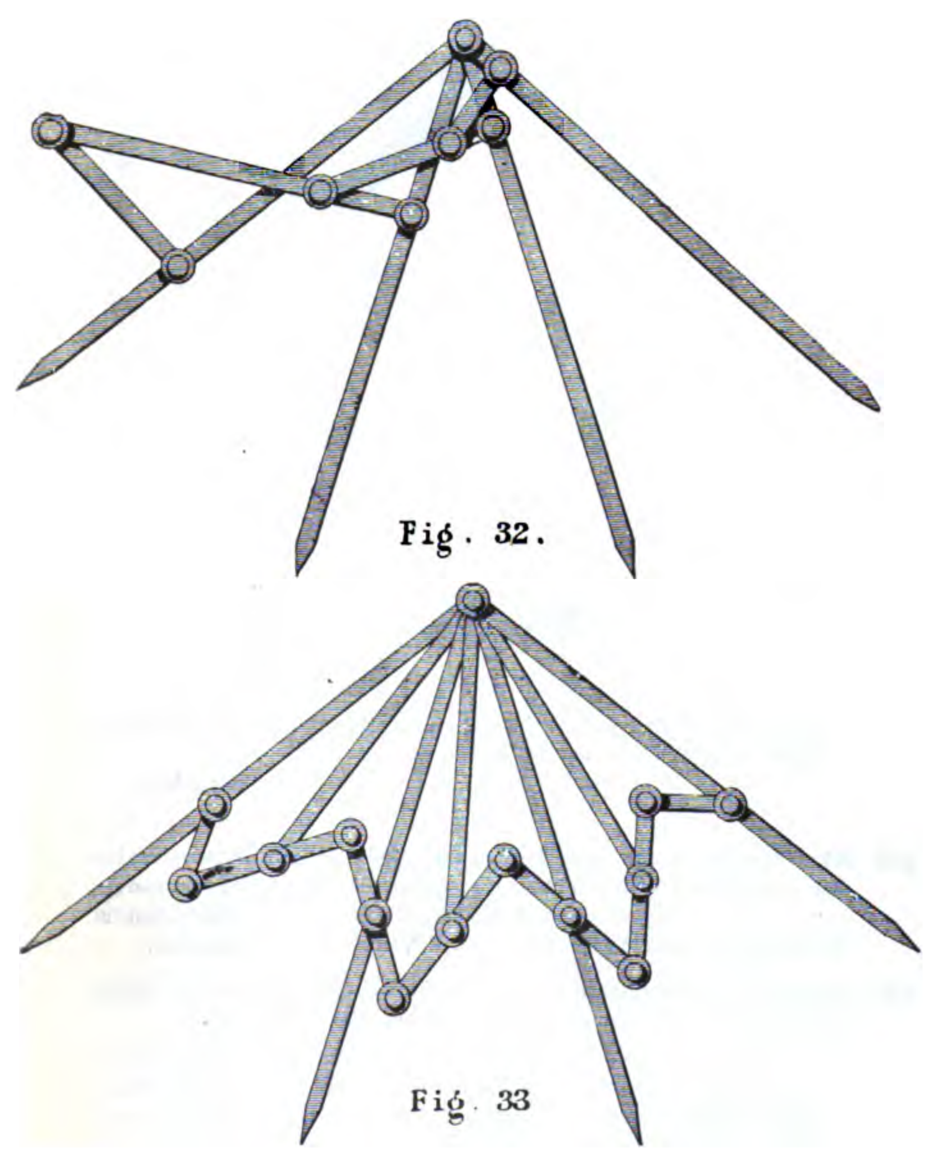


Fig. 32.

Fig. 33

können Zeichnungen nicht blos vergrössert, sondern auch zugleich, um einen justirbaren Winkel gegen das Original gedreht, übertragen werden.

Eine Beschreibung des Instruments gab Sylvester in der Zeitschrift Nature vol. XII pagg. 168 und 214. Der im Modell dargestellte Plagio-

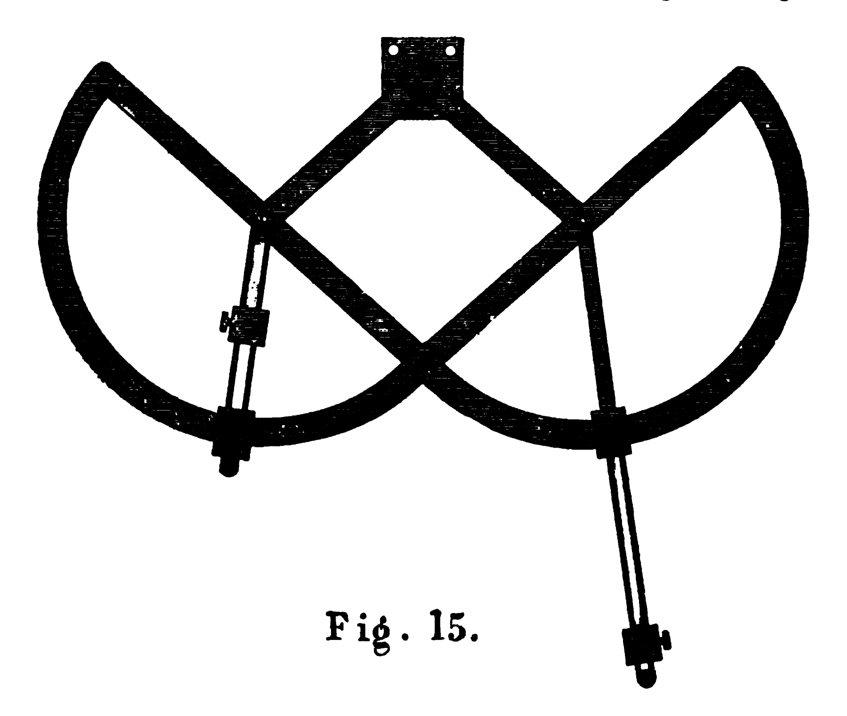


Fig. 15.

graph oder Schiefschreiber ist so eingestellt, dass er eine Zeichnung unter einer Wendung um 30° gerade verdoppelt.

(Kempe; Kleiber.)

246—248 Eine Serie von (zum Teil neuen) Modellen zur Demonstration der einfachsten freien und übergeschlossenen Gelenkmechanismen, zusammengestellt von Assistent **J. Kleiber**, 1892 verfertigt im **Math. Institut der techn. Hochschule München** von **J. Kleiber** und stud. **K. Fischer.**

246 Modelle zur Multiplication einer veränderlichen Grösse mit einem constanten reellen Factor (Storchschnabel, Pantographen).

Um eine veränderliche Länge in festem Verhältnis zu vergrössern oder zu verkleinern, kann man mehr oder minder einfache, in der Ebene oder räumlich bewegte Apparate im Wesentlichen nach folgenden Gesichtspunkten construiren:

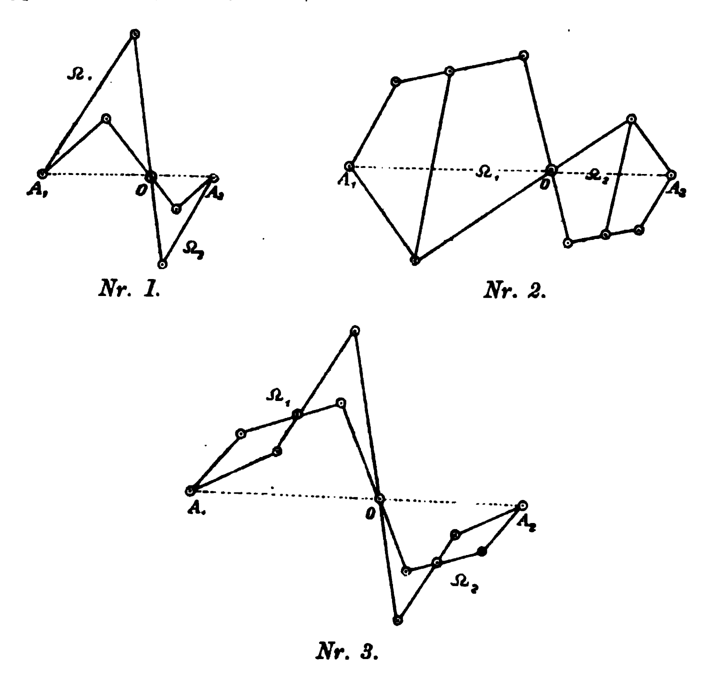
a) beruhend auf einem Sylvester'schen Princip,

b) beruhend auf dem Kettenprincip,

c) beruhend auf Eigenschaften des allgemeinen Vierecks,

d) beruhend auf Combination von Inversoren u. a.

Ad a) Das *Sylvester'sche Princip* kann wie folgt gefasst werden: „Man construire über der veränderlichen Länge OA_1 einen Gelenkmechanismus Ω_1, dessen einzelne Glieder dann fixirt erscheinen, wenn dies mit den durch O gehenden Gliedern der Fall ist, und verwandle diesen Apparat vom Ähnlichkeitspunkte O aus unter Zugrundelegung der vorgeschriebenen Multiplicationsconstanten in einen zweiten Ω_2. Dabei fallen die im Ähnlichkeitspunkte zusammenstossenden und sich entsprechenden Glieder von Ω_1 und Ω_2, abgesehen von der Grösse, je in eines zusammen. Hält man letztere Verbindung in O aufrecht, was leicht geschehen kann, so hat man, da OA_1 veränderlich ist, einen gewünschten Multiplicationsapparat. Die Ausführung dieses Gedankens liefert eine Reihe von Anordnungen, von denen mit Umgehung von Specialisirungen die folgenden Typen *Nr. 1, 2, 3* ausgeführt sind:

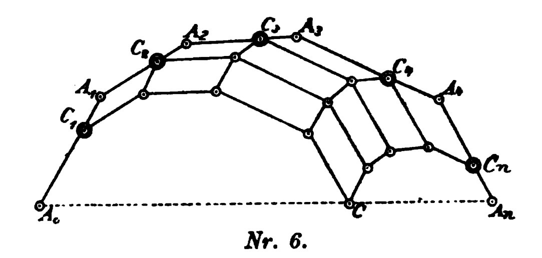


Nr. 1. *Nr. 2.*

Nr. 3.

Ad b) Das *Kettenprincip*, welches auch für die Ketten gilt, deren Glieder nicht alle in einer Ebene liegen, lautet: Sind $A_0\,A_1\,A_2\,A_3 \ldots A_n$ die Ecken einer polygonalen Kette, deren Seiten constant und je um die zugehörigen auf ihnen gelegenen Eckpunkte drehbar sind — sind ferner $C_1\,C_2 \ldots C_n$ Punkte, welche die Kettenseiten in dem constanten Verhältnis K teilen, dann kann man, ausgehend von diesen Punkten, in der durch die

Nr. 6 angedeuteten Art, dem Polygon ein bestimmtes Netz von Parallelogrammen einbeschreiben, dessen letzter Eckpunkt C schliesslich in gewünschter Weise die veränderliche Strecke $A_0 A_n$ immer im gegebenen Verhältnis K teilt.



Nr. 6.

Ausgeführt sind die Modelle:

Nr. 4. Kette mit 2 Gliedern. (*Sylvester*'scher Pantograph, Storchschnabel; Princip der Nürnberger Schere.)

Nr. 5. Kette mit 3 Gliedern. (Stellt bei jeder Fixirung von $A_0 A_n$ einen noch beweglichen Apparat dar, der dann zugleich einen Degenerationsfall der *Roberts*'schen simultan dreifachen Erzeugung der sog. Koppelcurve illustrirt.)

Nr. 6. Kette mit 5 Gliedern.

Nr. 7. ***Räumlich*** bewegliche dreigliedrige Kette. (Vergl. die Bem. zu *Nr. 5.*)

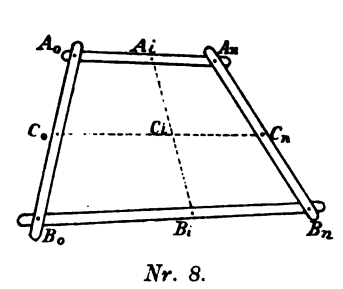
Ad c) ***Benützung von Viereckseigenschaften.*** Sind $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ auf der Geraden A und $B_0 B_1 B_2 \ldots B_n$ auf der Geraden B ***ähnliche*** Punktreihen, und teilt man die entsprechenden Verbindungen $A_i B_i$ sämtlich durch Punkte C_i im constanten Verhältnis $p : q$, so liegen diese Punkte C_i wieder auf einer Geraden, Γ, und zwar ist die von ihnen gebildete Punktreihe ähnlich den beiden gegebenen.

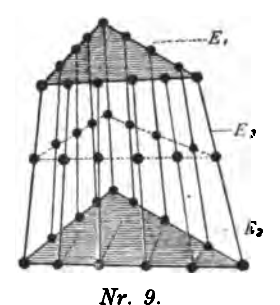
Für den Fall, dass $A_0 A_n B_n B_0$ ein Gelenkviereck von festen Seiten vorstellt, ist dieser Satz im Modell *Nr. 8* illustrirt. Die Verbindungen $A_i C_i B_i$, $C_o C_i C_n$ sind durch Gummifäden repräsentirt. Der auf dem Faden $A_i B_i$ bestimmte Punkt C_i und jener auf $C_o C_n$ aus der Ähnlichkeit der 3 Punktreihen hervorgehende Punkt C_i bleiben bei allen Bewegungen des Vierecks über einander. Das Modell ist beliebig räumlich beweglich.

Als Anwendung dieses Princips ist ein Modell *Nr. 9* ausgeführt, das eine bestimmte räumliche Transformation darzustellen geeignet ist.

Sind E_1 und E_2 zwei affin aufeinanderbezogene Dreiecke, deren entsprechende Punkte A_i und B_i mit einander (durch Gummifaden im Modelle realisirt) verbunden werden mögen, dann liegen die diese Verbindungen im constanten Verhältnis $p : q$ teilenden Punkte C in einer ***Ebene*** E_3,

wie man auch die E_1 und E_2 gegen einander verzerren möge. Die Begrenzungsflächen des im Modell versinnlichten Raumteils sind Paraboloide.

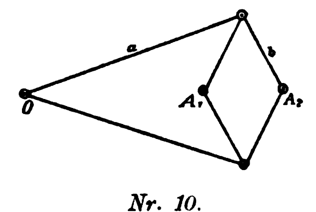


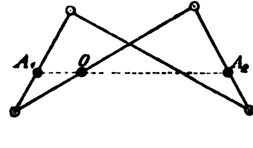


Nr. 8. *Nr. 9.*

Ad d) Es gibt zwei Typen von einfachen ***Inversoren*** d. h. Apparaten, welche bei gegebener Länge x die Länge $y = \frac{m^2}{x}$ zu construiren erlauben: den gewöhnlichen, von ***Peaucellier*** benützten (Mod. ***Nr. 10***) und den von ***Hart*** angegebenen (Mod. ***Nr. 11***). Zwei solcher Inversoren aufeinander angewendet, liefern einen Multiplicator, denn wenn der erste $y = \frac{m^2}{x}$, der zweite $z = \frac{n^2}{y}$ construirt, so ist eben $z = \frac{m^2}{n^2} . x$ und $\frac{m^2}{n^2}$ gleich der Multiplicationsconstanten.

Der Peaucellier'sche Inversor besteht im Wesentlichen aus einem beweglichen Rhombus und einem in zwei gegenüberliegenden Eckpunkten anschliessenden gleichschenkligen Knie. Der Kniepunkt O liegt dann immer so auf der Verbindungslinie der anderen Rhombenecken $A_1 A_2$, dass $OA_1 . OA_2 = \text{const.} = (a^2 - b^2)$ ist.





Nr. 10. *Nr. 11.*

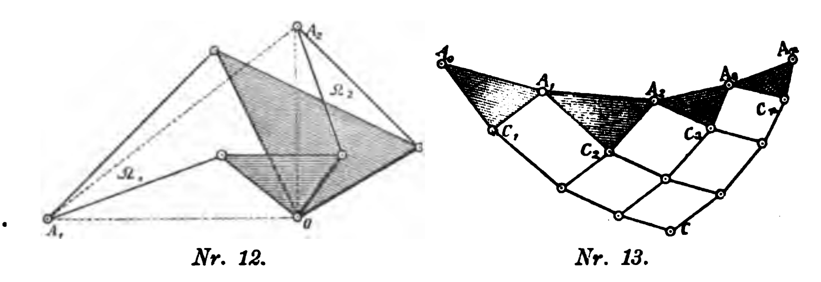
Der Hart'sche Inversor ist ein überschlagenes Parallelogramm. Markirt man auf einer zu seinen Diagonalen parallelen Linie 3 Schnittpunkte $O A_1 A_2$, so bleiben diese auch bei Verzerrungen des Apparats in einer Linie und ist $OA_1 \cdot OA_2 = \text{const.}$

247 Modelle zur Multiplication einer veränderlichen Grösse mit einem constanten complexen Factor (Plagiographen).

Soll eine veränderliche Länge zugleich in constantem Verhältnis vergrössert (verkleinert) und um einen constanten Winkel abgelenkt er-

scheinen, so kann man bei Construction diesbezüglicher Apparate genau die unter I a, b, c, d bezeichneten Gesichtspunkte wieder zugrunde legen.

Ad a) Dreht man den unter I a beschriebenen Gelenkmechanismus Ω_2 um einen bestimmten Winkel α, so erscheint die Schlusslinie OA_2 um diesen Winkel α abgelenkt. Da dabei die sich entsprechenden durch O gehenden Glieder auch diesen Winkel α bilden, so kann man die gewünschte Ablenkung vom Apparate selbstthätig vollziehen lassen, indem man ein für allemal die in O zusammenstossenden je sich entsprechenden Glieder in der Ablenkung α starr verbindet. Hiezu ist blos der dem Fall *Nr. 1* entsprechende im Modell *Nr. 12* (ein verallgemeinerter *Sylvester'scher Plagiograph*) zur Darstellung gebracht.



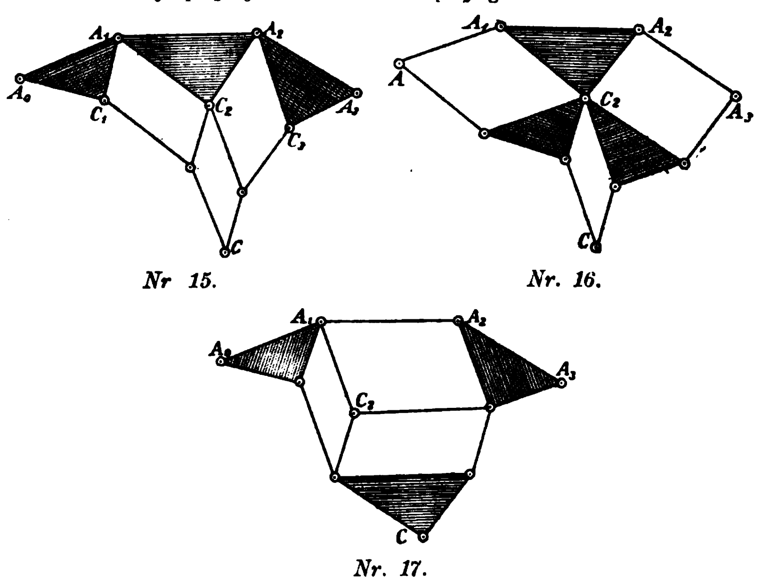
Nr. 12. *Nr. 13.*

Ad b) Statt in entsprechender Weise auf den unter I b benutzten Kettengliedern Punkte B in den Seiten zu bestimmen, kann man über diesen Seiten *ähnliche* Dreiecke mit den Spitzen $C_1 C_2 \ldots C_n$ anbringen. Das im Übrigen genau so wie dort, auch hier anzuschliessende Netz von Parallelogrammen liefert dann einen letzten Punkt C (Resultantenpunkt), der mit der veränderlich langen Basis $A_0 A_n$ ein Dreieck $A_0 A_n$ C liefert, das bei allen Verzerrungen des Mechanismus immer den an den Seiten angehefteten Dreiecken $A_{i-1} A_i C_i$ ähnlich bleibt.

Das Modell *Nr. 13* illustrirt diesen Satz. Bei einer Kette von 2 Gliedern (Modell *Nr. 14*) erhält man den bekannten, auch aus Modell *Nr. 12* durch Specialisirung herleitbaren Apparat Sylvester's (Plagiograph).

Die Modelle *Nr. 15*, *Nr. 16*, *Nr. 17* schliessen sich an den Fall einer Kette mit 3 Gliedern an. Während *Nr. 15* direct den beschriebenen Kettensatz darstellt, gehen *Nr. 16* und *Nr. 17* aus diesem Apparate unter Anwendung des Princips vom Austausch von Dreiecken und Parallelogrammen hervor. In allen drei Modellen beschreibt nach diesem Princip der Punkt C_2, welcher „Koppelpunkt" benannt wird, dieselbe Curve, die sog. Koppelcurve. Die 3 Modelle sind so eingerichtet, dass die Punkte A_0 und A_3 über einem von Schienen gefassten Schlitz beliebig verschoben und fixirt werden können, in welchem Fall nach dem oben angeführten Satz auch der Punkt C fest, der Mechanismus aber trotzdem beweglich ist. Es liefern sohin diese 3 Modelle einfache Typen zu sogenannten übergeschlossenen Mechanismen. Historisch interessant ist der

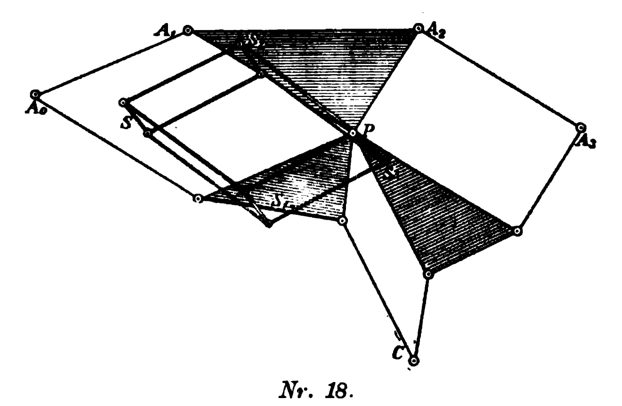
Typus des Modells *Nr. 16*, da er die bereits von ***Roberts*** nachgewiesene simultan dreifache Erzeugung der durch Punkt C_2 beschriebenen Koppelcurve illustrirt. Um nämlich diese Curve zu zeichnen, bedarf man blos der Kette $A_0 A_1 A_2 A_3$ und des über $A_1 A_2$ gehefteten Dreiecks. Eine



Nr 15. *Nr. 16.*

Nr. 17.

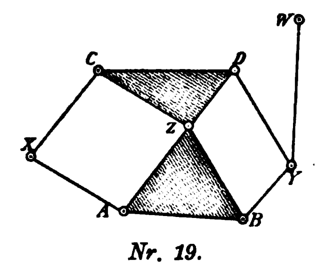
analoge Kette samt Dreieck befindet sich aber auch je über den Fixpunktpaaren $A_0 C$ und $A_3 C$, so dass thatsächlich die Doppelcurve gleichzeitig dreifach, d. i. durch die 3 in C_2 coincidirenden Dreieckspitzen beschrieben wird.



Nr. 18.

Verfasser dieses hat in einer am Schlusse näher bezeichneten Note gezeigt, dass man nur in singulärer Weise von einer blos dreifach simu-

tanen Erzeugung der Koppelcurve sprechen kann, da dieselbo thatsächlich in simultan ∞^2facher Weise durch Tripel von Parallelepipeden zu erzeugen ist, von welchen allerdings ein einziges in ein Tripel von Parallelogrammen ausartet und zum *Roberts*'schen Satze führt. Es beruht diese Erkenntnis im Wesentlichen auf folgendem, einfach zu beweisenden Satze: Sind $S_1 S_2 S_3$ homolog entsprechende Punkte in den ähnlichen, affin bezogenen, in P gekoppelten Dreiecken, so bleibt der Gegenpunkt S des aus den 3 Längen $S_1 P_2$, $S_2 P_2$, $S_3 P_2$ aus P_2 zu construirenden Parallelepipedes zugleich affin entsprechender Punkt in dem Hauptdreiecke $A_0 A_3 C$, das ja den oben genannten auch ähnlich ist, bei aller Beweglichkeit des Apparats. Diesen Satz soll Mod *Nr. 18* illustriren. Durch Specialisirung dieses Satzes erhält man eine Reihe von neuen a. a. O. näher beschriebenen Typen zur einfachen Koppelcurvenerzeugung, von denen ein Fall im Modell *Nr. 19* vorgestellt werde. Es beruht auf dem Satz: „Koppelt man zwei willkürliche Dreiecke



Nr. 19.

$$Z \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \Big\} \text{ und } Z \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \Big\}$$

in Z zusammen, ergänzt die von Z auslaufenden Seitenpaare zu den 2 Parallelogrammen

$$\Big\{ Z \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} X \Big\} \qquad \Big\{ Z \begin{matrix} B \\ D \end{matrix} Y \Big\}$$

und lässt von den Punkten X, Y, Z, in beliebiger Anordnung, den einen fest, den zweiten auf einem Kreise laufen, dann beschreibt der dritte die Koppelcurve."

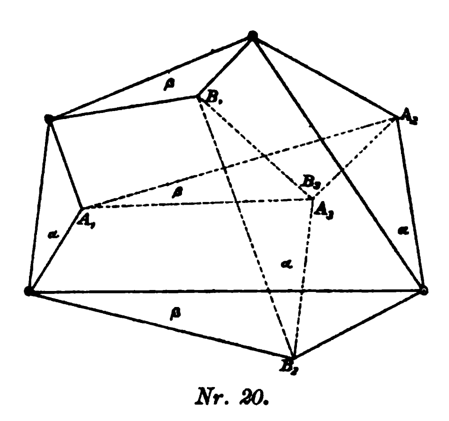
NB. Das Froschschenkelsystem im Hauck'schen Perspectographen ist hievon ein Specialfall. Doch wird dort der Apparat nur so umgeformt benutzt, dass er ein ähnlich veränderliches Dreieck erzeugt.

Ad c) Der hiehergehörige Satz über das allgemeine ebene Viereck besagt:

Beschreibt man über dem ersten Paar von Gegenseiten des Vierecks ähnliche Dreiecke von der Form α und mit den Spitzen A_1 und A_2, analog über dem zweiten Paar von Gegenseiten ein anderes Paar von ähnlichen Dreiecken von der Form β mit den Spitzen B_1 und B_2, ferner

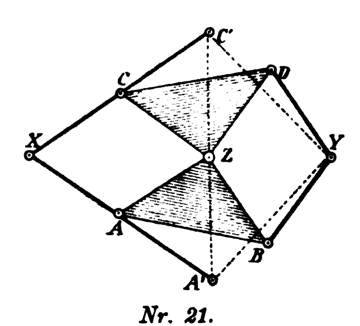
über $A_1 A_2$ ein Dreieck von der Form β mit der Spitze B_3
„ $B_1 B_2$ „ „ „ „ „ α „ „ „ A_3
so werden deren Spitzen A_3 B_3 zusammenfallen.

Hiezu Modell *Nr. 20.*



Nr. 20.

Ad d) Durch Combination höherer Inversoren, wie dies z. B. beim Hauck'schen Froschschenkelsystem der Fall ist, erzeugt man ebenfalls ähnlich veränderliche Dreiecke. Werden zu dem Ende in *Nr. 19* die



Nr. 21.

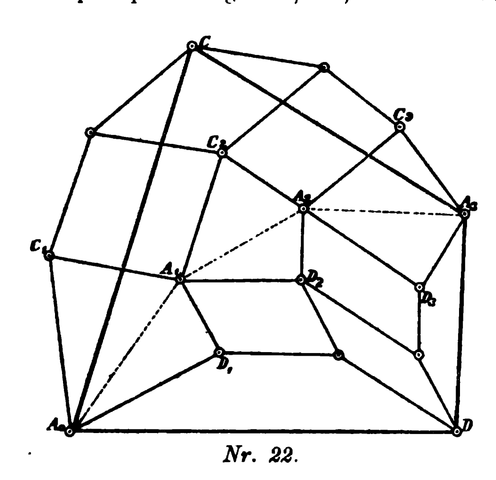
beiden Dreiecke bei Z rechtwinklig gleichschenklig, so geben die Endpunkte der verdoppelten Arme XC und XA Punkte C und C' die mit Y ein ähnlich veränderliches gleichschenkliges Dreieck beschreiben. Dies der wesentlichste Hilfsapparat des *Hauck*'schen Perspectographen, den man aber ebenso gut durch einen der oben unter a, b, c beschriebenen ersetzen könnte.

248 Modelle zur Multiplication mit veränderlichen complexen Factoren.

Die Aufgabe, mit einem veränderlichen complexen oder auch nur reellen Factor zu multipliciren, führt gewöhnlich auf das Problem der

Geradführung, Winkelverdoppelung, Winkelverlegung oder auf das Beschreiben eines Kreises von veränderlich vorzugebendem Radius.

Ein Universalapparat, welcher diese Aufgaben gleichzeitig in der Ebene, ohne directe Anwendung von Inversoren, sondern aus der Umkehrung des Kettenprincips hervorgehend, löst, ist in Modell *Nr. 22* aus-

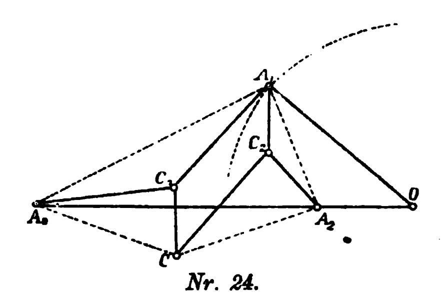


Nr. 22.

geführt. Der Apparat ist auch um deswillen noch bemerkenswert, weil er als sog. übergeschlossener Mechanismus einer zweifachen Beweglichkeit zugleich fähig ist. Während bei gewöhnlichen übergeschlossenen Mechanismen, wie solche von ***Kempe***, ***Darboux***, ***Burmester*** entwickelt werden, das Feststellen von zwei benachbarten Gliedern den Apparat selbst auch fixirt, hat der oben bezeichnete Apparat immer noch eine aus dem Kettenprincip resultirende freie Beweglichkeit. Die ausführlichere Beschreibung des Apparats erspart ein Blick auf die Figur. Man erkennt, dass über einer ideellen Kette $A_0 A_1 A_2 A_3$ zwei Apparate vom Typus des Modells *Nr. 15* angebracht sind, doch mit dem Unterschiede gegen früher, dass die Kettenglieder fortgelassen, dafür aber die Resultantenpunkte C und D mit den Kettenendpunkten A_0 und A_3 durch Stäbe von solchen Abmessungen verknüpft sind, dass die über den Seiten $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ auftretenden Kettenvierecke in einer Position des Mechanismus ähnlich sind. In diesem Falle bleiben dieselben auch dann noch ähnlich, wenn man den Apparat irgendwie verzerrt. Da man es in der Hand hat, dem Gelenkviereck $A_0 A_3$ C D irgend eine Gestalt zu erteilen, ist solches auch, und hiedurch bedingt, mit den übrigen über der ideellen Kette sich findenden, unter sich und dem angegebenen Viereck ähnlich bleibenden Gelenkvierecken der Fall.

Modell *Nr. 23* stellt den einfachen Geradführungsmechanismus von ***Peaucellier***, Modell *Nr. 24* den allgemeinen zuerst von ***Kempe*** her-

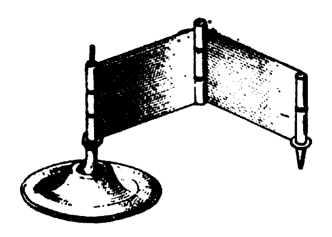
rührenden, in einer von mir a. a. O. näher bezeichneten Gestalt, Modell *Nr. 25* den neuen fünfgliedrigen von *Hart* vor.



Nr. 24.

Auch aus anderen als den hier benützten Eigenschaften des Vierecks kann man Geradführung ableiten, doch sei hier auf eine erst erscheinende. unten näher bezeichnete Notiz in Schlömilch's Zeitschr. f. M. u. Ph. verwiesen.

Lässt man nicht blos eben bewegliche, sondern räumlich bewegliche Mechanismen zu, was allerdings Charniere bez. Kugelgelenke erfordert, so wird eine Gerade als Schnitt von 2 Ebenen erzeugt. Es tritt im Raum sohin statt des Grundproblems der Geradenerzeugung das Problem der Ebenenerzeugung auf. Einen Apparat aber herzustellen, der diese Aufgabe löst, ist leicht. Zu dem Ende koppelt man zwei Platten an einer Kante durch ein Charnier (als Äquivalent zweier Kugelgelenke) zusammen



Nr. 26.

und lässt die eine Platte um eine zum ersten Charnier parallele Kante vermöge eines weiteren Charniers rotiren. Dann sieht man sofort, dass jeder Punkt der andern Platte Punkte je einer Ebene beschreibt.

Durch Combination zweier solcher Mechanismen erhält man eine räumliche Geradführung.*)

*) Bezüglich einer anderen von *Darboux* und *Königs* herrührenden Ebenenführung vergleiche man die Notiz von Darboux in den *Comptes rendus de l'Acad. d. Sc., 1891*, sowie das Referat von Königs in der *Revue générale des sciences pures et appl. 2° année 1891.*

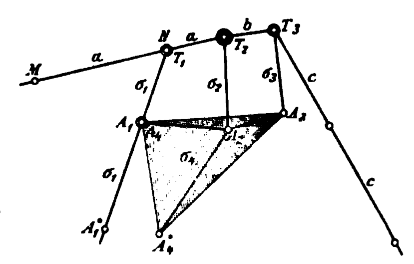
Die Noten, auf welche im Laufe der Beschreibungen verwiesen worden ist, tragen den Titel: Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen. I., II, III. Aufsatz. Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Physik. XXXVI. u. f. Bd.

(J. Kleiber.)

Bemerkung. Die mit Aufwand der geringsten Mittel aus Eisen, bez. Holz und Carton für die Zwecke des Unterrichts verfertigten Modelle wollen gleichzeitig in ihrer Primitivität die Schüler zur Selbstverfertigung derartiger Modelle aufmuntern.

249 **Modell zur Darlegung des Charakters von Tripeln entsprechender Krümmungs-Mittelpunkte der ebenen Relativbewegung dreier starrer Systeme** von Prof. **Rodenberg**, techn. Hochschule Hannover.

Drei Punkte $A_1 A_2 A_3$ welche bezw. den bewegten Systemen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ angehören, bilden ein „Tripel", wenn je zwei der Punkte entsprechende Krümmungs-Mittelpunkte der Relativbewegung ihrer beiden Systeme sind. Die Einführung dieses Begriffes zeigte sich als besonders zweckmässig bei der Behandlung aller Fragen, welche auf Bewegungen in zwei consecutiven Zeitelementen, also insbesondere auf Beschleunigungen, Bezug haben *).



Liegen $A_1 A_2 A_3$ *nicht* in einer Geraden, so ist das von ihnen gebildete Dreieck während zweier consecutiver Zeitelemente starr. Drehen sich insbesondere die drei Systeme, wie es am Modell der Fall, dauernd um drei Punkte einer starren Ebene σ_4 (der Messing-Platte), so bilden diese Punkte ein Tripel für den ganzen Verlauf der Bewegung. Dass σ_4 am Modell dem festgestellten Gliede angehört, ist für die Relativ-Bewegung von $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ gänzlich bedeutungslos, erleichtert aber wesentlich die Übersicht. Nun gibt es, wie ich in einem demnächst in Schlömilch's „Zeitschrift für Math. und Physik" erscheinenden Aufsatze bewiesen habe, stets 5 solcher *nicht* geradliniger Tripel; eines derselben ist also jedenfalls reell und somit besitzt die am Modell veranschaulichte Bewegung für die beiden in Betracht kommenden Zeitelemente allgemein giltige Eigenschaften. Nicht so einfach ist die Bewegung des auf der Polgeraden von $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ stets vorhandenen geradlinigen Tripels $T_1 T_2 T_3$ zu verfolgen, welches nur während

*) Vergl. meine Arbeit: „*Die Bestimmung der quadratischen Verwandtschaft der Kr. Mittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette.*" Zeitschrift des Hannoverschen Arch.- und Ing.-Vereins 1890 S. 192 f. Ferner *Burmester*: „*Über die momentane Bewegung der ebenen Mechanismen*", Prager technische Blätter XXII. Jahrgang Heft 1 und 2

eines der beiden Zeitelemente starr bleibt, sofern nicht besondere Bedingungen hinzukommen $T_1T_2T_3$ bilden mit den Polen 12, 23, 31 eine Involution und $\overline{A_1T_1}$, $\overline{A_2T_2}$, $\overline{A_3T_3}$ gehen durch einen Punkt, wie in meiner oben angeführten Arbeit Seite 197 Satz 4 angegeben ist. Die Aufgabe des Modelles ist es, die Bewegung von $T_1T_2T_3$ zu veranschaulichen. Die Anordnung ist so getroffen, dass T_1 und T_2 sowohl, wie T_2 und T_3 während des ganzen Verlaufes der Bewegung entsprechende Krümmungs-Mittelpunkte bleiben, indem jedes dieser Punktpaare durch einen Stab, a bezw. b, gelenkig verbunden ist. T_1T_3 sind hingegen nur dann entsprechende Punkte, wenn a und b in gerader Linie liegen. Um das Charakteristische des Tripels $T_1T_2T_3$ zu erkennen, betrachte man zunächst drei Punkte auf der Polgeraden, welche kein Tripel bilden. Man nehme hierzu den T_1 mit N verbindenden Bolzen heraus und schliesse A_1^* gelenkig an M; bringe darauf $A_1^*\,T_2T_3$ in gerade Linie. Dann gehen $A_1^*A_1$, A_2T_2, A_3T_3 nicht durch einen Punkt, und $A_1^*T_2T_3$ bilden somit kein Tripel. Wir betrachten nun und in Zukunft die folgenden drei Lagen:

I. Äusserste Linkslage der beweglichen Modellteile;

II. Mittellage, in der die Stabrichtungen von a und b in der Polgeraden vereinigt liegen;

III. Äusserste Rechtslage.

Man findet nun für die hergestellte Anordnung in

I. $\angle A_1^*\,T_2T_3$ concav nach unten,
in II. $\angle A_1^*\,T_2T_3 = 180^\circ$,
in III. $\angle A_1^*\,T_2T_3$ concav nach oben,

d. h. *die Relativbewegung von a und b findet stets in demselben Sinne statt.*

Vereint man a und b mit Hilfe des Bügels J zu einem starren Systeme σ_5, so ist der Mechanismus starr; schliesst man andererseits den Stab c gelenkig an M und A_1, so hat man einen Momentmechanismus, welcher *eine* unendlich kleine Bewegung ausführen kann. —

Wir stellen jetzt die ursprüngliche Lage her, schliessen wieder T_1 an N und nehmen c fort.

Dann ist

in I. $\angle T_1T_2T_3$ concav nach unten,
in II. $\angle T_1T_2T_3 = 180^\circ$,
in III. $\angle T_1T_2T_3$ wieder concav nach unten.

Die Bewegung von a gegen b ist also rückläufig geworden: *Die relativen Winkelgeschwindigkeiten, mit der sich die Seiten des veränderlichen Dreiecks* $T_1T_2T_3$ *gegen einander drehen, sind sämtlich Null, wenn das Dreieck ein geradliniges Tripel ist.*

Nach Anlegung des Bügels ist jetzt noch *eine*, nach gelenkiger Verbindung von c mit T_1 sind noch *zwei* unendlich kleine Bewegungen möglich, welche sich, in Folge der Elasticität der Teile und des unvermeidlichen Spielraumes der Gelenke, in der grösseren Beweglichkeit gegenüber der in der ersten Anordnung möglichen, kenntlich machen.

Das Modell gestattet noch die Ausführung **einer speciellen Bewegung** von $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Beseitigt man die Verbindung von A_1 und A_4, und stellt dafür die von A_1^* und A_4^* her, so sind in der Lage II die mit $A_1^*A_2A_3$ zusammenfallenden Punkte von σ_4 entsprechende Krümmungs-Mittelpunkte zu den bezw. mit T_1, T_2, T_3 vereinigten Punkten von σ_5, wenn σ_5 wie vorhin die durch den Bügel bewirkte starre Vereinigung von a und b bedeutet. Nach erfolgter Anlegung des Bügels sind also noch 2 unendlich kleine Bewegungen möglich, während die Verbindung von T_1 mit c deren drei zulässt. Nehmen wir jedoch anstatt des Momentmechanismus den zwangläufig beweglichen, so ist

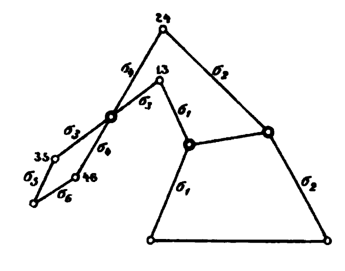
in I. $\angle T_1T_2T_3$ concav nach unten,
in II. $\angle T_1T_2T_3 = 180°$,
in III. $\angle T_1T_2T_3$ concav nach oben

wie in der zuerst getroffenen Anordnung, aber die Bewegung ist jetzt in der kritischen Lage II zweimal rückläufig geworden, was sich durch einen deutlich bemerkbaren Stillstand der Glieder a und b kennzeichnet. Die geometrischen Symbole für die drei gefundenen Bewegungen von a gegen b wären bezw. etwa eine gewöhnliche Curventangente, eine Wendetangente und die Tangente in einem Undulationspunkte.

(Rodenberg).

250 Mechanismus, bei welchem eine Wechsellage den Übergang zwischen einem zwangläufigen und einem nicht zwangläufigen Mechanismus vermittelt. Von Prof. **Rodenberg**, techn. Hochschule Hannover.

Die Bezeichnung des Modells lässt erkennen, dass die bisherige Einteilung der Mechanismen in zwangläufige und nicht zwangläufige eine dritte Art unberücksichtigt lässt, welche die Eigenschaften der beiden ersten Arten in sich vereinigt und als Zwitter-Mechanismus bezeichnet werden könnte. Behufs Herstellung eines solchen nehme man eine Reihe zwangläufiger Ketten, z. B. wie am Modell 1) das Gelenkviereck mit dem festgestellten Gliede, um welches sich die gekoppelten Glieder $\sigma_1\sigma_2$ drehen; 2) das Gelenk $\sigma_3\sigma_4$; 3) das Gelenk $\sigma_5\sigma_6$. Man schliesse dann die einzelnen Ketten in der bezeichneten Reihenfolge durch je zwei Gelenkpunkte, nämlich 13, 24; 35, 46 an einander.



Das Erzeugnis ist nach bekannten Sätzen im Allgemeinen abermals zwangläufig.

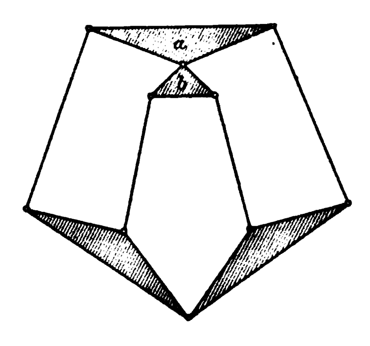
Sind jedoch die Dimensionen, wie es am Modell der Fall, so gewählt, dass im Laufe der Bewegung *gleichzeitig* 13 auf 24, 35 auf 46

fällt, so befindet sich in diesem Momente der Mechanismus in einer Wechsellage, von der aus man die Bewegung so fortsetzen kann, dass die drei Teil-Ketten sich wie ebenso viele starre Systeme verhalten, welche durch zwei Gelenkpunkte mit einander verbunden sind. Ein solcher offener Gliederzug ist aber nicht zwangläufig. Geht man statt von dreien, von n Ketten aus, so entsteht in gleicher Weise ein n-gliedriger Zug mit n — 1 Gelenkpunkten, so zwar, dass das erste Glied mit dem zweiten, dieses mit dem dritten u. s. w., das (n — 1)-ste mit dem n-ten durch je einen Gelenkpunkt verbunden ist. Ein Glied ist dann in Bezug auf jedes andere vollständig frei bewegbar, von dem es durch zwei oder mehr Glieder getrennt ist.

(Rodenberg.)

251 **Modell einer kinematischen Kette**, nach Angabe von Prof. **Grübler; Kinematische Sammlung des Polytechnicums zu Riga.**

Das Modell stellt eine zwangläufig bewegliche, ebene kinematische Kette von 8 Gliedern dar; letztere sind durch 10 Gelenke (Drehkörperpaare) paarweise derart mit einander verbunden, dass ***kein Gelenkviereck*** in der Kette auftritt. Das ternäre Glied a (s. nebenstehende Figur) ist im Modell das ruhende, b dagegen das treibende; letzteres kann durch eine Kurbel auf der Rückseite des Modelles in Umdrehung versetzt werden. Die Lage der Kurbelaxe im Gestell kann leicht geändert werden; auch lassen sich den Gelenkaxen auf den übrigen ternären Gliedern andere Lagen geben. Endlich kann den 4 binären Gliedern innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Länge gegeben werden.



Das Modell dient zur Veranschaulichung

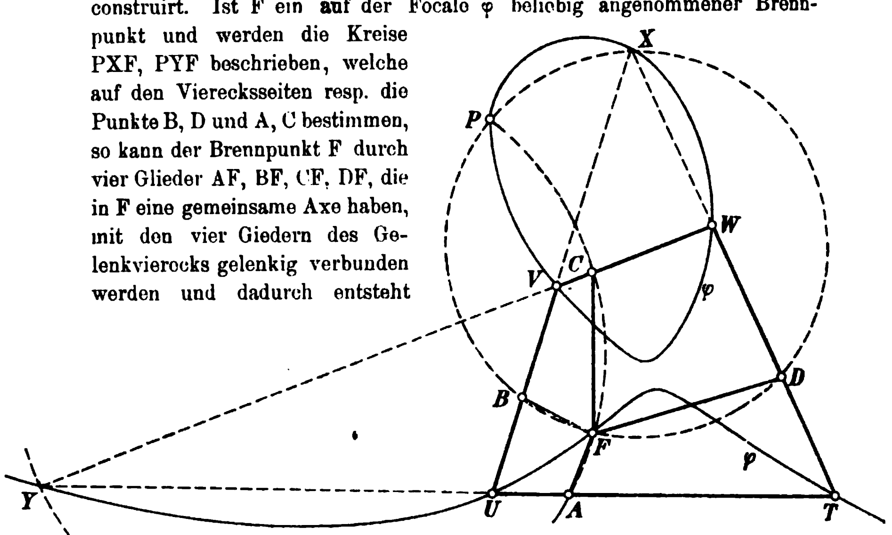
1. Der Unabhängigkeit der Zwangläufigkeit von den Dimensionen der Kettenglieder;
2. Des Einflusses der Dimensionen der Kettenglieder auf die Singularitäten der Bahncurven und die Grenzen der Bewegungsgebiete;
3. Des Auftretens von Tod- und Wechsellagen.

(Grübler.)

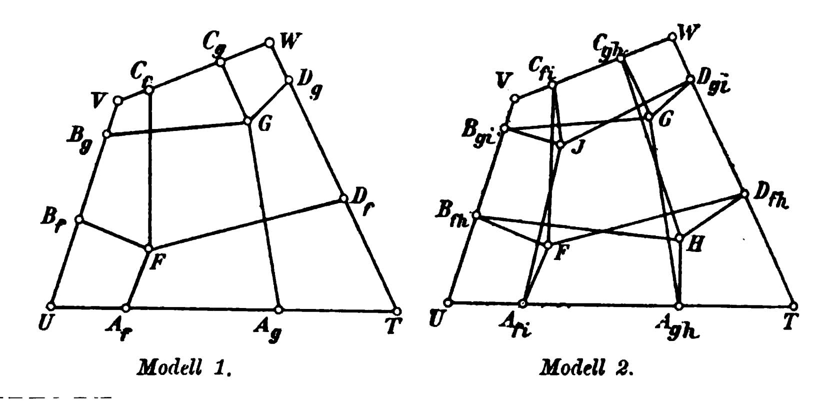
252 **Brennpunkt-Mechanismen.** 6 Modelle aus Aluminium von Prof. **L. Burmester** (angefertigt im math.-phys. Institut von **Th. Edelmann**, München). **Kinematische Sammlung der techn. Hochschule in München.**

Für das gegebene Gelenkviereck TUVW ist die Focale φ gezeichnet, welche die Brennpunkte aller diesem Viereck eingeschriebenen Kegel-

schnitte enthält, und der Brennpunkt P der angeschriebenen Parabel construirt. Ist F ein auf der Focale φ beliebig angenommener Brennpunkt und werden die Kreise PXF, PYF beschrieben, welche auf den Vierecksseiten resp. die Punkte B, D und A, C bestimmen, so kann der Brennpunkt F durch vier Glieder AF, BF, CF, DF, die in F eine gemeinsame Axe haben, mit den vier Giedern des Gelenkvierecks gelenkig verbunden werden und dadurch entsteht



ein übergeschlossener Mechanismus.*) Im Allgemeinen wird, wenn an das Gelenkviereck T U V W ein Knie B F D drehbar angeschlossen ist, dieser Mechanismus durch ein eingefügtes gelenkig verbundenes Glied A F starr. Bei diesem übergeschlossenen Mechanismus bleibt während der Bewegung der Viergliedpunkt F beständig ein Brennpunkt eines dem Gelenkviereck T U V W eingeschriebenen Kegelschnittes. Ein derartiger Mechanismus sei *Brennpunkt-Mechanismus* genannt. So kann jeder Punkt



Modell 1. *Modell 2.*

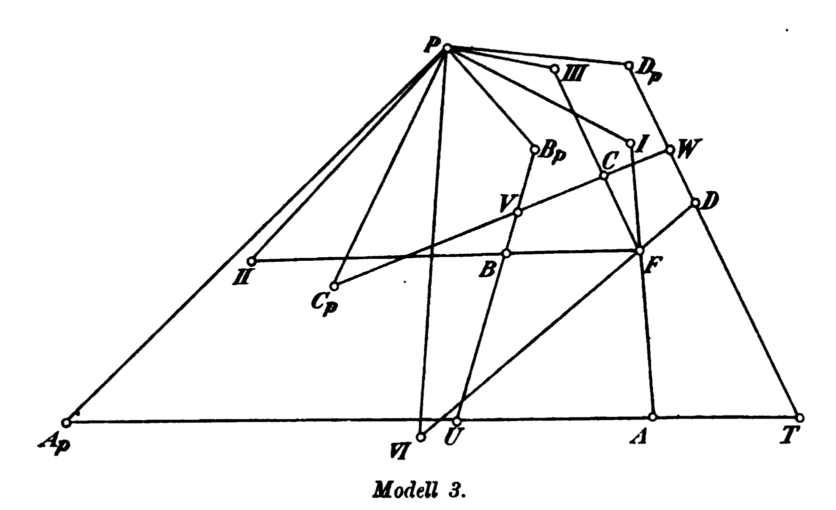
*) Vergl. Hart, Proceedings of the London Math. Soc. Vol. VIII, p. 288. 1876. Kempe ebenda, Vol. IX, p. 138. 1877. Darboux, Bulletin des Sciences math. 1879. T. III. p. 144.

der Focale φ, also jeder Brennpunkt als Viergliedpunkt durch vier Glieder mit dem Gelenkviereck, dem Stammviereck TUVW gelenkig verbunden werden und jedem Brennpunkt F entsprechen vier Anschlusspunkte A, B, C, D und vier Fachvierecke, für welche F die gemeinsame Ecke bildet. Es ist Fachviereck TAFD $\sim$ FCVB, ferner UAFB $\sim$ FCWD. Die vier Anschlusspunkte A, B, C, D liegen stets auf einem Kreise. Hieraus ergeben sich viele andere invariante Beziehungen.

Modell Nr. 1 ist ein Brennpunkt-Mechanismus mit zwei Brennpunkten F, G, die während der Bewegung beständig einem veränderlichen, dem Stammviereck eingeschriebenen Kegelschnitt angehören.

Modell Nr. 2 ist ein Brennpunkt-Mechanismus mit zwei Brennpunktpaaren FG und HJ, welche resp. zwei veränderlichen Kegelschnitten angehören; dabei haben je zwei nicht zusammengehörige Brennpunkte an zwei gegenüberliegende Seiten gemeinsame Anschlusspunkte.

Modell Nr. 3 ist ein Brennpunkt-Mechanismus, bei welchem ein beliebiger Brennpunkt F und ferner der Parabelbrennpunkt P mit dem Stammviereck durch je vier Glieder verbunden sind. Es kann dann der

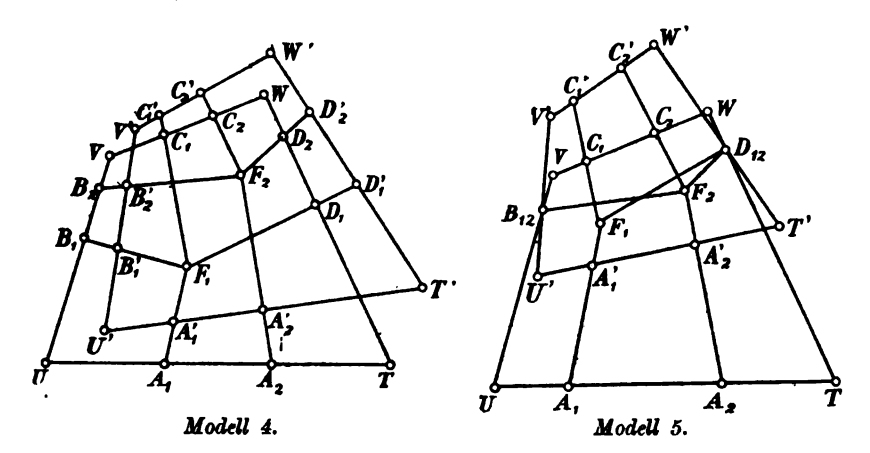


Modell 3.

Parabelbrennpunkt P auch durch vier Glieder PI, PII, PIII, PIV mit den Anschlussgliedern FA, FB, FC, FD des Brennpunktes F gelenkig verbunden werden.

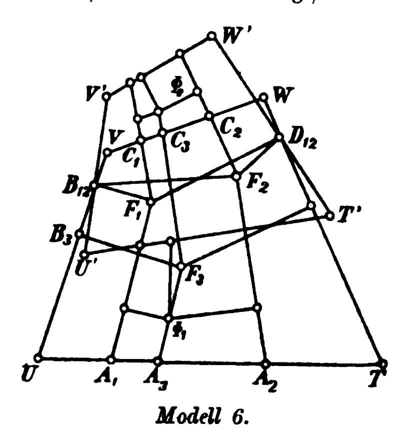
Modell Nr. 4 ist ein Brennpunkt-Mechanismus, bei welchem zwei nicht zu einem Kegelschnitte gehörende Brennpunkte F_1, F_2 mit dem Stammviereck TUVW verbunden sind, und es kann dann auch ein dem Stammviereck ähnliches Gelenkviereck T'U'V'W' durch entsprechende Axen mit den 8 Anschlussgliedern verbunden werden.

Modell Nr. 5 ist ein Brennpunkt-Mechanismus, der als besonderer Fall aus *Nr. 4* hervorgeht. Die beiden nicht zu einem Kegelschnitt gehörenden Brennpunkte F_1, F_2 haben auf den Seiten U V, T W des Stammvierecks gemeinsame Anschlusspunkte B_{12}, D_{12}, in welchen die Seiten U' W', T' W' des Vierecks T' U' V' W' durch Axen angeschlossen sind.



Modell 4. *Modell 5.*

Modell Nr. 6 ist ein Brennpunkt-Mechanismus wie *Nr. 5* mit noch mehr eingefügten Gliedern. Ausser jenen beiden Brennpunkten F_1, F_2 ist noch ein beliebiger Brennpunkt F_3 mit dem Stammviereck verbunden, und es können dann auch bestimmte Viergliedpunkte Φ_1, Φ_2 mit entsprechenden Gliedern, wie das Modell zeigt, verbunden werden.



Modell 6.

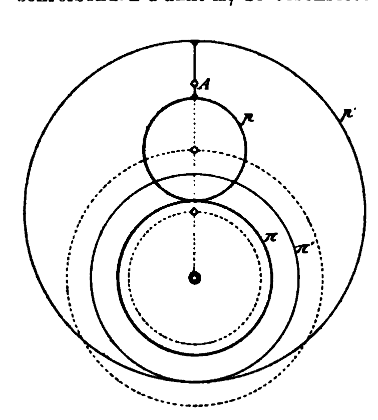
Durch zweckmässige Wegnahme von Gliedern ergeben sich aus diesen Mechanismen viele neue übergeschlossene Mechanismen.

(L. Burmester.)

253 **Kreisförmige Nürnberger Schere mit 16 dreieckigen Gliedern**, aus Aluminium. Von Prof. **L. Burmester** in München. Aus der **kinematischen Sammlung der techn. Hochschule München**.

254 **Rädermechanismus für die zweifache Erzeugung der Trochoiden (cyklischen Curven)**, von Prof **L. Burmester. Kinematische Sammlung der techn. Hochschule München**.

Eine Trochoide kann durch Kreisrollung auf zweifache Weise erzeugt werden.*) Rollt auf dem festen Kreis π ein Kreis p mit dem beschreibenden Punkt A, so beschreibt dieser eine Epitrochoide; und dieselbe wird auch erzeugt, wenn auf dem festen Kreis π' der Kreis p′ mit seiner Innenseite rollt, an dem der beschreibende Punkt A befestigt ist.**) In dem Mechanismus sind diese Kreise durch die Teilkreise der Zahnräder ersetzt. Einerseits läuft um ein festes Zahnrad ein Zahnrad mit einem Schreibstift; andererseits läuft um ein festes Zahnrad ein hohles Zahnrad mit einem Schreibstift. Durch Drehung einer Kurbel und entsprechende Übersetzung von Zahnrädern erhalten die Mittelpunkte der Umlaufräder ein bestimmtes Verhältnis ihrer Umlaufzahlen. Beide Schreibstifte beschreiben dann auf beiden Seiten einer Glastafel gleichzeitig dieselbe Epitrochoide. Durch eine Auslösung, die mit Wegnahme eines Zwischenrades erfolgt, können die beiden Erzeugungen auch unabhängig von einander gezeigt werden.



(L. Burmester.)

255–257 **Sammlung von kinematischen Modellen, Wandtafeln, Reißlinienhölzern (Schmiegen)** aus der **kinematischen Sammlung der technischen Hochschule zu Berlin-Charlottenburg**, Vorstand Geh. Rat Prof. **Reuleaux**.

255 **Kinematische Modelle.**

I. Ebene Cykloiden und Cyklonoiden.

1551. Mittlere Epicykloide (1 : 1).
1552. „ Hypocykloide (1 : 2).
1553. „ Pericykloide (2 : 1).

*) G. Bellermann, Epicykloiden und Hypocykloiden 1867.
**) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. Bd. I. S. 137. 1888.

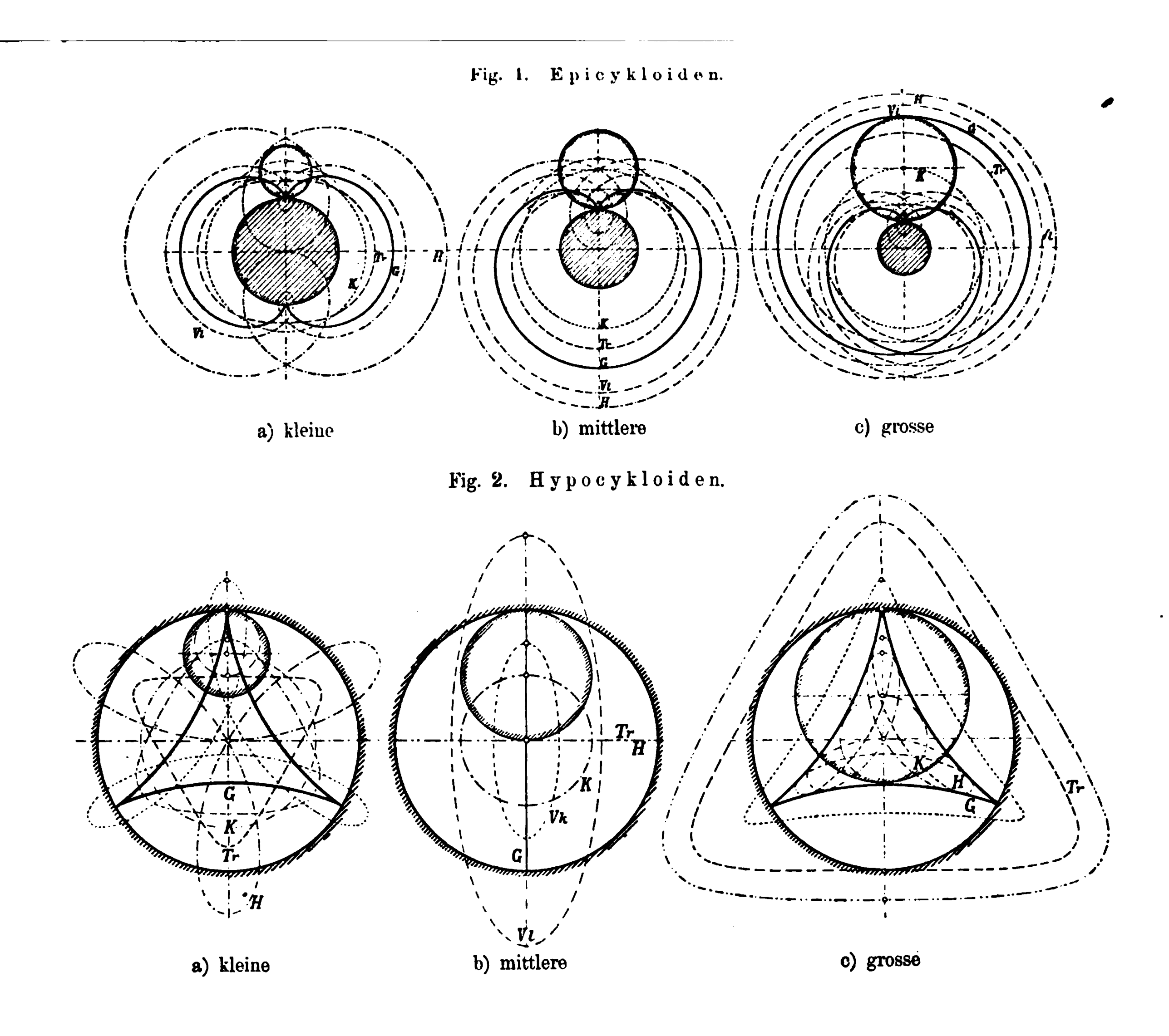


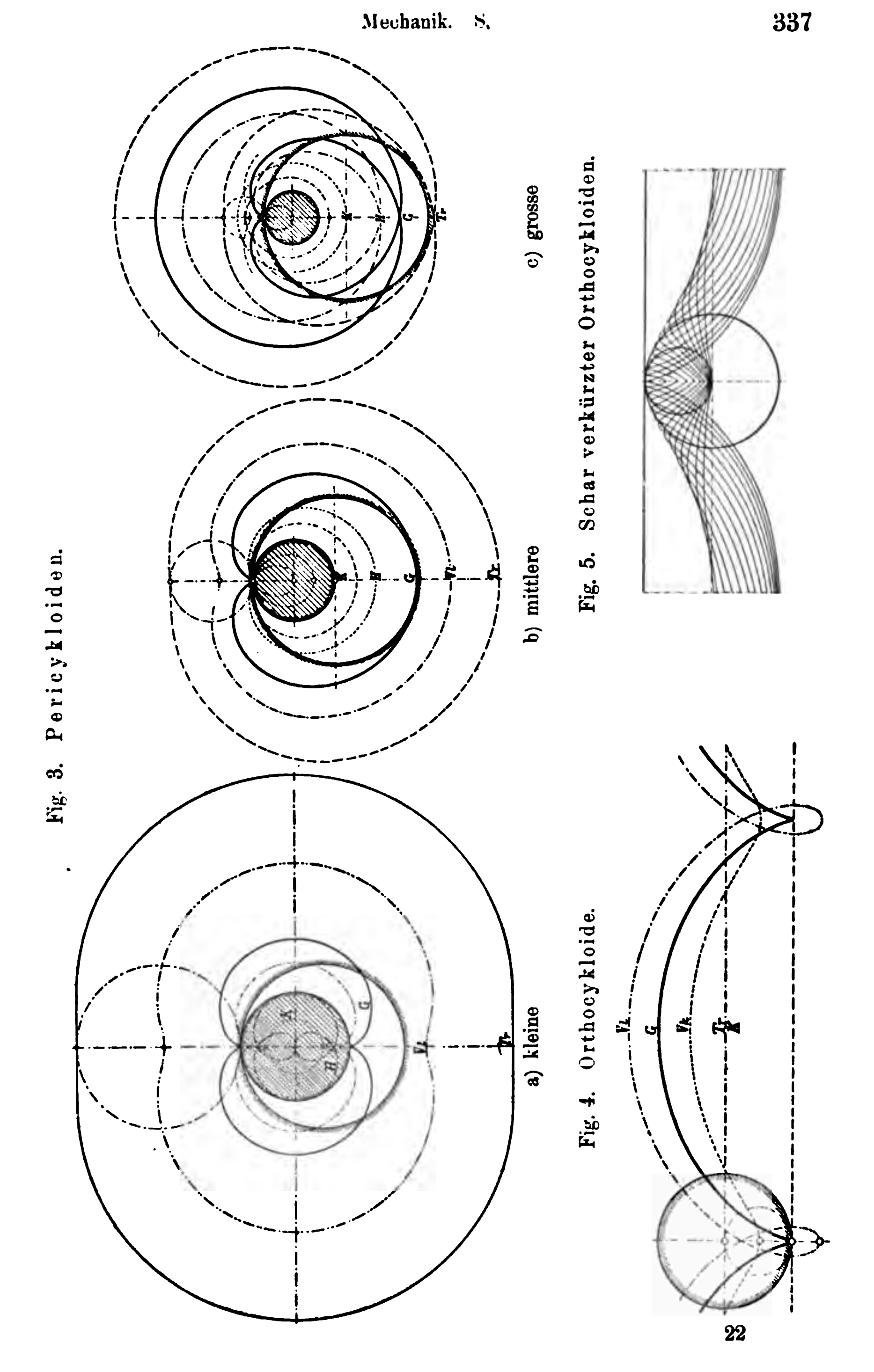
Fig. 1. Epicykloiden.

a) kleine b) mittlere c) grosse

Fig. 2. Hypocykloiden.

a) kleine b) mittlere c) grosse

Fig. 3. Pericykloiden.



a) kleine

b) mittlere

c) grosse

Fig. 4. Orthocykloide.

Fig. 5. Schar verkürzter Orthocykloiden.

1554. Orthocykloide.
1555. Cykloorthoide (oder Kreisevolvente).
1556. Krümmungsstrahlzeiger für Drittels-Epicykloide.
1557. Mittlere Epielliptoide (1 : 1).
1558. Elliptocykloide (1 : 12) und Cykloelliptoide (12 : 1) (Planetarium).
1559. Merkurgetriebe.
1560. Hyperboleïde.
1561. Paraboleïde.
1564—1567. 4 Cyklonoiden.

Die unter diesen Nummern dargestellten Modelle dienen zum Zeichnen der durch die vorstehenden Figuren charakterisirten Cykloiden und Cyklonoiden, die dem Aufsatze „Über das Verhältnis zwischen Geometrie, Mechanik und Kinematik“ von Reuleaux (Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure Bd. 24) entnommen sind.

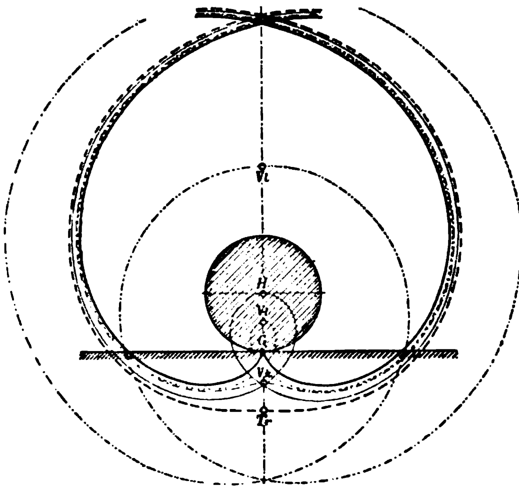


Fig. 6. Kreisevolvente (Cykloorthoide).

Die Apparate *Nr. 1557—1567* dienen zur Darstellung des Abrollens zweier Ellipsen bezw. von Kreis und Ellipse aufeinander. Es ergeben sich dabei analoge als Elliptoiden, Elliptocykloiden, Cykloelliptoiden u. s. f. bezeichnete Curven, deren Gestalten ebenfalls in der schon erwähnten Abhandlung enthalten sind.

II. Sphärische Cykloiden (Konische Axoide mit Punktbahnen).

781. Epicykloide (1 : 3). (Fig. 7.)
782. Plancykloide (1 : 3).
783. Hypocykloide (1 : 2).

784. Hypocykloide (1 : 3). (Fig. 8.)
785. Pericykloide (3 : 1).
786. Evolvente (3 : 1).
787. „ (9 : 8). (Fig. 9.)
788. Maschine zum Verzeichnen von Kugel-Cykloiden.

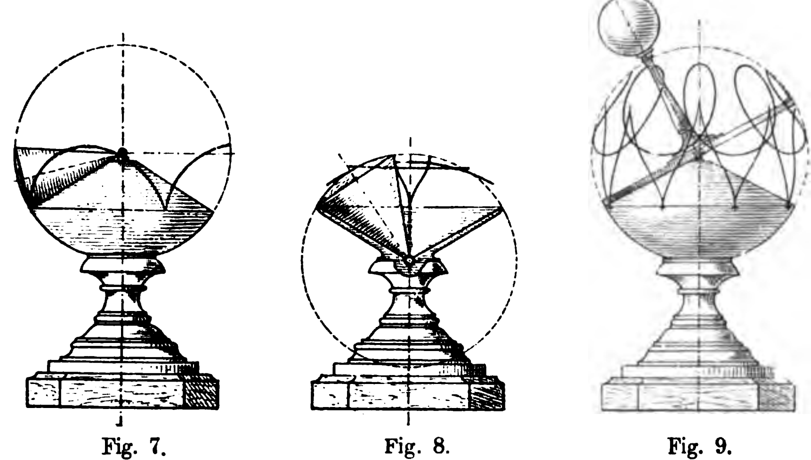


Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

Die in den Fig. 7, 8, 9 gegebenen Abbildungen von ausgestellten Modellen lassen erkennen, wie durch Abrollen von Kegel auf Kegel oder Ebene die sog. sphärischen Cykloiden erzeugt werden. Bezüglich der gestaltlichen Verhältnisse dieser Curven, sowie der Beschreibung der *Nr. 788* angeführten Maschine zum Verzeichnen der Kugelcykloiden vergleiche man einen Aufsatz von Reuleaux in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses 1876 pp. 321 und 349, welchem auch die obigen Figuren entnommen sind.

III. Räderverzahnungs-Modelle.

540. Cykloidenverzahnung } für Stirnräder.
541. Evolventenverzahnung } für Stirnräder.
542. Cykloidenverzahnung } für Kegelräder.
543. Evolventenverzahnung } für Kegelräder.
544. Punktverzahnung (4zähniges Rad mit Segment).
545. Gemischte Verzahnung (3zähniges Rad mit Zahnstange).
546. Daumenverzahnung (6zähniges Rad mit Segment).
547. „ (4zähniges Rad mit Zahnstange).
548. Schildräder mit Triebstockverzahnung (Vollräder) $\frac{z}{z_1} = \frac{12}{20}$.
549. Schildräder mit Triebstockverzahnung (Voll- u. Hohlrad) $\frac{z}{z_1} = \frac{8}{28}$.

550. Parallelräder mit 24 Zähnen
551. „ „ 6 „
552. „ „ 5 „
513. Evolventenverzahnung mit veränderbarem Axenabstand.

Kegelräder:

769. Vollräder mit 80 und 60 Zähnen
770. Hohl- und Vollrad „ 86 „ 36 „
771. Plan- „ „ „ 80 „ 40 „

Hyperbelräder:

772. Mit Zähnezahlen 60 und 72
773. „ „ 40 „ 80 (Planrad)
554. Schraubenräder mit je 60 Zähnen.

IV. Globoide und Globoidschraubenräder.

741—752. 12 hölzerne Globoidformen.
753—754. 2 Kugeln mit einfacher und doppelter Gewindlinie.
755—756. 2 Ringgelenke.
757. Geschränktes Kreuzgelenk (zum Vergleich mit vorigen).
758—763. 6 hölzerne Globoidschraubgetriebe.
764. Globoidschraubgetriebe (Zahnrad in ringförmiger Schale).
765. „ mit Triebstockrollen (Jensens Göpel).
766. „ „ symmetrischer Verzahnung.
767. „ „ zackenförmiger „
768. „ „ 4 Triebrollen (Hawkins).
553. Zum Vergleich mit *766*: Cylindrische Schraube ohne Ende mit Zahnrad.

Bezüglich der unter III. und IV. aufgeführten Modelle sei auf Reuleaux's „*Constructeur*" und „*Kinematik*" verwiesen.

V. Ellipsenzeichner.

a) Vorlesungsmodelle.

137. Von Leonardo da Vinci.
138. „ Farey.
139. „ Hoff.

b) Gebrauchsgeräte.

140. Von Slaby.
141. „ Düstersick.
142. „ Herrmann.
143 „ Farey.
144. „ Baumann (Linnin).

VI. Ovalwerke (Ellipsendrehbänke).

145. Von Leonardo da Vinci (Rotirende Kreuzschleife, kleiner Cardankreis fest).

146. Von Hoff.
147 „ Dolnest.

Ferner:

148. Sinoidenwerk (zum Zeichnen von Polarsinoiden).
116. Erweiterter Storchschnabel (Pantograph).
1. Kinematischer Schraubstock.

Das in den Modellen *Nr. 137* und *Nr. 145* dargestellte Ovalwerk, welches, soviel man weiss, von Leonardo da Vinci, dem grossen Künstler, erfunden bezw. wenigstens von ihm studirt worden ist, stellt eine sehr merkwürdige Anwendung der sog. rotirenden Kreuzschleife (s. Fig. 11 u. 12)

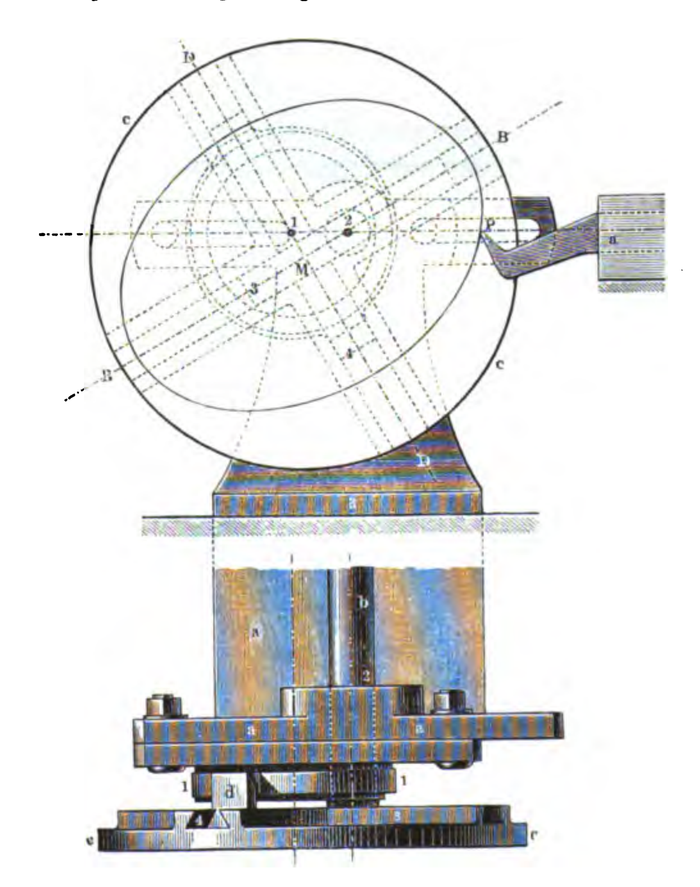


Fig. 10 zu Modell *Nr. 145.*

vor. Hier ist die Eigentümlichkeit der Kette verwendet, dass alle Punkte, welche mit der Ebene des kleinen Cardankreises (d. i. mit dem Stege a,

vgl. die Abbild. Fig. 10) verbunden sind, gegen den Träger des grossen Cardankreises Ellipsen beschreiben. In dem Apparate selbst sehen wir in dem Körper c der Planscheibe die Kreuzschleife vor uns, auf der Rückseite die sich kreuzenden Hohlprismen tragend. In das eine derselben greift das mit der Drehbankspindel b festverbundene Vollprisma 3 ein. Das Lagergestell oder der Spindelstock a bildet mit der Spindel b das Cylinderpaar 2. An dem Lagergestell (mit Schrauben befestigt) ist der a angehörige Cylinder aus dem Cylinderpaare 1; er hat die Form eines Rings, durch den die Spindel frei hindurchgeht, ist soviel erweitert, dass 2 in 1

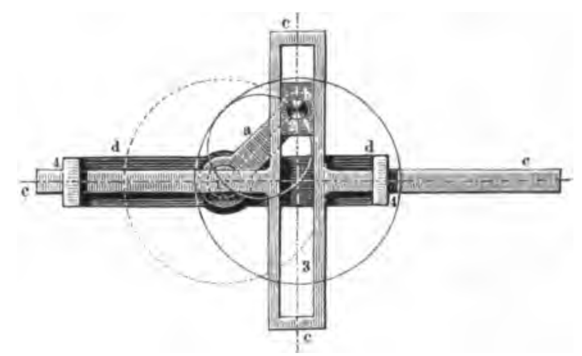


Fig. 11 zu Modell *Nr. 145.*

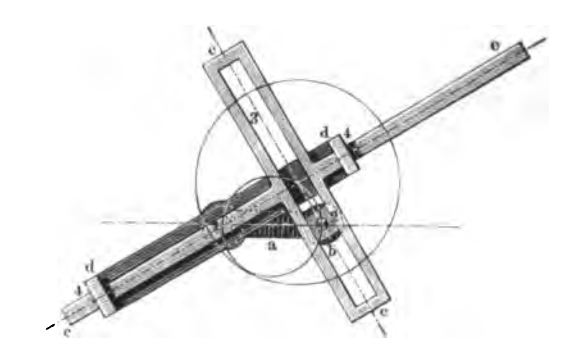


Fig. 12 zu Modell *Nr. 145.*

liegen kann. Das Stück d, welches zunächst den Cylinder 1 mit dem zugehörigen Hohlcylinder umfasst, trägt anderseits das Vollprisma 4, zum Eingriff in das zweite Hohlprisma der Kreuzschleife c bestimmt. Der Zeichenstift oder das Werkzeug P bildet einen Teil des ruhenden Stücks oder Steges a. Die Ellipsen, die die Spitze von P gegen die bewegte Planscheibe beschreibt, haben, wenn P ausserhalb a liegt, zur Differenz ihrer Halbaxen die Länge a; liegt P zwischen 1 und 2, so ist a die

Summe der Halbaxen. Die Grösse a ist, soweit es die Erweiterung des Zapfens a gestattet, verstellbar, was im Verein mit der Verstellbarkeit von P die grösste Mannigfaltigkeit der auf dem Apparat erzeugbaren Ellipsen ergibt.

(Aus Reuleaux's „*Kinematik*" p. 316).

Die Modelle *Nr. 138* und *Nr. 143* zeigen den von *Farey* in den Transactions of the soc. for the encouragement of manuf. and arts etc. Vol. 35 1812 angegebenen Ellipsenzeichner. Das Instrument zeichnet, wie *Ritterhaus* in den Verhandl. des Vereins für Gewerbefleiss 1874 des Näheren mitteilt, bei sorgfältiger Ausführung und Handhabung wirklich recht gute und vollkommen glatte Curven und zählt wohl, wenn man überhaupt Ellipsographen ausführen will, mit zu den besten Constructionen. Im Übrigen beruht der Farey'sche Apparat auf dem Princip des oben beschriebenen Ovalwerks von *Leonardo da Vinci*; technisch ist der dort auftretende Kreuzungspunkt dadurch vermieden, dass man die sich kreuzenden Hohlprismenführungen in verschiedene Ebenen verlegt; ein weiterer Vorzug des Apparates besteht darin, dass die Zapfen zu sehr grossen Ringen erweitert erscheinen, um Raum für den beschreibenden Punkt zu gewinnen.

Die Modelle *Nr. 139* und *Nr. 146* stellen *Hoff's* Ellipsenzeichner bez. Hoff's Ovalwerk dar, welche Instrumente im wesentlichen wieder Leonardo da Vinci's rotirende Kreuzschleife bei festem kleinen Cardankreis zeigen, aber es sind die mittleren Pericykloiden des grossen Cardankreises gegen den kleinen erzeugt als einlobige Polarsinoiden durch Umlaufräderwerk mit Kurbel und Kreuzschleife.

Modell *Nr. 140* ist der Ellipsenzeichner von *Slaby*, der ausführlicher in den Verhandl. des Vereins für Gewerbefleiss 1876 beschrieben ist. Derselbe beruht auf dem bekannten Satze: „Rollt ein Kreis in einem doppelt so grossen festen, so beschreibt jeder Punkt seiner Ebene eine Ellipse." Um das Rollen zu erzeugen, hält man den Mittelpunkt M des kleinen Kreises in fester Verbindung mit jenem des grossen Kreises O und erteilt einem Radius des kleinen Kreises eine doppelt so grosse Winkelgeschwindigkeit um M, als dem Radiusvector OM um O, was im Falle des vorliegenden Instruments durch eine Schnurrolle mit Übersetzungsverhältnis 1 : 2 geschieht. Im Übrigen ist bei dem Apparat besondere Aufmerksamkeit der Ausführung des Zeichenstifts gewidmet.

Modell *Nr. 141* zeigt den Ellipsenzeichner von *Düstersick*, der im wesentlichen mit dem sog. Ellipsographen von *Davies* (Mech. Magazine vol. 36 pag. 73 und 224) übereinstimmt, und der überall da besondere Verwendung finden mag, wo es sich blos darum handelt, auf bequeme Weise ellipsenförmige Curven herzustellen.

Modell *Nr. 147* ist das von *Delnest* ausgeführte Ovalwerk, das ebenfalls auf den Sätzen über die relative Bewegung des sog. grossen und kleinen Cardankreises beruht; specifisch für den Apparat ist, dass Werkstück *und* Werkzeug sich bewegen.

256 Wandtafeln.

Zwölftels-Epicykloide (Einbugcurve mit Reiflinie).
Sonnenbahn.
Cykloelliptoide.
Wendeverhältnisse der kleinen mittleren und grossen Epicykloide, der Orthocykloide und der Cykloorthoide (Evolvente)
Krümmungsverhältnisse der Drittels-Epicykloide.

257 Reiflinienhölzer oder Schmiegen.

Zur 2tels Epicykloide 100 : 200.
nämlich
a) a = 0 Randbahn (Gemeine).
b) a = — 82. Einbugcurve.
c) a = 100. Verlängerte.
d) a = 200. Homocentrische.

		$R : R_1$			$R : R_1$
Zur	3tels Epicykloide	150 : 450,	zugleich zur	$\frac{4}{3}$-tels Pericykloide	600 : 450
„	1fach. „	200 : 200,	„	„ 2fach. mittl. Pericykl.	400 : 200
„	2fach. „	200 : 100,	„	„ 3fach. Pericykloide	300 : 108
„	Cykloorthoide	100 : ∞			
„	Orthocykloide	∞ : 100			
„	„	∞ : 50			
„	3tels Hypocykloide	50 : 150	„	„ $^2/_3$ tels Hypocykloide	100 : 150
„	2tels „	50 : 100	„	„	

nämlich
a = 100, a = 150 } äussere Ellipsen; a = — 100, a = — 150 } innere Ellipsen { 150 : 300, 200 : 400
Zur 12tels Epicykloide 100 : 1200;
a = — 98 (Einbugcurve) vergl. erste Wandtafel.
Zur 4tels Hypocykloide 50 : 200
Logarithmische Spirale.
Schnurzirkel (für Kreise).

(Reuleaux.)

258 Fünf Verzahnungsmodelle (Cykloiden-Verzahnung, Evolventen-Verzahnung, Schraubenräder-Verzahnung, Hooke'sche Räder, Etagenrad) aus der **kinematischen Sammlung der techn. Hochschule Dresden** (Vorstand Prof. **T. Rittershaus**).

Modell 1. Cykloiden-Verzahnung. Das Modell zeigt zwei nur teilweise ausgeführte Messingräder mit Zähnen, die nach Epi- und Hypocykloiden geformt sind und zwei einander und die Teilkreise (die rollenden Kreise) der Räder berührende Kreisscheiben aus starkem Glas.

Die Axen der Räder sowohl, als auch die der Kreisscheiben sind mittels Uhrfedern derart mit einander verbunden, dass bei einer Drehung

eines der beiden Räder (durch das auf der Rückseite befindliche Handrädchen) die Teilkreise der Räder und die Kreisscheiben sich mit derselben Umfangsgeschwindigkeit bewegen, also aufeinander rollen. Dabei beschreiben die mit dem jeweiligen Berührungspunkte der Zähne zusammenfallenden, durch rote Striche gekennzeichneten Umfangspunkte der Glasscheiben in Bezug auf die beiden Räder die Profilcurven der Zähne.

Modell 2. Evolventen-Verzahnung. Das Modell zeigt gleichfalls zwei nur zum Teil ausgeführte Zahnräder, deren Zähne hier aber nach Kreisevolventen profilirt sind. Die Räder tragen auf ihrer vorderen Fläche je einen Kreisring-Vorsprung, und eine auf diesem aufliegende, die Räder mit einander verbindende Uhrfeder beschreibt mit den je mit den Berührungspunkten der Zähne zusammenfallenden, durch eingeritzte Querstriche kenntlich gemachten Punkten derselben relativ zu den beiden Rädern die Zahnprofile.

Evolventenräder haben die für die Praxis in vielen Fällen sehr wertvolle Eigenschaft, dass ihre Axen, ohne dem Eingriff zu schaden, sich innerhalb gewisser Grenzen von einander entfernen bezw. einander annähern lassen. Dies zu zeigen, dient folgende Einrichtung. Löst man die am oberen Rade unter dem Handgriffe angebrachte Klemmschraube, so kann man mittels der oben auf dem Modelle angebrachten Schraube das obere Rad heben oder senken. Nachdem dies geschehen, wolle man vor in Gang setzen durch Anziehen der Klemmschraube die Axe wieder befestigen.

Modell 3. Schraubenräder (Spiraloïd)-Verzahnung. (Vgl. *Olivier*: Roues à engrenages helicoides und *Pützer*: *Spiraloïd-Räder*, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

Das Modell zeigt diese interessante, bei *Olivier* selbst sowohl als auch bei *Pützer* (der im Wesentlichen einen erweiterten Auszug der *Olivier*'schen Arbeit gibt) etwas umständlich abgeleitete Verzahnung, die in wirklicher Ausführung meines Wissens noch nicht vorhanden war, für den einfachsten Fall: der Übersetzung von 1 : 1 und rechtwinkelige Kreuzung der Axen in sehr grosser Ausführung mit nur je einem Zahn.

Lässt man eine Gerade von einem Cylinder, mit deren Erzeugenden sie einen von 90° verschiedenen Winkel bildet, abwälzen, so erzeugt dieselbe eine Evolventenschraubenfläche, deren Rückkehrkante (Charakteristik) die Schraubenlinie bildet, als welche sich die Geraden in ihren Elementen auf dem Cylinder abbilden.

Legt man zwei Cylinder, jeden mit einer ihn berührenden Geraden so aneinander, dass sie sich berühren und zugleich die beiden berührenden Geraden in eine einzige zusammenfallen, und dreht in dieser Lage die Cylinder um ihre Axen so, dass die beiden je auf ihnen wälzenden Geraden auch während der Bewegung sich nicht trennen, dass also die Componenten ihrer resp. Umfanggeschwindigkeiten normal zu der Richtung dieser Geraden einander gleich sind, so haben die von den betreffenden,

auf ihnen wälzenden Geraden gegen die beiden Cylinder beschriebenen Evolventenschraubenflächen, wie leicht ersichtlich, in jedem Augenblicke ein Element miteinander gemein, berühren einander also geometrisch. Damit ist aber noch nicht bewiesen, dass dieselben auch als Zahnflanken brauchbar sind. Dazu ist ferner noch erforderlich, dass sie sich als Begrenzungsflächen materieller, körperlicher Gebilde ausführen lassen, dass sie also, soweit sie benutzt werden, keine Schleifen, Rückkehrkanten oder dergl. enthalten. Es ist aber weiter auch noch erforderlich, — und das wird oft übersehen und dadurch in Folge der eintretenden Missstände ein ganzes, sonst vorzügliches Verzahnungssystem, wie z. B. die Evolventenverzahnung in der Praxis in Misscredit gebracht —, dass die Körpergebilde, deren Begrenzung die Flächen bilden, in keiner ihrer Lagen sich an der durch dieselben erzwungenen Relativbewegung hindern.

Dazu bedarf es hier besonderer Vorsichtsmassregeln.

Die, die beiden Flächen erzeugende Doppelgerade befindet sich je einerseits ihres Berührungspunktes mit dem betreffenden Cylinder in dem nach der Rückkehrkante absteigenden, andererseits dagegen in dem von dieser Kante aufsteigenden Aste der Fläche. Die gegenseitige Berührung der beiden Flächen geht also, wenn man die dieselbe erzeugenden Doppelgeraden entlang geht, je in diesem Berührungspunkte von dem einen auf den andern Ast der Fläche über und das Fortschreiten der Geraden innerhalb der Flächen während der Bewegung findet in der von den beiden Berührungspunkten begrenzten Strecke derselben *auf beiden* entweder *nach aussen* (von der Rückkehrkante weg) oder *nach innen* (auf dieselbe zu) statt, während in den beiden andern Teilen derselben die Gerade je auf der *einen* Fläche *nach innen*, auf der *andern* dagegen *nach aussen* hin fortschreitet.

Wirklich ausgeführt werden kann aber nur je der eine Zweig der Fläche und da die nicht zusammengehörigen Teile der Fläche nicht allein nicht zum Eingriff kommen, sondern auch in gewissen Stellungen sich gegenseitig hindern, weil sie bei richtiger Lage der Cylinder einander durchdringen müssten, so muss, wie dies auch im Modell geschehen ist, zum mindesten der über den Berührungspunkt der beiden Cylinder hinausliegende Teil des Zahns weggeschnitten werden. Ausserdem muss natürlich auch noch für den Grundkörper des eingreifenden Rades, als welcher der Evolutencylinder desselben gewählt wurde, Raum geschaffen, der Zahn also dementsprechend ausgedreht werden, wenn man nicht vorzieht, denselben noch mehr zu beschneiden, das Rad also noch schmäler auszuführen.

Um aber die Unbrauchbarkeit des fortgeschnittenen Teiles auch am Modell zu zeigen, ist auch dieser ausgeführt und kann durch Aufschieben auf die resp. Axen angesetzt werden. Man wolle aber die angesetzten Teile jedesmal wieder entfernen.

Für die *Praxis* ist die Verzahnungsform leider unbrauchbar, weil die

Anbringung einer entsprechenden Zahnflanke für die umgekehrte Drehungsrichtung Schwierigkeiten bereitet.

Das Modell dient gleichzeitig auch zur Veranschaulichung der Verzahnung für Schraubenräder mit parallelen Axen und ist zu dem Ende noch ein drittes Rad mit entgegengesetzt gewundenem Schraubenzahn beigegeben. Wird das obere der beiden ersten Räder aus seinen Lagern herausgenommen, und das eine der beiden hohen Lager nach Lösen der unterhalb des Fussbrettes befindlichen Schraube entfernt, so kann dieses dritte Rad in die noch vorhandenen niedrigen Lager eingelegt werden und man hat dann zwei einander treibende Schraubenräder für parallele Axen, die infolge ihrer Ausführung in grossem Masstabe die Zahnform selbst besser erkennen lassen, als dies bei den gewöhnlichen, die Art der praktischen Ausführung zeigenden Modellen mit vielen Zähnen, die natürlich in der Sammlung ebenfalls vorhanden sind, möglich ist.

Schraubenräder können sehr viel genauer hergestellt werden, als gewöhnliche Zahnräder und werden infolge dessen in besseren Ausführungen jetzt, wenn irgend möglich, statt jener angewandt. Es liegt das daran, dass infolge der Schraubenform der Zähne die Eingriffstelle während der Bewegung parallel der Axe weiterrückt und infolgedessen die Zähne in ihrer Höhe, d. i. ihrer Ausdehnung in radialer Richtung, ganz bedeutend verkürzt und damit die Fehlerquellen bei der Herstellung herabgezogen werden können, ohne die Stetigkeit des Eingriffes zu unterbrechen.

Hooke (und nach ihm *White*, *Sheldrake* u. A.) geht darin so weit, dass er die Höhe der Zähne auf Null reducirt.

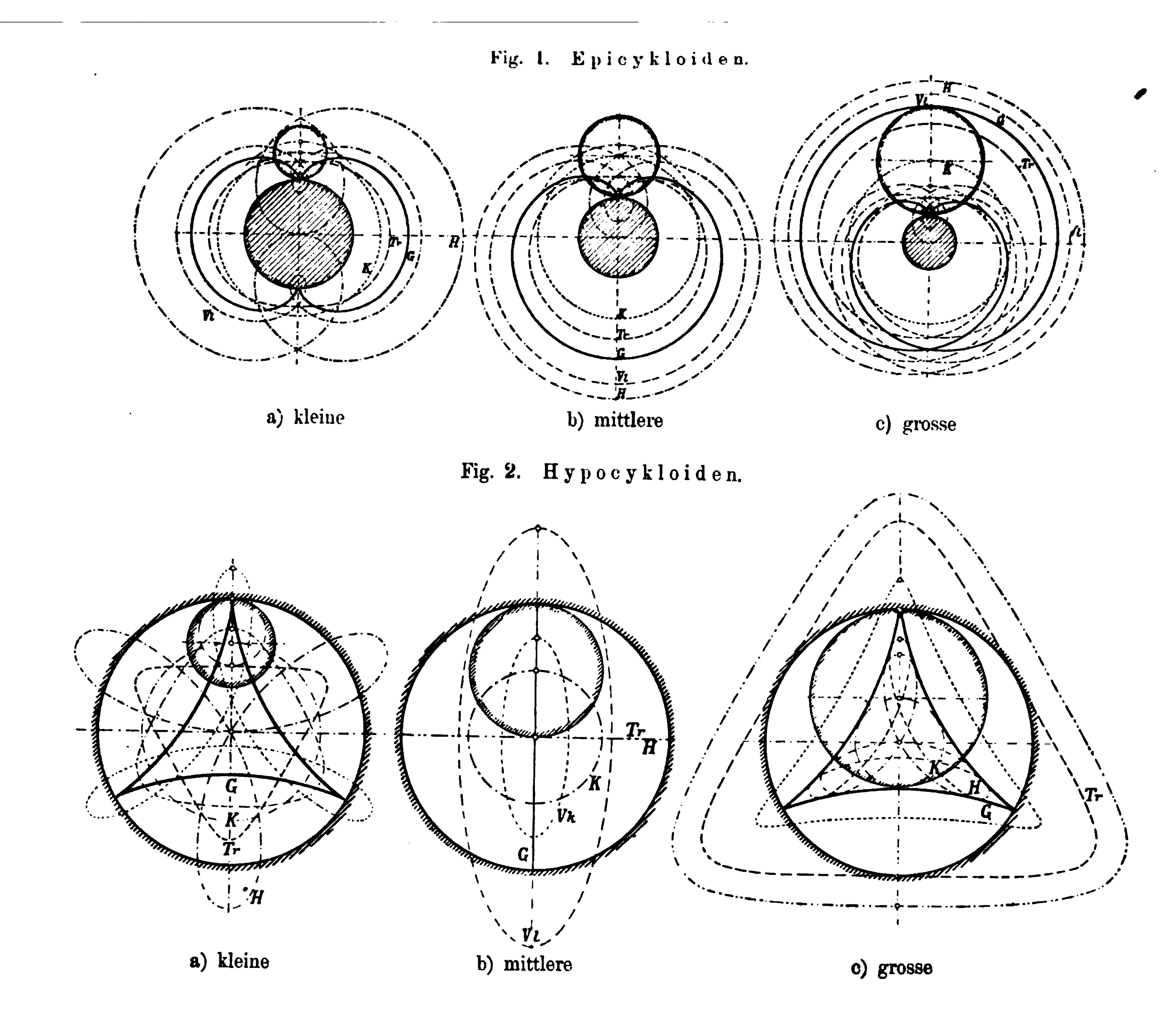
Ein Räderpaar dieser Art, bei dem also die eigentliche Verzahnung aus zwei durch im Übrigen beliebig gestaltete Schraubenflächen getragenen Schraubenlinien besteht, die bei ihrer Bewegungsübertragung auf einander wälzen, zeigt *Modell Nr. 4.*

Derartige Räder, die auf dem genauesten Werkzeuge unserer Werkstätten, auf der Drehbank, mit fast mathematischer Genauigkeit hergestellt werden können, sollte man überall da anwenden, wo bei grosser Geschwindigkeit nur geringe Kräfte zu übertragen sind und die bei Anwendung gewöhnlicher Räder unvermeidlichen Stösse Unzuträglichkeiten mit sich bringen. So wurden sie beispielsweise von *Bourdon* benutzt bei den von ihm angefertigten Instrumenten zur Messung der Lichtgeschwindigkeit. Für die Übertragung grösserer Kräfte sind sie leider nicht geeignet, da die Zähne sich je nur in einem Punkte berühren.

Modell 5 zeigt das Evolventenschraubenrad als sogenanntes Etagenrad. Es dient vorzugsweise dazu, die Art der Modell-Herstellung, die Eigenschaften der Fläche etc. etc. zu zeigen. Es besteht aus einer grösseren Zahl gleicher Kreisscheiben mit je einem Evolventenzahn, die durch Verdrehen um die gemeinsame Axe in ein Etagenrad mit beliebiger Steigung verwandelt werden können.

(T. Rittershaus.)

Fig. 1. Epicykloiden.

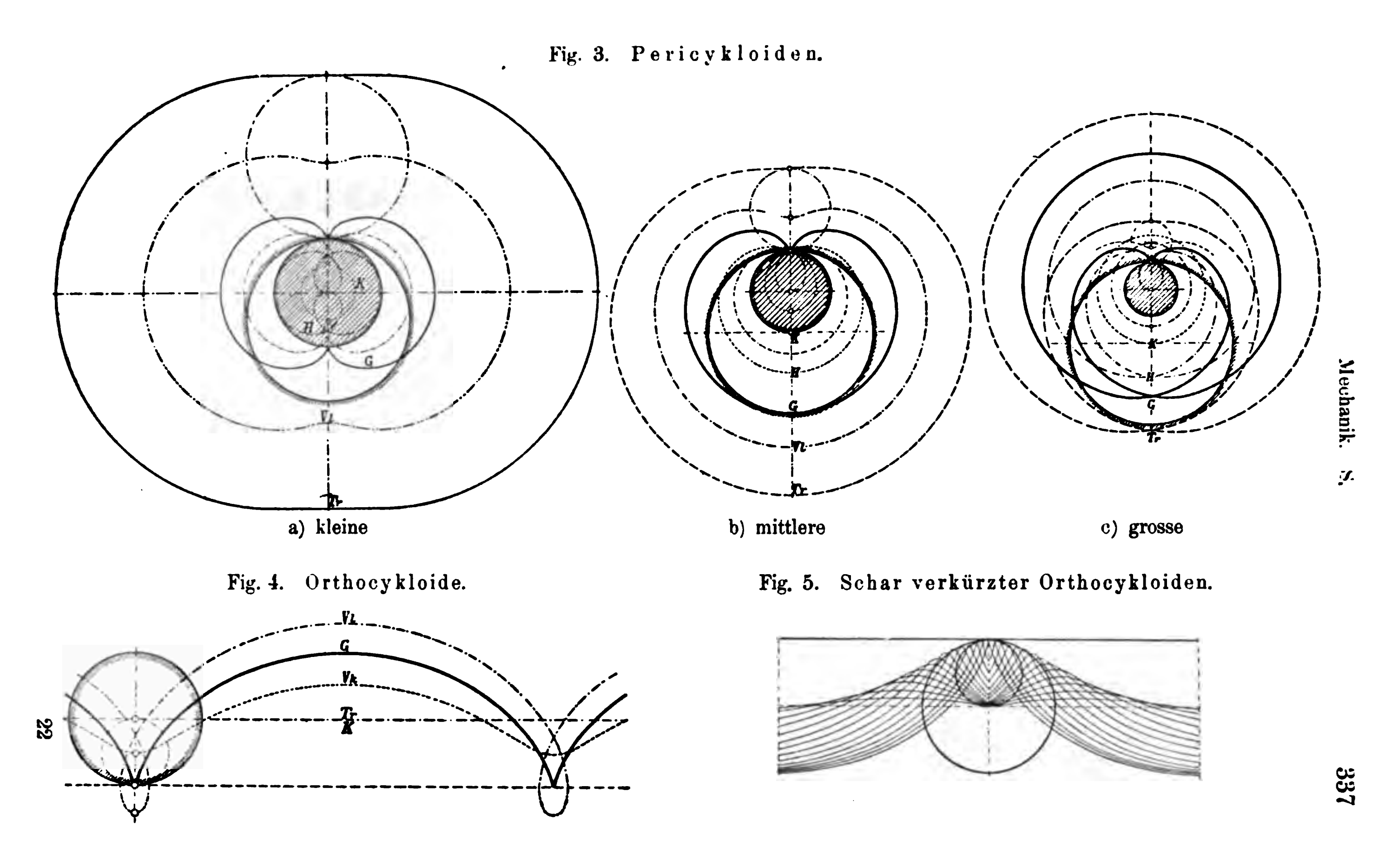


a) kleine b) mittlere c) grosse

Fig. 2. Hypocykloiden.

a) kleine b) mittlere c) grosse

Fig. 3. Pericykloiden.



a) kleine b) mittlere c) grosse

Fig. 4. Orthocykloide.

Fig. 5. Schar verkürzter Orthocykloiden.

lenkkupplung mit ihrer Antriebswelle verbunden sein. Die bekannte Kreuz-Gelenkkupplung oder das Hooke'sche Gelenk leidet an einem Bewegungsfehler, da bei gleichmässiger Rotation der Antriebswelle die getriebene Welle mit wechselnder Winkelgeschwindigkeit mitgenommen wird. Hiedurch entstehen bei grossen Arbeitsübertragungen bedeutende Stösse und Unregelmässigkeiten in den Triebwerken.

Bei der vorliegenden Schnittgelenkkupplung ist diese Arbeitsübertragung eine gleichmässige, da die Berührungspunkte der Kuppelungsarme stets symmetrisch zu der den Axenwinkel halbirenden Hauptebene stehen. Die Ausführungsformen dieser Schnittgelenkkupplung sind in der Deutschen Patentschrift Nr. 48235 der Klasse 47 enthalten.

c. Das Modell eines Flächendruckräderpaares.

Da bei dem Schrägwalzverfahren Arbeitsmengen von mehreren hundert Pferdestärken auf die Schrägwalzen bei hohen Umdrehungsgeschwindigkeiten zu übertragen sind, so genügen hiefür die gebräuchlichen gusseisernen Zahnräder nicht mehr, da sich deren Zähne nur in Linien berühren, wobei ausserordentlich hohe Flächendrucke auftreten.

Zur Vermeidung dieses Misstandes wurden Flächendruckräder angeordnet, welche, wie das Modell zeigt, durch Drehgleitzähne gekennzeichnet werden, die am Radkörper drehbar gelagert sind und ebene Gleitflächen tragen, welche den Druck aufnehmen und bei der Drehung der Räder unter relativer Drehung der Drehgleitzähne zu ihrem Radkörper auf einander gleiten. Die drehbaren Zähne sind mit gleichlangen Kurbeln ausgestattet, welche in einen gemeinsamen Ring eingreifen, der den dauernden Parallelismus sämtlicher Zahnflächen während der Drehung erhält. — Diese neuen Räder sind namentlich in den Patentschriften Nr. 55785 und Nr. 57443 der Klasse 47 beschrieben.

d. Proben mit Mannesmannröhren auf Tafeln.

Auf diesen Tafeln sind Proben enthalten, welche teils im warmen, teils im kalten Zustande mit Mannesmann-Röhren ausgeführt wurden und den Beweis der ausserordentlichen Zähigkeit dieses Rohmaterials erbringen. Diese Zähigkeit ist hauptsächlich durch die spiralförmige Anordnung der Materialfasern in den Rohrwandungen hervorgerufen, welche eine Folge des Arbeitsvorganges beim Schrägwalzverfahren bildet.

(Erhard.)

262 Mechanismus zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes des menschlichen Körpers und seiner Teile von Reallehrer **Otto Fischer** in Leipzig.

Der Schwerpunkt eines Systems von zwei Körpern mit den Massen m und m' liegt bekanntlich in der Verbindungslinie der Einzelschwerpunkte S und S' der beiden Körper und teilt die Strecke $\overline{SS'}$ im Verhältnis m' : m.

Ist der Abstand der beiden Einzelschwerpunkte veränderlich, so kann man durch einen sehr einfachen Mechanismus für jede beliebige



Fig. 3. Pericykloiden.

a) kleine

b) mittlere

c) grosse

Fig. 4. Orthocykloide.

Fig. 5. Schar verkürzter Orthocykloiden.

Symmetrieebene entspricht, und an welchem die genannten 14 Teile durch Gelenke verbunden sind, und trägt man in die einzelnen Abschnitte die Lage der Projectionen der Einzelschwerpunkte ein, so kann man bei wiederholter Anwendung des obigen Mechanismus die Projectionen der Einzelschwerpunkte zu der vom Gesamtschwerpunkte des ganzen Körpers zusammensetzen. Man hat zu dem Zwecke nur bei irgend einem System zweier benachbarter Glieder, z. B. Unterschenkel und Fuss, anzufangen, und in den Einzelschwerpunkten S und S' die Punkte S und S' des den Massen beider angepassten Mechanismus (Fig. 1) drehbar anzubringen. Dann wird für jede Beugestellung der beiden Glieder der Punkt S_0 die Lage des Gesamtschwerpunktes vom Unterschenkel und Fuss angeben. Dieses System verbindet man durch einen zweiten solchen Mechanismus mit dem Oberschenkel so, dass der Punkt S dieses neuen Mechanismus in den Einzelschwerpunkt des Oberschenkels und der Punkt S' in den Gesamtschwerpunkt S_0 von Unterschenkel + Fuss fällt. Der Punkt S_0 dieses zweiten Mechanismus, für welchen als Massen die des Oberschenkels einerseits und die vom System Unterschenkel + Fuss andererseits benutzt werden müssen, gibt dann für jede Stellung der drei Glieder des Beins zu einander den Gesamtschwerpunkt des ganzen Beins an. Auf dieselbe Weise verschafft man sich den Gesamtschwerpunkt des anderen Beins und kann dann aus beiden den Gesamtschwerpunkt beider Beine erhalten. Entsprechend lässt sich der Gesamtschwerpunkt beider Arme und ebenso der Gesamtschwerpunkt des Systems Rumpf + Kopf auf mechanischem Wege erhalten. Diese beiden letzteren lassen sich dann weiter zu dem Schwerpunkt des Körpers ohne die beiden Beine, und dieser endlich mit dem Gesamtschwerpunkte der beiden Beine zu dem Gesamtschwerpunkte des ganzen Körpers zusammensetzen.

Der fertige Mechanismus gibt dann für jede beliebige Haltung des menschlichen Körpers nicht nur die Lage des Gesamtschwerpunktes, sondern auch die Lagen der Schwerpunkte der einzelnen Glieder und Gliedersysteme an und kann auch dazu benutzt werden, für irgend welche Bewegungen des Körpers die Curven aufzuzeichnen, welche die Schwerpunkte beschreiben.

Dieser Mechanismus liefert zunächst nur die Projection des Gesamtschwerpunktes auf die Symmetrieebene des Körpers (in halber Lebensgrösse ausgeführt). Um auch die Projection desselben auf die durch die Längsaxe des Körpers gehende und zur Symmetrieebene senkrechte Ebene zu erhalten, hätte man auf ähnliche Weise einen zweiten Mechanismus zu construiren, welcher nur Beweglichkeit parallel dieser Ebene zulässt. Beide Mechanismen zusammen würden dann die Lage des Schwerpunktes im Raume ergeben.

(O. Fischer.)

263 Zwei Mechanismen zur Darstellung der Wirkung eines Muskels von **Otto Fischer** in Leipzig.

1) Mechanismus zur Bestimmung des Drehungsmomentes eines Muskels.

Das Drehungsmoment D eines Muskels vom Querschnitt q, welcher mit der Kraft p für die Querschnittseinheit zwischen den Punkten U und A (Fig. 2) zweier Glieder wirkt, die durch ein Gelenk G verbunden sind, hat bekanntlich die Grösse

$$D = q \,.\, p \,.\, \overline{GU} \,.\, \sin \widehat{AUG} = q \,.\, p \,.\, \overline{GA} \sin \widehat{UAG},$$

wobei eines der beiden Glieder als fest angenommen und ausserdem vorausgesetzt ist, dass die Richtung von AU senkrecht auf der Gelenkaxe steht. Nun ist $\overline{GU} \sin \widehat{AUG} = \overline{GA} \,.\, \sin \widehat{UAG}$ gleich dem kürzesten Abstand GJ der Linie AU von der Gelenkaxe. Diese Strecke GJ nennt man gewöhnlich den *idealen Hebelarm* der Kraft zum Unterschiede von den beiden *realen Hebelarmen* GU und GA. Führt man diesen idealen Hebelarm, dessen Länge mit i bezeichnet sein soll, in die Formel ein, so wird

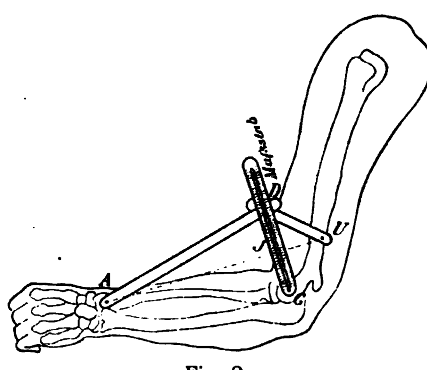


Fig. 2.

$$D = q \,.\, p \,.\, i.$$

Der ideale Hebelarm kann daher zur Veranschaulichung der Grösse des Drehungsmomentes benutzt werden. Seine Masszahl gibt direct die Masszahl des Drehungsmomentes für die Einheit von Muskelquerschnitt und Muskelkraft.

Für das System Oberarm und Unterarm und den zwischen beiden wirkenden Supinator longus trifft annähernd die Voraussetzung zu, dass die Gelenkaxe fest und senkrecht zu der Verbindungslinie der Ansatzpunkte des Muskels gerichtet ist. Man kann sich in diesem Falle durch einen sehr einfachen Mechanismus die Grösse des idealen Hebelarms verschaffen.

Figur 2 stellt ein Modell des Armes aus Metall oder starkem Carton dar, welches im Ellbogengelenk G beweglich ist. Bringt man in den Insertionspunkten U und A des Muskels je einen Cartonstreifen beweglich an und verbindet beide in der Weise im Punkte D wieder durch ein Charniergelenk, dass UD = UG und AD = AG ist, so liefert wie man leicht sieht, die Strecke GD für jede beliebige Beugestellung die doppelte Länge des idealen Hebelarms. Um diese Länge bequem ablesen zu können, braucht man nur noch im Punkte G einen Masstab

drehbar anzubringen, welcher in der Mitte einen Schlitz enthält, in dem die Axe D auf- und abgleiten kann. Nimmt man die Längeneinheit für den Masstab doppelt so gross als die Längeneinheit für die übrigen Teile des Modells und verlegt den Nullpunkt des Masstabes nach dem Punkte G, so wird die bei D abzulesende Masszahl direct die Länge des idealen Hebelarms angeben. Da das Modell in halber Lebensgrösse ausgeführt worden ist, so ergibt die Länge GD direct die wahre Länge des idealen Hebelarms und somit die Grösse des Dehnungsmomentes für die Einheit von Muskelquerschnitt und Muskelkraft. Der Querschnitt des Supinator longus beträgt nun ca. 3 qcm. Will man daher die Grösse des Dehnungsmomentes für den wahren Querschnitt und die Einheit der Muskelkraft erhalten, so hat man nur die Längeneinheit des Masstabes auf den dritten Teil herabzusetzen, damit sich die Masszahlen verdreifachen. Der erste Fall findet sich an der oberen Seite, der letzte an der unteren Seite des Schlitzes im Masstab realisirt.

Man erkennt unter Anderem an dem Modell, dass das Drehungsmoment ein Maximum hat, wenn $AU \perp GU$.

2) *Mechanismus für die Zerlegung der Kraft eines Muskels in die drehende und die nach dem Gelenk gerichtete Componente.*

Die drehende Wirkung eines Muskels wird ausschliesslich durch die Componente der Muskelkraft ausgeübt, welche auf der Richtung des realen Hebelarms GA resp. GU (Fig. 2) senkrecht steht. Der Hebelarm GA kommt in Betracht, wenn der Oberarm, der Hebelarm GU dagegen, wenn der Unterarm als fest angenommen wird. Wenn auch in beiden Fällen die drehende Componente der Muskelkraft verschieden gross ist, so ist doch das Drehungsmoment dasselbe, gleichgiltig ob der Oberarm oder der Unterarm als fest angenommen wird.

Anders verhält es sich mit der Wirkung des Muskels auf das Gelenk.

Die andere Componente der Muskelkraft besitzt die Richtung des Hebelarms AG bei feststehendem Oberarm und die des Hebelarms UG bei feststehendem Unterarm. Diese Componente ist für beide Fälle im Allgemeinen von verschiedener Grösse und verändert sich, ebenso wie die Drehcomponente, mit dem Grade der Beugung im Ellbogengelenk. Je grösser die drehende Componente, um so kleiner wird dieselbe und umgekehrt.

Man kann sich ebenfalls mit Hilfe eines Mechanismus für jede Beugestellung des Arms die Grössen der beiden Componenten sowohl bei eststehendem Oberarm als bei feststehendem Unterarm verschaffen. Ist der Oberarm fest, so hat die drehende Componente der Muskelkraft den Wert $p \sin G\hat{A}U$, die nach dem Gelenk gerichtete den Wert $p \cos G\hat{A}U$; ist dagegen der Unterarm fest, so sind diese Componenten $p \sin G\hat{U}A$ und $p \cos G\hat{U}A$. Die beiden Componenten sind in jedem

Falle die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse p und dessen einer Winkel $G\hat{A}U$ resp. $G\hat{U}A$ ist. Ist in den Dreiecken p durch eine Länge von 100 mm dargestellt, so drücken die Masszahlen der beiden Katheten direct die Grösse der beiden Componenten in Procenten der Muskelkraft aus. Die beiden Dreiecke kann man nun für jede Beugestellung auf folgende Weise erhalten.

Figur 3 stelle wieder das im Ellbogengelenk bewegliche Modell eines Armes und U und A die Insertionspunkte des Supinator longus dar. CGD ist ein Cartonstreifen von über 200 mm Länge, welcher bei G um

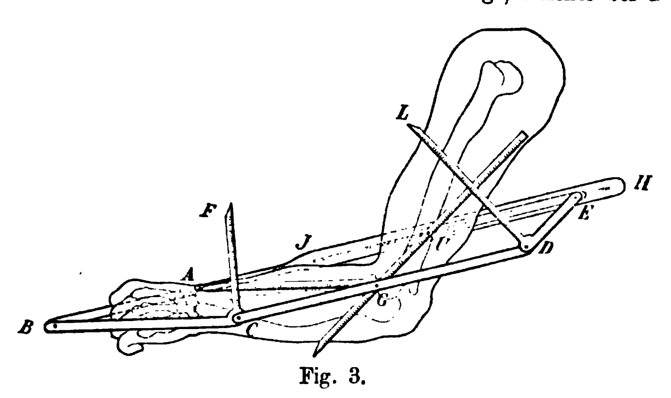


Fig. 3.

die Gelenkaxe drehbar und bei C und D mit anderen Teilen eingelenkt ist. C, G und D liegen in gerader Linie und G genau in der Mitte von C und D, und zwar so, dass $\overline{CG} = \overline{GD} = 100$ mm.

BAJH ist ein langer Cartonstreifen unterhalb des Modells, welcher von der Stelle J an bis zum Ende H einen Schlitz trägt, in welchem eine Charnieraxe bei U geführt wird. Dieser Cartonstreifen ist in den Punkten A und B mit dem Vorderarm einerseits und einem anderen Cartonstreifen BC andererseits beweglich verbunden, und zwar ist $\overline{AB} = \overline{GC} = 100$ mm und $\overline{BC} = \overline{AG}$, d. h. gleich der Entfernung des Muskelansatzpunktes vom Gelenk. Der Streifen BC enthält bei C noch einen Fortsatz CF, welcher auf der rechten Seite in der Figur eine genaue geradlinige Kante besitzt, deren Richtung durch den Drehpunkt C geht und auf der Richtung von BC senkrecht steht. Ein ganz entsprechender Teil ist bei D eingelenkt, wobei $\overline{ED} = \overline{UG}$, während die untere Kante des rechtwinkligen Fortsatzes DL nach dem Drehpunkt D gerichtet ist und auf DE senkrecht steht. Endlich ist zwischen E und U noch ein Cartonstreifen eingelenkt, für den $\overline{UE} = \overline{GD} = 100$ mm. Dieser Streifen UE könnte indes auch fortfallen und dafür der Punkt E durch einen Stift in den Schlitz des Streifens BAJH gezwungen werden; dies empfiehlt sich aber nicht, weil sonst bei dem geringsten Spielraum des Stiftes E im Schlitz die Entfernung UE ungleich GD werden

würde; dagegen kann man aber die Axe in E gleichzeitig mit durch den Schlitz hindurchstecken, denn E wird immer von selbst in die Verlängerung von AU fallen.

Da BAJH durch A und U geht, so gibt die Mittellinie dieses Streifens die Richtung des Muskelzuges an. Da ferner $\overline{AG} = \overline{BC}$ und $\overline{AB} = \overline{GC}$, so ist GC und damit der ganze Streifen CGD stets parallel AU. Da ferner $\overline{UG} = \overline{ED}$ und $\overline{UE} = \overline{GD}$, so ist UE stets parallel GD und fällt demnach in der That von selbst in die Richtung des Schlitzes HJ. Da endlich CF $\perp$ CB und DL $\perp$ DE, so ist auch CF $\perp$ GA und DL $\perp$ GU resp. deren Verlängerung, wobei GA und GU zwei auf dem Unterarm resp. Oberarm aufgezeichnete und mit Einteilung versehene Gerade (nicht Cartonstreifen) bedeuten. Es wird also durch die Kante von CF, die Verbindungslinie GA und die Strecke GC einerseits und durch die Kante von DL, die Verbindungslinie GU (resp. deren Verlängerung) und die Strecke GD andererseits für jede beliebige Beugestellung je ein rechtwinkliges Dreieck festgelegt, und zwar ist in dem ersten Dreieck $\sphericalangle$ AGC $= \sphericalangle$ GAU und in dem anderen Dreieck $\sphericalangle$ UGD $= \sphericalangle$ GUA. Ist demnach sowohl $\overline{GC}$ als auch $\overline{GD}$ Repräsentant der Muskelkraft, so schneidet die Linie GA auf der Kante CF den Repräsentanten für die drehende Componente und umgekehrt die Kante CF auf der Linie GA den Repräsentanten für die nach dem Gelenk gerichtete Componente der Muskelkraft bei *feststehendem Oberarm* aus; entsprechend schneidet GU auf der Kante DL den Repräsentanten der drehenden und umgekehrt die Kante DL auf GU den für die nach dem Gelenk gerichtete Componente bei *feststehendem Unterarm* ab. Bringt man auf den Linien GA, CF, GU und DL Einteilung in Millimeter an, so geben, da CG = GD = 100 mm ist, die Masszahlen der Abschnitte auf diesen vier Linien direct die Grössen der betreffenden Kraftcomponenten in Procenten der Muskelkraft an. Die Abschnitte auf CF und DL sind gleichzeitig ein Mass für das Drehungsmoment des Muskels; man erhält das letztere in Procenten der Muskelkraft, wenn man entweder die Masszahl des Abschnittes von CF mit der Masszahl der Strecke $\overline{GA}$ (nicht des Abschnittes auf GA) oder die Masszahl des Abschnittes von DL mit der Masszahl der Strecke $\overline{GU}$ multiplicirt.

Wenn $\overline{GA} > \overline{GU}$, was für den Supinator longus zutrifft, so erkennt man leicht, und kann es am Mechanismus bestätigt finden, dass der Abschnitt auf GA immer die Richtung GA selbst besitzt, d. h. dass die Componente, welche bei feststehendem Oberarm nach dem Gelenk gerichtet ist. stets positiv oder, mit anderen Worten, stets im Sinne einer Pressung des Unterarms gegen den festgestellten Oberarm wirkt; diese Pressung erleidet ein Minimum, wenn AU $\perp$ GU. Bei feststehendem Unterarm ist dagegen die entsprechende Componente, welche durch den Abschnitt auf GU dargestellt ist, durchaus nicht immer positiv. Sie erhält den Wert 0, wenn AU $\perp$ GU und wird sogar negativ, wenn

man die Beugung im Ellbogengelenk noch weiter fortsetzt, so dass der Winkel AUG stumpf wird; in diesem letzteren Falle findet nicht mehr ein Pressen des Oberarms gegen den festgestellten Unterarm statt, sondern es sucht der Muskel den Oberarm vom Unterarm abzuziehen.

Entsprechende Mechanismen lassen sich für jeden Beugemuskel des Armes oder irgend eines anderen Gliedersystems construiren.

(O. Fischer.)

264 Mechanismus zur Bestimmung der Trägheitsmomente eines Körperteils für alle Schwerpunktsaxen. Von **Otto Fischer** in Leipzig.

Bei einer Untersuchung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Teile*) hat sich herausgestellt, dass für nahezu alle Körperabschnitte das Centralträgheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe die grosse Axe der rotirenden Ellipse darstellt und mit der Längsaxe des betreffenden Körperteils zusammenfällt. Demnach besitzt das Trägheitsmoment in Bezug auf die Längsaxe eines

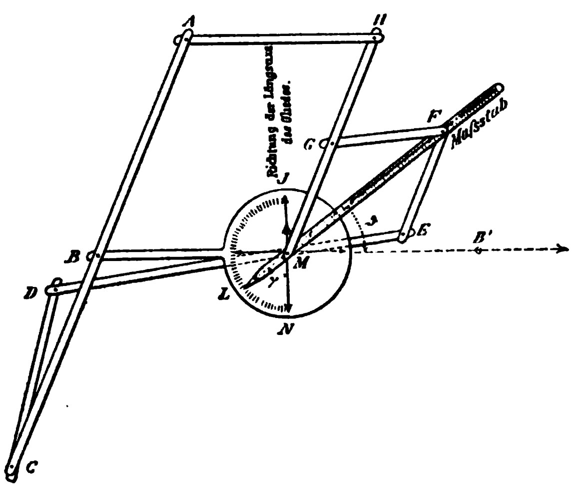


Fig. 4.

Gliedes den kleinsten Wert, während die einander gleichen Trägheitsmomente für alle zur Längsaxe senkrechten Schwerpunktsaxen den grössten Wert annehmen. Ist der Trägheitsradius für diese letzteren Axen a, der für die Längsaxe b, so dass also die Trägheitsmomente für die zur Längsaxe senkrechten Schwerpunktsaxen den Wert ma^2

*) Diese Arbeit ist jetzt im Druck und wird demnächst erscheinen unter dem Titel: W. Braune und O. Fischer, *Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder.* Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1892.

haben, dagegen das für die Längsaxe selbst den Wert mb^2 (m Masse des Gliedes), so ist das Trägheitsmoment mx^2 für irgend eine Axe, welche mit der Längsaxe des Gliedes den Winkel γ bildet

$$mx^2 = ma^2 \sin^2\gamma + mb^2 \cos^2\gamma \ .$$

Es gilt also für den Trägheitsradius x die Relation

$$x^2 = a^2 \sin^2\gamma + b^2 \cos^2\gamma = a^2 - c^2 \cos^2\gamma ,$$

wenn $a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt wird.

Die Grösse x kann man sich für irgend eine Neigung der Axe zur Längsaxe des Gliedes mit Hilfe des in Fig. 4 schematisch dargestellten Mechanismus verschaffen. Derselbe besteht aus 9 Streifen aus Metall oder dickem Carton AH, HGM, MB, ABC, CD, DME, EF, FG und LMF, von denen MB mit einem Kreis um den Mittelpunkt M und LMF zum Teil mit einem Schlitz versehen ist. Die Streifen sind in den Punkten A, H, M, B, C, D, E, F und G drehbar verbunden, und zwar treffen an den Axen M und F je drei Cartonstreifen, an allen anderen nur zwei zusammen. Die Streifen HGM, ABC und DME enthalten je drei Drehpunkte, welche genau in gerader Linie liegen, alle andern nur zwei.

Wenn nun $\overline{AC} = 2a$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{HM} = \overline{DM} = a$$

$$\overline{HG} = \overline{GM} = \overline{ME} = \overline{EF} = \overline{FG} = \frac{a}{2} \text{ und}$$

$\overline{AH} = \overline{BM} = \overline{CD} = c$, also gleich $\sqrt{a^2 - b^2}$ gemacht worden ist, so gibt für jede Stellung des beweglichen Mechanismus die Entfernung $\overline{MF}$ die Grösse des Trägheitsradius x an für diejenige Axe, welche mit der Längsaxe des Gliedes den durch die Richtung von MF und die zu BM senkrechte Richtung JMN bestimmten Winkel (in der Figur $\sphericalangle$ LMN) bildet. Dies ist leicht einzusehen:

Aus der Figur ist ersichtlich, dass BH immer parallel CM bleibt, da beide die Gegenseiten eines Vierecks BHMC bilden, in welchem das andere Paar Gegenseiten BC und HM gleich und parallel ist. Ferner bleibt DB auch stets parallel CM, da die beiden Dreiecke CDM und MBC, welche auf derselben Grundlinie stehen, congruent sind, also dieselbe Höhe besitzen. *Es liegen also D, B und H stets in gerader Linie.*

Da MG = GF = FE = ME, so ist ferner MF die Halbirende des Aussenwinkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks DHM, folglich ist MF parallel der Grundlinie DH dieses Dreiecks und daher auch parallel CM. *Es liegen also auch C, M und F stets in einer geraden Linie, welche der Geraden DBH parallel läuft.*

Der Abstand dieser beiden Parallelen ist BM . sin $\widehat{BML}$ oder, da BM = c und BML das Complement zu dem Winkel γ, welchen die Richtung von MF mit der Richtung der zu BM senkrechten Geraden JMN bildet, $c \cdot \cos\gamma$. Man hat nun ferner in HGF ein gleichschenk-

liges Dreieck, in welchem die Halbirende des Winkels HGF stets parallel MF läuft, da MF selbst Halbirende des zu $\widehat{HGF}$ correspondirenden Winkels GME ist. Daher steht die Grundlinie HF dieses Dreiecks stets senkrecht auf MF und stellt direct den Abstand der beiden Parallelen DH und CF dar; es ist infolge dessen $\overline{HF} = c \cdot \cos\gamma$. In dem rechtwinkligen Dreieck MFH besitzt aber ausserdem die Hypotenuse MH die constante Länge a, folglich besteht für die Kathete MF die Relation

$$\overline{MF}^2 = a^2 - c^2 \cos^2\gamma \, .$$

Es gibt also MF in der That die Grösse des Trägheitsradius x an.

Bringt man einen in M drehbaren Masstab an, welcher einen Schlitz zur Führung der Axe F besitzt, so kann man an ihm die Länge von x für jede beliebige Grösse des Winkels γ ablesen, wobei dieser Winkel γ durch einen die Gerade FM über M hinaus verlängernden Pfeil und einen mit BM fest verbundenen Transporteur mit dem Mittelpunkt M eingestellt wird.

Der ausgeführte Mechanismus liefert die Trägheitsradien für die Schwerpunktsaxen des Oberschenkels; für diesen hatte sich ergeben

$a = 11{,}22$ cm und $b = 4{,}555$ cm, woraus folgt $c = 10{,}254$ cm.

Hält man den Cartonstreifen BM des Mechanismus fest und setzt den letzteren in Bewegung, so beschreibt der Punkt F eine Curve, deren Gleichung in Bezug auf ein Polarcoordinatensystem mit dem Mittelpunkt M, der Axe MB′ und dem Winkel ϑ

$$r^2 = a^2 - c^2 \sin^2\vartheta,$$

da ϑ das Complement zu γ ist.

Diese Curve ist aber bekanntlich die Fusspunktcurve der Ellipse mit dem Mittelpunkt M, der grossen Halbaxe a und der linearen Excentricität $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, wo b die kleine Halbaxe bedeutet. Der eine Brennpunkt dieser Ellipse ist der festgehaltene Punkt B, der andere B′ liegt auf der Verlängerung von BM.

Man kann also den beschriebenen Mechanismus gleichzeitig dazu verwenden, die Fusspunktcurve einer bestimmten Ellipse zu zeichnen. Gibt man sich von vornherein in der Ebene der Zeichnung die Lage des Mittelpunktes M und der beiden Ellipsenbrennpunkte B und B′ an, so braucht man nur einmal den Mechanismus so festzulegen, dass B und M mit den in der Zeichenebene markirten Punkten B und M zusammenfallen, ohne dass die Bewegung des Mechanismus gehemmt wird, dann zeichnet der Punkt F die rechte Hälfte der Fusspunktcurve. Darauf dreht man den ganzen Mechanismus um den immer noch fest bleibenden Punkt M um 180° herum bis B mit B′ zusammenfällt und bekommt auf diese Weise auch noch die andere Hälfte der Curve.

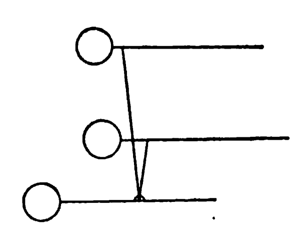
(O. Fischer.)

Zweiter Abschnitt. Mathematische Physik.

T. Apparate und Modelle zur Veranschaulichung der Gesetze der Fortpflanzung von Wellen.

265 **Wellenmaschine zur Demonstration der Superposition von Wellen** von Prof. **L. Boltzmann**, Univ. München, ausgestellt vom **Physikalischen Institut der Universität Graz**.

Die Wellenmaschine zeigt untereinander drei Reihen von Kugeln. Die Kugeln der obersten Reihe sind rot, die der mittleren gelb, die der untersten weiss bemalt. Jede Kugel ist am Ende eines horizontalen Stabes befestigt, der um den andern Endpunkt A drehbar ist (s. Figur). Der Stab geht durch den verticalen Schlitz eines Messingblechs hindurch, so dass er sich nur in einer verticalen Ebene hin und her bewegen kann. Nahe dem kugeltragenden Ende kann unter der obersten und mittleren Reihe der Stäbe je eine Schiene von beliebiger Gestalt hindurchbewegt werden, auf welcher die Stäbe durch ihr Gewicht aufruhen. Dadurch kann in der obersten respective mittelsten Kugelreihe (der der roten resp. gelben Kugeln) in bekannter Weise eine wellenähnliche Bewegung erzeugt werden. Jede weisse Kugel dagegen ist mit der darüberliegenden roten und gelben Kugel so verbunden, dass ihre Bewegung immer die algebraische Summe der Bewegungen der beiden andern Kugeln ist, so dass also die weisse Kugelreihe jedesmal die Superposition der beiden in der roten und gelben Kugelreihe erregten Wellen zeigt.

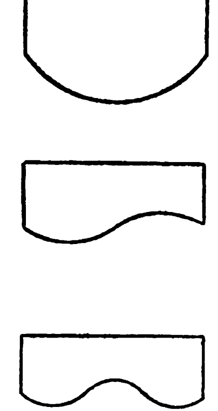


Dies ist in der folgenden Weise bewirkt: Die beiden Enden einer Schnur sind an den oberen resp. mittleren Stab nahe dem kugeltragenden Stabende angeknüpft. Der untere Stab dagegen trägt in der Mitte einen Ring, durch welchen die Schnur hindurchgezogen ist (s. Figur). Um nun die Interferenz zweier gleichgerichteter Wellenzüge zu zeigen, können die Schienen fest verbunden werden. — Um die Interferenz entgegengesetzt laufender Wellenzüge (stehende Wellen) zu zeigen, ist an jeder Schiene eine Zahnstange befestigt. Zwischen beide Zahnstangen kann ein Zahnrad eingeschoben werden, dessen Drehung beide im entgegengesetzten Sinne bewegt.

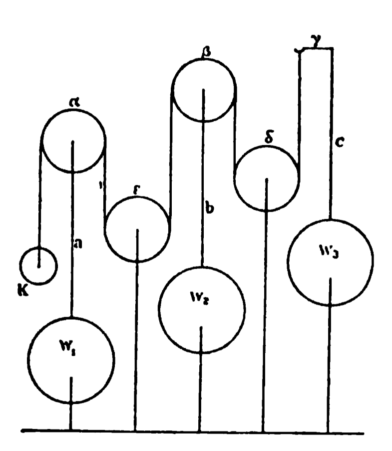
(L. Boltzmann.)

266 Zwei Apparate, um die Obertöne gezupfter Saiten zu zeigen von Prof. **L. Boltzmann**, München, ausgestellt vom **Physikalischen Institut der Universität Graz**.

1. Apparat. Über 5 parallele, rechteckige Metallplatten laufen in passenden Einschnitten 17 Schnüre, deren eines Ende an der hintersten Metallplatte festgemacht ist, deren anderes Ende je eine Kugel trägt. Alle Kugelcentra stehen ursprünglich in einer horizontalen Geraden. Zwischen je zwei Metallplatten können Metallbleche von den aus der Figur ersichtlichen Formen eingesteckt werden. Dadurch werden die verschiedenen Schnüre zwischen die beiden Metallplatten verschieden tief hinabgezogen und daher die Kugeln so hinaufgezogen, dass ihre Centra in eine Curve zu liegen kommen, welche die Superposition aller jener Curven darstellt, von denen die eingesteckten Metallbleche nach unten begrenzt werden. Stellen letztere Curven die Partialtöne einer in der Mitte, in $1/3$ ihrer Länge etc. gezupften Saite dar, so liegen die Centra der Kugeln in einer Curve, welche die Gestalt der gezupften Saite selbst darstellt.



2. Apparat. Derselbe dient dazu, um nicht bloss die Zerlegung der Gestalt der in der Mitte gezupften Saite im ersten Momente ihrer Be-



wegung, sondern auch während des ganzen Verlaufes der Bewegung zu zeigen. Die nebenstehende Figur stellt bloss jene Bestandteile dar, welche in einer und derselben verticalen Ebene liegen. a, b, c sind 3 Stäbe, die so geführt

sind, dass sie sich bloss vertical auf und ab bewegen können. Ihre unteren Enden ruhen durch das eigene Gewicht auf 3 Walzen, W_1, W_2, W_3, während die beiden ersten Stäbe oben je eine Rolle α und β, der dritte dagegen einen Haken γ trägt. Am Haken ist eine Schnur befestigt, die zuerst über die fixe Rolle δ, dann über die bewegliche β dann wieder über eine fixe Rolle ε, dann über die bewegliche Rolle α läuft und am Ende eine Kugel $\varkappa$ trägt. Wir denken uns nun 17 in dieser Weise eingerichtete Rollensysteme mit 17 Kugeln $\varkappa$ neben einander aufgestellt. Die Walze W_1 ist für alle 17 Stäbe a ein und dieselbe und von solcher Gestalt, dass bei ihrer Umdrehung die 17 Stäbe a dieselbe Bewegung machen, wie die Teilchen einer stehenden einfachen Sinuswelle. Diese ist an den 17 Rollen α sichtbar. In gleicher Weise kann durch Umdrehung der Walze W_2 eine einfache Sinusschwingung der Stäbe b, durch Umdrehung der Walze W_3 eine solche der Stäbe c erzeugt werden. Während jedoch auf alle 17 Stäbe a nur eine halbe Welle entfällt, so entfallen auf die 17 Stäbe b $^3/_2$, auf die 17 Stäbe c $^5/_2$ Wellen. Die Rollen β zeigen also eine Wellenbewegung von 3mal kleinerer, die Haken γ eine Wellenbewegung von 5mal kleinerer Wellenlänge als die Rollen α. Ferner sind die 3 Walzen so durch Zahnräder verbunden, dass auf eine Umdrehung der ersten 3 Umdrehungen der zweiten und 5 Umdrehungen der dritten Walze kommen. Endlich sind noch die Amplituden der drei Wellengattungen so gewählt, dass sie denen der drei ersten Partialtöne einer in der Mitte gezupften Saite entsprechen. Die letzte Amplitude ist natürlich verdoppelt. Die Kugeln $\varkappa$ machen dann annähernd die Bewegungen der Teilchen der Saite selbst.

(L. Boltzmann.)

267 Zwölf Photographien zur Darstellung der von einer abgeschossenen Flintenkugel erzeugten Wellenbewegung von **C. V. Boys**, Royal college of science. **South Kensington Museum.**

Beschreibung der Photographien.

No. *10.* Schema der von Boys beim Photographiren der Kugeln etc. benutzten elektrischen Schaltungen.

„ *11.* Allgemeine Ansicht des Laboratoriums und der Aufstellung der Apparate.

„ *13.* Photographie der Martini-Henry-Kugel.

„ *14.* Photographie der Magazine-rifle-Kugel.

„ *18.* Dieselbe in einer Kohlensäure- und Ätherdampfatmosphäre.

„ *20.* Photographie, welche zeigt, dass bei nahezu streifender Incidenz die Wellen nicht reflectirt werden, sondern sich mit verstärkter Intensität vorwärts bewegen. Es ist dies das gleiche Phänomen wie bei der „Flüstergallerie“, welches auch bei der Ablenkung von Kugeln eine Rolle spielt, die ganz nahe an einer Wand vorbeigehen.

No. *22.* Photographie, welche die Verschiedenheit im Verhalten von Wellen bei Reflexion unter verschiedenen Einfallswinkeln zeigt. Bei aa ist vollkommene Reflexion, bei bb gar keine Reflexion, sondern bloss Beugung der Wellenfläche nach vorn; cc zeigt den Übergang vom ersten zum zweiten Falle. Die Beugung der Wellenfläche bei dd ist eine interessante Veranschaulichung des Huygens'schen Princips der Wellenfortpflanzung.

„ *27.* Photographie eines Schusses aus einer Vogelflinte.

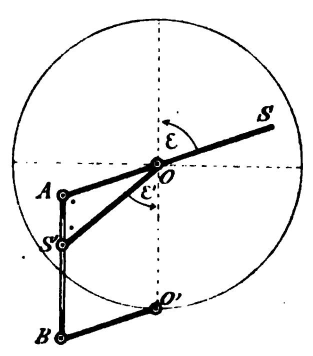
„ *29.* Photographie einer Kugel, die einen Carton und dann eine Glasplatte durchbohrt.

„ *30.*, „ *31.*, „ *32.* Dasselbe in späteren Stadien; zuletzt in etwa 15" Abstand von der Platte.

268 Beschreibung des Chronographen von Bashforth, in verschiedenen Werken und Abhandlungen von Rev. **F. Basforth**, London.

Der Chronograph dient speciell zur Bestimmung des Luftwiderstandes bei Geschossen. Beigegeben sind Ballistische Tafeln, im Gebrauch der britischen Armee.

269 Bewegliches Modell der Reusch'schen Lichtbrechungsconstruction, nach Angabe von Prof. **Weinhold** in Chemnitz, ausgeführt und ausgestellt von Mechaniker **G. Lorenz**, Chemnitz.



Ist OO'AB ein Gelenkparallelogramm, dessen Seite OO' auf einer Metallscheibe festgehalten wird und dessen Seite AB einen Schlitz trägt, in welchen der freie Endpunkt S' eines um den Punkt O drehbaren Stäbchens OS' einspielt, dann ergibt sich aus dem veränderlichen Dreieck OAS', wenn OA = a, OS' = a', dass $\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{a'}{a}$ ist, also während der Bewegung constant bleibt. Da nun ε und ε' die Winkel von OA und OS' gegen die festgehaltene Parallelogrammseite OO' sind, so können OA und OS' als Richtungen von einfallendem und gebrochenem Strahl ge-

deutet werden, wenn OO' das Einfallslot und eine auf der Metallscheibe markirte zu OO' senkrechte Linie die Grenze der zwei Medien mit dem zugehörigen Brechungsindex $\frac{a}{a'}$ repräsentirt.

(Kleiber.)

270 **Zwei Modelle zur Erläuterung der Lichtbrechung**, nach Angabe von Prof. **O. E. Meyer**, Univ. Breslau, verfertigt und ausgestellt von **J. Kleinert**, Mechanicus in Breslau.

1. Modell zur Erläuterung des Gesetzes für die Brechung ebener Lichtwellen. Es stelle in Fig. 1 die Linie FAC die Grenze zweier durchsichtigen Medien dar, deren Brechungsverhältnis $n = 1{,}5$ angenommen ist. AB bezeichne die Lage der einfallenden Wellenebene, also BAC den Einfallswinkel. Die Lage der gebrochenen Welle kann man auf folgende Weise zeichnen. Man wählt die Lage von F und C neben A so, dass, wenn $FA = b$ gesetzt wird, $FC = n^2 b$ ist; man zieht mit dem Halbmesser nb einen Kreisbogen um F; dann verlängert man AB über A hinaus bis zum Durchschnitt mit dem Kreise und zieht vom Durchschnittspunkte E die gerade Linie EDC nach dem Punkte C. Dann gibt DC die Lage der gebrochenen Wellenebene, welche aus der einfallenden AB entsteht, der Huygens'schen Construction entsprechend an, d. h. so, dass die von A auf EC und von C auf AB gefällten Lote AD und BC im Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, also von $1 : n$ stehen.

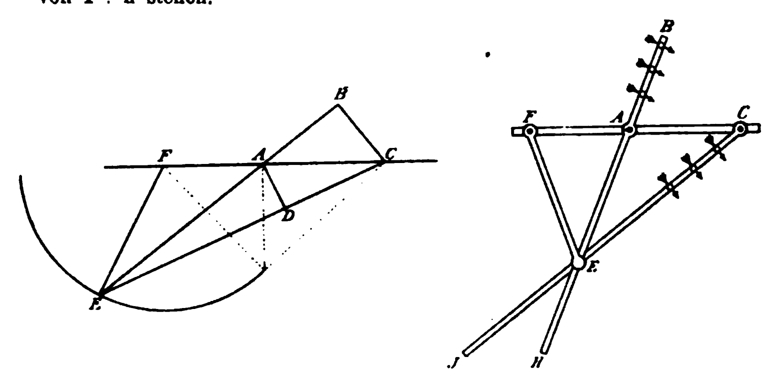


Fig. 1. Fig. 2.

Der Beweis folgt aus der Annahme, dass $FA : FE = FE : FC = 1 : n$ ist; daher sind die Dreiecke EFA und CFE einander symmetrisch ähnlich, folglich $EA : EC = FA : FE = 1 : n$, also endlich auch $AD : BC = 1 : n$.

Hiernach ist das in Fig. 2 gezeichnete Modell so eingerichtet, dass an einer horizontalen Stange FAC drei andere drehbar angebracht sind

die Stange FE trägt in E einen Schieber, in welchem HAB und CE frei gleiten. Die Pfeile, welche die Richtung der Fortpflanzung andeuten sollen, wird man herumdrehen, wenn der Übergang des Lichtes aus dem stärker brechenden in das schwächer brechende Mittel erklärt werden soll. Die Stellung, bei welcher der Kreuzungspunkt E senkrecht unter A liegt, also AB vertical steht, entspricht dem Beginne der Totalreflexion.

2. ***Modell zur Erläuterung des Brechungsgesetzes in Linsen.*** Das bekannte Gesetz für Convexlinsen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ lässt sich nach Fig. 3,

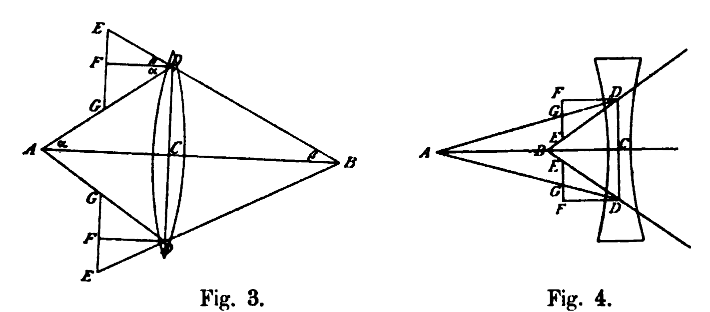


Fig. 3. Fig. 4.

in welcher AC $= a$, CB $= b$ sei, in die Form $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta = \text{const.}$ bringen. Wird also bei unveränderter Lage von D der Punkt A verschoben, so bewegt sich B so, dass der Abstand EG constant bleibt.

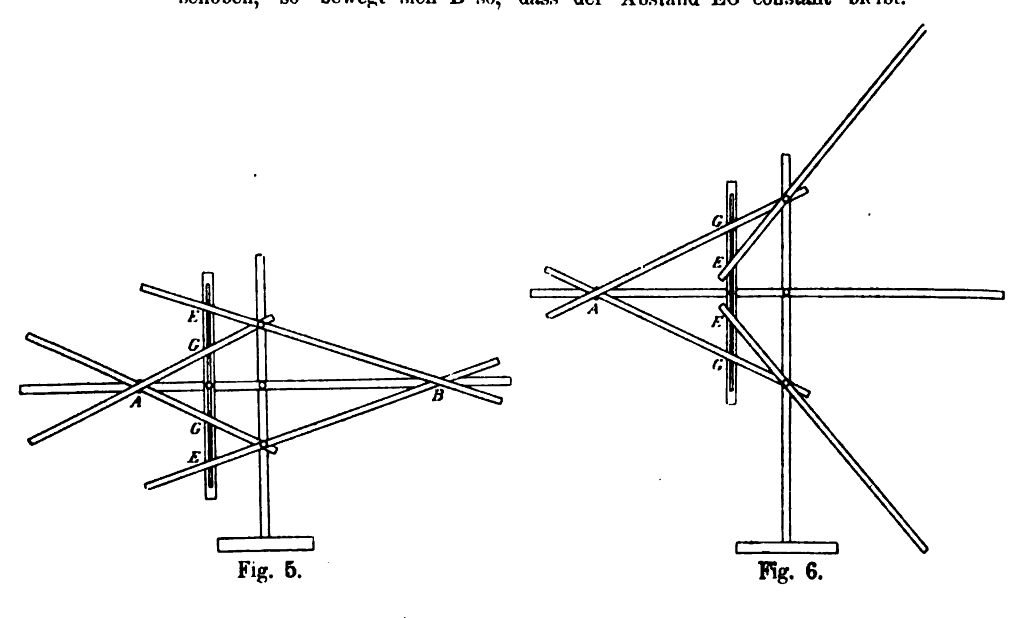


Fig. 5. Fig. 6.

Hiernach versteht man leicht die Einrichtung des in Figur 5 gezeichneten Modells; der Punkt A und die Strecken EG sind mit gabelförmigen Schiebern beweglich. Für Concavlinsen gilt nach Fig. 4,

$$\tan\alpha - \tan\beta = \text{const., also abermals } EG = \text{const.}$$

Das Modell kann in einer etwas anderen Zusammensetzung, welche durch Fig. 6 erläutert wird, ebenso auch für diesen Fall gebraucht werden.

(O. E. Meyer.)

271 **Interferenzfläche der Newton'schen Ringe.** Von Prof. **Sohncke**, München.

Eine planparallele Glasplatte, auf einer Planconvexlinse liegend, gibt im Natriumlicht beim Einfallswinkel 54°44' dunkle Ringe, deren *erster* und *zwanzigster*, fünffach vergrössert, dargestellt sind. Alle Ringe sind Curven doppelter Krümmung; sie liegen sämtlich auf einer *Regelfläche dritter Ordnung: „Der Interferenzfläche"*, und sind die Schnitte dieser Fläche mit coaxialen elliptischen Cylindern, deren Horizontalschnitte concentrische Kreise sind. Die Fläche ist unabhängig vom Krümmungsradius der Convexlinse, dagegen abhängig von der Dicke und dem Brechungsquotienten der planparallelen Platte. Sie besitzt eine endliche Doppellinie. Projicirt man die Ringe durch Parallele zur Axe des Beobachtungsmikroskops auf eine Horizontalebene, so bilden die Projectionen concentrische Kreise.

Die in der centralen Einfallsebene gelegenen Ringdurchmesser liegen alle auf einer geraden Linie: der *Hauptgeraden*, deren Neigung ω gegen die Horizontale allein vom Einfallswinkel ϑ abhängt und durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\vartheta \,.\, \cos\vartheta}{1 + \cos^2\vartheta}$$

Diese Durchmesser befolgen das Gesetz der Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen und haben alle zum Mittelpunkte denjenigen Punkt P, in welchem der Berührungspunkt der Kugel und der planparallelen Platte nach der Brechung durch die Platte zu liegen scheint. Die dem Lichte zugewandten Hälften der Durchmesser erheben sich über die Horizontale, die lichtfernen Hälften senken sich darunter.

Richtet man das Mikroskop auf den Punkt P und verschiebt es vorwärts längs seiner Axe um eine gewisse, von der Dicke der planparallelen Platte abhängige Grösse, zieht dann durch den jetzt scharf gesehenen Punkt Q eine *Quergerade* senkrecht zur centralen Einfallsebene, so trifft diese alle Ringe. Die auf dieser Quergeraden gemessenen Querdurchmesser haben alle denselben Mittelpunkt Q und sind den auf die Horizontale projicirten, in der centralen Einfallsebene liegenden Durchmessern gleich; (hierbei wird durch Parallele zur Mikroskopaxe projicirt.) Die Gerade PQ ist die erwähnte Doppellinie; sie heisse Z_1.

Wählt man als X-Axe des Coordinatensystems die Hauptgerade und P als Anfangspunkt, ferner die Y-Axe senkrecht zur Einfallsebene, endlich die Z-Axe schief gegen die X-Axe, nämlich in die Doppellinie Z_1 fallend, also der Mikroskopaxe parallel, so heisst die Gleichung der Interferenzfläche:

$$0 = x(x^2 + y^2) \sin\vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2\vartheta) - 2zy^2 \cos^2\vartheta$$

Vergl. *Sohncke* und *Wangerin*: Neue Untersuchungen über die Newton'schen Ringe: Wiedemanns Annalen *12*. 1881. S 1 und 201.

(Sohncke.)

272 **Dieselbe Fläche, dargestellt als Regelfläche durch ihre erzeugenden Geraden.** Drahtmodell von Prof. **W. Voigt**, Univ. Göttingen.

273 **Sphärische und ebene Gläser zur Controle der Genauigkeit der Krümmung.** Ausgeführt und ausgestellt von **C. A. Steinheil Söhne**, München.

1. Sphärische Flächen.

Zwei Flächen, welche aufeinander passen, so dass die sie trennende Luftschichte an allen Stellen gleich dick ist, müssen sphärisch sein, wenn diese Eigenschaft bei beliebigem Verschieben der Flächen gegeneinander stets erhalten bleibt.

Ausgestellt sind drei sphärische Flächen, mit circa 60 mm Durchmesser, von denen zwei den gleichen Halbmesser + und — haben und, in jeder Lage gegeneinander, die gleiche Farbe der Newton'schen Farbenringe zeigen. Das dritte ist concav mit etwas grösserem Halbmesser als die beiden anderen, so dass es mit dem convexen combinirt Newton'sche Farbenringe zeigt, welche gegen den Rand hin immer dickeren Luftschichten entsprechen, während sich die Gläser in der Mitte berühren.

Mit den letztgenannten beiden Gläsern lässt sich die Methode zeigen, wie Fraunhofer die Probegläser anzuwenden pflegte, indem das runde Bild der Newton'schen Farbenringe durch Neigen der Gläser gegeneinander über die Fläche bewegt wurde, wobei es rund bleiben muss, wenn die Flächen sphärisch sind. Bei Anwendung des runden Fleckes ist die Probe auf sphärisch gegeben, während die genaue Einhaltung des gleichen Halbmessers viel sicherer controlirt wird, wenn die Gläser über die *ganze* Fläche nur *eine* Farbe zeigen.

2. Planflächen.

Stellt man drei sphärische Flächen mit unendlich grossem Halbmesser (Planflächen) her, so muss jede dieser Flächen auf jede andere gelegt eine parallele Luftschichte einschliessen, welche bei regelmässiger Gestalt gleich bleibt, wenn man die Flächen beliebig gegeneinander verschiebt.

Ausgestellt sind drei Plangläser, deren Genauigkeit sich dadurch kenn-

zeichnet, dass je 2 aufeinander gelegt von den Newton'schen Farbenringen stets nur eine Farbe eines Ringes zeigen.

Ein Mass für die Empfindlichkeit dieser Probe hat man dadurch, dass schon die Erwärmung einer Oberfläche durch die darüber gehaltene Hand genügt, um die Farben bedeutend zu ändern; indem sich durch diese Erwärmung das obere Glas biegt und die Luftschichte zwischen beiden Flächen eine positive Luftlinse bildet, so dass der Abstand der Flächen in der Mitte grösser wird als am Rande, an welchem sie sich berühren.

Von den Gläsern ist nur je eine Fläche genau gearbeitet, die ungenau gelassene ist durch eine stärkere Facette gekennzeichnet.

Die Gläser haben sämtlich einen Durchmesser von ca. 60 mm.

(A. Steinheil.)

274 Neun Wandtafeln für den mathematisch-optischen Unterricht. Zum Gebrauche an der Industrieschule Nürnberg, entworfen von Rector **Flüchtbauer.**

Diese Wandtafeln verdanken ihre Entstehung dem rühmlich bekannten Werke: „Darstellende Optik von *F. Engel* und *K. Schellbach*,“ dessen schöne und lehrreiche, aber nur aus nächster Nähe erkennbaren Darstellungen sie zur Erläuterung vor einem grossen Zuhörerkreise verwerten wollten. Sie wurden im Jahre 1882 zunächst für den Unterricht in der Optik an der k. Industrieschule Nürnberg entworfen und von Herrn *Ehrmann*, nunmehr Reallehrer in Kronach, auf straff gespanntem, matt schwarzem Papier mit weissen und farbigen sog. Oelkreidestiften gezeichnet und fixirt.

Die Tafeln umfassen nur einen kleinen Teil der Probleme des bezeichneten Werkes, während sie auch andere für den Unterricht wichtige Aufgaben der Optik behandeln. In den Constructionen weichen sie vielfach wesentlich von den *Schellbach*'schen ab. Sie tragen auch dem Umstande Rechnung, dass ein durch Spiegelung oder Brechung entstandenes Bild eines leuchtenden Punktes nicht, wie es in jenem Werke angenommen ist, stets in dem Berührungspunkte des mittleren ins Auge gelangenden Strahles mit der Brennlinie des l. Punktes zu suchen ist, sondern vielmehr nach der für einige besondere Fälle neuerlich erwiesenen Annahme der alten Optiker im Schnittpunkte des mittleren, die Brennlinie berührenden, Augenstrahles mit der Axe der Brennlinie.

Der Inhalt der Wandtafeln ist folgender:

Taf. 1. Brennlinie eines sphärischen Spiegels, welchen ein leuchtender Punkt bestrahlt, der zwischen der Spiegelfläche und deren Brennpunkt liegt.

Taf. 2. Abänderung dieser Brennlinie, wenn der leuchtende Punkt einmal im Brennpunkt und dann auf der Oberfläche des Spiegels liegt.

Taf. 3. Brennlinie für den Fall, dass der leuchtende Punkt zwischen dem Brennpunkt und dem Mittelpunkte des Spiegels liegt. — Die Tafel

enthält ausserdem das Bild einer dem Spiegel concentrischen kreisförmigen leuchtenden Linie, wie es von verschiedenen Stellungen des Auges aus erscheint, sowohl für den letzten Fall als für den der Taf. 1.

Taf. 4. Brennlinien des sphärischen Spiegels, wenn der leuchtende Punkt ausserhalb der Kugelfläche und wenn derselbe in unendlicher Ferne liegt. — Bild einer kreisförmig gekrümmten leuchtenden Linie für den ersteren Fall.

Taf. 5. Brennlinien von drei unter Wasser befindlichen, in einer geraden Linie liegenden leuchtenden Punkten, deren Strahlen durch die ebene Wasserfläche gebrochen werden. Bild einer leuchtenden Linie, welche jene 3 Punkte enthält, für eine gegebene Stellung des Auges. — Brennlinien und Bilder, wenn die leuchtenden Punkte in der Luft, das Auge aber unter Wasser gedacht wird.

Taf. 6. Farbenzerstreuung durch ein Schwefelkohlenstoffprisma, das von weissen Parallelstrahlen getroffen wird. Erzeugung eines objectiven sog. reinen Spectrums mit Hilfe einer Objectivlinse. — Brennlinien im Hauptschnitte eines solchen Prismas, das ein naher leuchtender Punkt bestrahlt, für 2 von demselben ausgesendete verschiedenfarbige (rote und violette) Strahlenbüschel.

Taf. 7. Construction eines achromatischen Prismas aus Crown- und Flintglas. Der Winkel des Crownglasprismas ist zu 60° angenommen, derjenige des Flintglases dazu construirt. — Vereinfachte Construction, wenn der Winkel des ersteren Prismas ein kleiner ist.

Taf. 8. Farbenzerstreuung in Prismen mit gerader Durchsicht. Es sind für zwei Combinationen, welche aus fünf und aus sieben Crown- und Flintglasprismen bestehen, sowohl die Endflächen (die brechenden Winkel der inneren Prismen zu 90° angenommen) als die Farbenzerstreuungen für 6 und resp. 3 verschiedenfarbige Strahlen construirt.

Taf. 9. Zur Theorie des Regenbogens; zugleich Brennlinie einer brechenden Wasserkugel für parallel auffallende Strahlen. — Die Brennlinien sind für rotes Licht, die in beiden Regenbogen wirksamen Strahlen für rote, grüne und violette Strahlen construirt.

Sämtliche Brennlinien, wie auch die Berührungspunkte einzelner Strahlen mit denselben sind unter Anwendung verschiedener neuerer, zum Teil eigener Methoden mit möglichster Genauigkeit und unter Anwendung der natürlichen Verhältniszahlen construirt, so dass die gefundenen Winkel stets nur um eine geringe Anzahl von Minuten unrichtig sein können.

Die Bilder leuchtender Linien nach der Annahme von *Engel* und *Schellbach* sind punktirt, nach der vorerwähnten, wohl in den meisten Fällen berechtigten Annahme aber ausgezogen.

(Füchtbauer.)

275 **Vier Modelle aus Carton über die Helligkeitsflächen von gegossenem Gips bei veränderlichen ausfallenden Lichtstrahlen und bei den Einfallswinkeln von bezw. 0, 30, 60, 82 1/2°.** Nach den Beobachtungsergebnissen von Prof. **Chr. Wiener**, techn. Hochsch. Karlsruhe, ausgeführt von dessen Assistenten, dem Studirenden **C. Tesch**, 1892.

Fällt auf ein Flächenelement von gegossenem Gips Licht unter einem bestimmten Einfallswinkel ein, so erscheint dies Element unter verschiedenen Sehrichtungen verschieden hell. Diese Helligkeiten wurden von *Chr. Wiener* im Jahre 1883 gemessen und die Ergebnisse nach dem Gesetze der Stetigkeit ausgeglichen. Trägt man die Helligkeiten auf den wechselnden Sehrichtungen oder ausfallenden Strahlen vom Elemente aus nach einem unveränderlichen Masstabe auf, so bilden die Endpunkte der Strecken die Helligkeitsfläche, welche in den Modellen für die angeführten 4 Einfallswinkel dargestellt ist, und zwar durch Cartonscheiben nach Meridianschnitten, deren Ebenen durch die Flächennormale gehen, und durch Kegel, deren Umdrehungsaxe dieselbe Normale bildet. Nach dem Lambert'schen Gesetze wäre die Helligkeit unabhängig von der Sehrichtung und nur mit dem Cosinus des Einfallswinkels ε proportional, so dass man sie $= \cos \varepsilon$ setzen könnte. Die Helligkeitsfläche wäre daher nach *Lambert* eine Halbkugel vom Halbmesser $\cos \varepsilon$. Auch diese Fläche ist zur Vergleichung in denselben Modellen dargestellt. Beide Oberflächen sind durch weisse und schwarze an den Grenzcurven nach innen angelegte Färbung unterschieden. Die Modelle zeigen,

1) dass die wahre Helligkeitsfläche sich der Lambert'schen bei Ausfallswinkeln α von 0 bis 60° ziemlich gut anschliesst;

2) dass für $\alpha > 60°$ die wahre Helligkeit kleiner als die Lambert'sche ist, und bei $\alpha = 90°$ etwa $= 0{,}6$ derselben wird;

3) dass die Helligkeit bei grösseren Einfallswinkeln grösser auf derjenigen Seite der Flächennormale wird, welche dem einfallenden Strahle gegenüberliegt, als auf derselben Seite;

4) dass bei Einfallswinkeln ε, welche grösser als 45° sind, eine Spiegelung eintritt, welche mit wachsendem Einfallswinkel steigt. Bei $\varepsilon = 75°$ ist eine deutliche Spiegelung oder ein Glanz bemerkbar, welcher die grösste Stärke von 2,2 bei $\alpha = 79°$ erreicht. Bei $\varepsilon = 82^1/_2°$ ist die Helligkeit am stärksten und $= 5{,}2$ bei $\alpha = 85°$; bei $\varepsilon = 86^1/_4°$ ist sie am grössten und $= 14{,}4$ bei $\alpha = 88°$; also stets bei Ausfallswinkeln, die etwas grösser als die Einfallswinkel sind.

Diese Ergebnisse sind eingehend dargestellt in einer Abhandlung von Chr. Wiener „*Über die Zerstreuung des Lichtes durch matte Oberflächen*“, enthalten in der Festschrift der technischen Hochschule zu Karlsruhe zum 40jährigen Regierungsjubiläum Sr. Königl. Hoheit des Grossherzogs Friedrich von Baden, 1892.

(Chr. Wiener.)

U. Modelle zur Erläuterung der Krystallstructur.

276 **Glas-Krystall-Modelle**, nach den Angaben von Director **Schnabel**, Oberlehrer **Kysäus**, Oberlehrer **Engstfeld** u. a., angefertigt und ausgestellt von **F. Thomas** in Siegen.

Die Modelle veranschaulichen: *A. Vollflächner*; *B. Halbflächner* und *Viertelflächner*; bei diesen sind die Flächen der aus feinem Carton oder Glas gefertigten holoedrischen Form mit den gläsernen der hemiedrischen oder tetartoedrischen Form überlegt, so dass die Entstehung der letzteren Formen aus den holoedrischen anschaulich verfolgt werden kann; *C. Combinationen*; der aus Carton oder Glas angefertigte Krystall ist auf der Combinationsfläche mit Glastafeln bedeckt, die bis zur Vervollständigung des abändernden Krystalls erweitert werden; *D. Zwillingskrystalle*; aus Glas, mit den Axen, wo es nötig scheint, bei den Hemitropieen zum Drehen eingerichtet.

Die sehr sorgfältig construirten Krystallmodelle sind 5 bis 8 Zoll gross, so dass sie von einem zahlreichen Auditorium bequem in ihren einzelnen Beziehungen betrachtet werden können, enthalten im Innern die Axen und Hilfslinien in Gestalt verschieden gefärbter Seidenfäden, die etwa nötigen Körper in Gestalt leichter, gefärbter Pappe. Die Kanten sind mit feinen Leisten von buntfarbigem Papier eingefasst, die Farben entsprechen der Symmetrie der Kanten. Die Nummern der Verzeichnisse, die wir nachstehend für die ausgestellten Krystalle wiedergeben, sind mit roter Ölfarbe auf eine der Glasflächen geschrieben.

Bezüglich weiterer Angaben, wie auch bez. der Preise der Modelle sei auf das Preisverzeichnis der Firma Thomas verwiesen.

Ausgestellt sind die folgenden Krystallmodelle:

1. Reguläres (tesserales) System.

A. Vollflächner. (Holoeder.)

1. Oktaeder.
2. Würfel (Hexaeder) mit einliegendem Oktaeder.
3. Rhombendodekaeder (Granatoeder).
4. Trapezoeder (Leuzitoeder) erster Art.
8. Achtundvierzigflächner (Hexakisoktaeder).

B. Halbflächner. (Hemieder.)

9. Tetraeder auf Oktaeder.
12. Pentagondodekaeder auf Pyramidenwürfel.
15. Gebrochenes Pyramidentetraeder auf 48-Flächner.
16. Gebrochenes Pentagondodekaeder auf 48-Flächner.

C. Viertelflächner. (Tetartoeder.)

17. Tetraedrische Pentagondodekaeder, Dyakisdodekaeder.

E. Zwillinge.

Durchkreuzungszwillinge.

65. 2 Rhombendodokaeder durchwachsen.
66. 2 Tetraeder durchkreuzt.
*66*b. 2 Pentagondodekaeder durchkreuzt.

2. Quadratisches (zwei- und einaxiges, tetragonales, pyramidales) System.

A. Vollflächner.

67. Spitzes quadratisches Oktaeder.
71. Quadratisches Prisma 2. Ordnung mit Oktaeder.

3. Hexagonales (drei- und einaxiges, rhomboedrisches) System.

A. Vollflächner.

92. Hexagonale Doppel-Pyramide der 1. Ordnung.
94. Hexagonales Prisma 1. Ordnung mit Pyramide.
96. 12 seitige Doppel-Pyramide.

B. Halbflächner,

98. Rhomboeder über 6 seitiger Doppel-Pyramide.
100. Grundrhomboeder mit dem 1. spitzen und 1. stumpfen Rhomboeder
104. Scalenoeder über 12 seitiger Doppel-Pyramide.

4. Rhombisches (zwei- und einaxiges, orthotypes) System.

A. Vollflächner.

119. Rhombisches Oktaeder.
120. Gerades rhombisches Prisma mit inliegendem Oktaeder.

B. Halbflächner.

122. Rhombisches Tetraeder über rhombischem Oktaeder.

C. Combinationen.

124. Combinationen des rhombischen Prismas mit Oktaeder, Endflächen, Doma und Seitenflächen (Olivin-Krystall).

D. Zwillinge.

128. Durchkreuzungszwilling von Staurolith.
129. Zwilling des rhombischen Arsenikkieses.

5. Monoklinisches (klinorhombisches, monoklinoedrisches, zwei- und eingliedriges, hemiorthotypes) System.

130. Monoklinisches Oktaeder.
131. Schiefes rectang. Prisma mit eingespanntem Oktaeder.

6. Triklinisches (klinorhomboidisches, triklinoedrisches, zwei- und eingliedriges, anorthotypes) System.

138. Triklinisches Oktaeder.

(Katolog Thomas.)

277 **Serie von Krystallmodellen,** hergestellt in der Glaswarenfabrik **Steigerwald Neffe** in München, ausgestellt vom **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Die Modelle, aus geschliffenem Glas, stellen die wichtigsten Formen der verschiedenen Krystallsysteme dar.

278 **Universalmodell der Raumgitter oder parallelepipedischen Punktsysteme, nebst Schlüssel,** nach Angabe von Prof. **L. Sohncke,** techn. Hochschule München.

Das Modell dient zur Erläuterung der *Bravais*'schen Theorie der Krystallstructur. Es gestattet, die 14 verschiedenen Arten von Raumgittern zur Anschauung zu bringen. Weil jedoch der Einfachheit halber bei diesem Exemplar von einer Veränderbarkeit der Kantenlängen abgesehen ist und nur die Winkel veränderbar sind, so fallen nicht alle 14 Arten verschieden aus. Um die Winkel zu verändern, ist jede Ecke mit 2 Scharniergelenken versehen; durch eines derselben ist es möglich, 4 parallele, ursprünglich verticale Kanten gegen die Grundfläche zu neigen; *doch müssen zuvor alle 4 horizontalen Drehaxen untereinander parallel gestellt werden*, was man mittelst des beigegebenen Schlüssels bewerkstelligt.

Genauer beschrieben in „*Carls Repertorium für Experimentalphysik*" Bd. 12. 1876.

(L. Sohncke.)

279 **Modelle der 65 regelmässigen unendlichen Punktsysteme zur Erläuterung der Theorie der Krystallstructur,** dargestellt von Professor **L. Sohncke,** techn. Hochschule München.

Ein Punktsystem heisse regelmässig, wenn die von jedem Systempunkt nach allen übrigen Systempunkten gezogenen Linienbündel einander deckbar gleich sind. Die Aufsuchung aller überhaupt möglichen regelmässigen unendlichen Punktsysteme ist in dem beiliegenden Werke: „*Entwicklung einer Theorie der Krystallstructur*", Leipzig, Teubner, 1879, durchgeführt. Von den dort angegebenen 66 Systemen ist jedoch Nr. 13 — als identisch mit Nr. 9 — zu streichen.

Tabelle der regelmässigen unendlichen Punktsysteme.

I. Systeme ohne Axen. (*Trikline*).

1. Axenloses Raumgitter.

II A. Systeme mit zweizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung (*Monokline*).

2. Zweizähliges Säulensystem.
3. Zweipunktschraubensystem.
4. System der klinorhombischen Säule.

II B. Systeme mit zweizähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen. (Rhombische).

Gruppe α.

5. System der rechteckigen Säule.
6. Zusammengesetztes rechteckiges Zweipunktschraubensystem.
7. System der Rhombensäule.
8. Rhombenoktaedersystem.

Gruppe β.

9. Zusammengesetztes rhombisches Zweipunktschraubensystem.
10. System des Oblongoktaeders.
11. Rhombisches Gegenschraubensystem.

Gruppe γ.

12. Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem erster Art.

Gruppe δ.

14. Dsgl. zweiter Art.

III A. Systeme mit dreizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung. (Rhomboedrische).

15. Rechtes } Dreipunktschraubensystem.
16. Linkes }
17. Dreiseitiges Säulensystem.
18. Rhomboedersystem.

III B. Systeme mit dreizähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen. (Rhomboedrische).

Gruppe α.

19. Rechtes } zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem.
20. Linkes }
21. Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem.
22. Zusammengesetztes Rhomboedersystem.

Gruppe β.

23. Rechtes } abwechselndes Dreipunktschraubensystem.
24. Linkes }
25. Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem.

IV A. Systeme mit vierzähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung. (Quadratische).

26. Rechtes } Vierpunktschraubensystem.
27. Linkes }
28. Vierzähliges Gegenschraubensystem.
29. Zweigängiges Vierpunktschraubensystem.
30. Quadratsäulensystem.
31. Quadratoktaedersystem.

IV B. Systeme mit vierzähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen. (*Quadratische.*)

Gruppe α.

32. Rechtes } zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem.
33. Linkes }
34. Vierzähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem.
35. Zweigängiges zusammengesetztes Vierpunktschraubensystem.
36. Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.
37. Zusammengesetztes Quadratoktaedersystem.

Gruppe β.

38. Rechtes } abwechselndes Vierpunktschraubensystem.
39. Linkes }
40. Abwechselndes zweigängiges Vierpunktschraubensystem.
41. Abwechselndes Quadratsäulensystem.

V A. Systeme mit sechszähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung. (*Hexagonale*).

42. Rechtes } Sechspunktschraubensystem.
43. Linkes }
44. Rechtes } zweigängiges Sechspunktschraubensystem.
45. Linkes }
46. Dreigängiges Sechspunktschraubensystem.
47. Hexagonalsäulensystem.

V B. Systeme mit sechszähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen. (*Hexagonale.*)

48. Rechtes } zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.
49. Linkes }
50. Rechtes } zweigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.
51. Linkes }
52. Dreigängiges zusammengesetztes Sechspunktschraubensystem.
53. Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem.

VI. Systeme mit dreizähligen Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen. (*Reguläre.*)

54. Cubisches }
55. Oktaedrisches } Zwölfpunktersystem,
56. Rhombendodekaedrisches }
57. Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem.
58. Reguläres abwechselndes Zweipunktschraubensystem.

VII. Systeme mit vierzähligen Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen. (*Reguläre.*)

59. Cubisches }
60. Oktaedrisches } Vierundzwanzigpunktersystem.
61. Rhombendodekaedrisches }

62. Reguläres Gegenschraubensystem erster Art.
63. Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art.
64. Reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem.
65. Rechtes } reguläres Vierpunktschraubensystem.
66. Linkes }

In den Modellen sind die die Punkte darstellenden Wachsperlen an Stricknadeln befestigt. Nicht jedes einzelne Punktsystem erfordert ein ganz eigenes Modell; sondern wegen der natürlichen Zusammengehörigkeit der Systeme zu engeren Gruppen ist es meistens möglich, die Systeme einer Gruppe an einem und demselben *Hauptmodell* zur Darstellung zu bringen; man hat an diesem nur leichte Veränderungen vorzunehmen, um die verschiedenen Systeme der Gruppe hervorzurufen. Nur bei den Systemen der Abteilungen VI und VII erfordert meist jedes System sein eigenes Modell. *Für die Gesamtheit solcher Systeme, deren Projection auf eine Hauptebene dieselbe Figur giebt, bedarf es immer nur eines Hauptmodells.* Also gibt es für die Systeme, welche nicht den Abteilungen VI und VII angehören, *14 Hauptmodelle,* entsprechend den 14 Abteilungen I, II A, II B α, β, γ, δ, III A, III B α, β, IV A, IV B α, β, V A, V B. Bei jedem Hauptmodell muss nun dafür gesorgt sein, dass sich die Wachsperlen in verschiedene Höhe über die Projectionsebene stellen lassen. Dazu bedarf es einer *Geradführung* für die perlentragenden Stricknadeln, sowie geeigneter *Untersätze* unterhalb der Projectionsfigur, um die Nadeln in der richtigen Höhe stehend zu erhalten. Zur Erreichung des ersteren Zweckes dienen zwei im Abstande von etwa 2 cm befindliche gleichgrosse parallele Brettchen, die in congruenter Weise mit Löchern (von hinreichender Weite, um die Nadeln leicht durchgehen zu lassen) durchbohrt sind. Die Löcher jedes Brettchens sind angeordnet wie die Punkte der betreffenden Projectionsfigur. Beide Brettchen sind vermittelst zweier, an jeder Seite zwischen ihnen liegender Leisten mit einander verbunden. Bei Horizontalstellung der Brettchen liegt je ein Loch des oberen Brettchens senkrecht über einem Loch des unteren; durch jedes solche Lochpaar ist immer eine Nadel gesteckt. Jede Nadel trägt 2 Perlen, deren Abstand gleich der kleinsten zur Hauptaxe parallelen Deckschiebung λ ist. — Das Brettchenpaar mit den sämtlichen, perlenbesetzten Nadeln bildet ein *Hauptmodell*; es liegt auf 2 Leisten, die innen an zwei Seitenwänden eines vorn und oben offenen Kästchens angebracht sind. — Um nun die Perlen in eine gewisse verlangte Höhe stellen zu können, dient jedesmal ein Untersatz, bestehend aus Holzklötzchen, die in passender Grösse und Anordnung auf einem Brett befestigt sind. Um ihn unterstellen zu können, hebt man zunächst — unter Festhaltung des Brettchenpaares — alle Nadeln des Hauptmodells vermittelst eines untergeschobenen glatten Brettchens in die Höhe, setzt darauf den betreffenden Untersatz in das Kästchen ein und zieht das untergeschobene glatte Brettchen weg. Dann fallen die einzelnen

Stricknadeln auf die Klötzchen des Untersatzes und die Perlen stehen in den verlangten Höhen. — Für 2 solche Hauptmodelle, welche in gleicher Anordnung n-ecken, resp. 2n-ecken tragen, (entsprechend Systemen mit n-zähliger Hauptaxe von *einer* Richtung, resp. mit ineinanderfallenden n-zähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen) hat man natürlich nur eine und dieselbe Reihe von Untersätzen nötig. Hiervon bin ich nur bei dem Hauptmodell der beiden hexagonalen Gruppen V A und V B abgewichen, um die Systeme der letzten Abteilung nicht zu sehr zu überladen.

Die meisten Modelle für die Systeme der Abteilungen VI und VII bestehen aus 3 unter rechten Winkeln zu einer körperlichen Ecke zusammengefügten Brettchen, jedes mit perlentragenden Nadeln besetzt. So sieht man unmittelbar, wie jedes dieser Systeme aus 3, nach den 3 Dimensionen durcheinander gesteckten Teilsystemen besteht. Das Modell VII. 64 des regulären zweigängigen Vierpunktschraubensystems ist so eingerichtet, dass eines der 3 Teilsysteme leicht aus den 2 anderen, fest verbunden bleibenden, herausgenommen werden kann. — Für die Systeme, welche aus Zwölfpunktern resp. aus Vierundzwanzigpunktern bestehend angesehen werden können, habe ich nur das Modell eines 12-punkters und eines 24-punkters hergestellt.

(L. Sohncke.)

280 **Fünf Modelle von Übergangsformen zwischen einer cubischen und einer hexagonalen (tetraedrischen) Einteilung des Raumes,** von Prof. **A. Herschel**, Observatory House, Slough, Buck's, England.

V. Modelle zur Veranschaulichung der optischen, elastischen und elektrischen Eigenschaften der Krystalle.

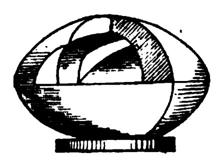
281 **Modelle für die Wellenflächen optisch ein- bez. zweiaxiger Krystalle.** Hergestellt (1880 und 1885) auf Veranlassung von Prof. **A. Brill**, Univ. Tübingen, und von Rector **Böklen** (Reutlingen). Verlag **L. Brill**, Darmstadt.

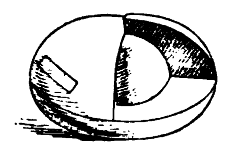
Specialkatalog 158—162 (pag. *13, 21* und *87*).

158. Wellenfläche für optisch einaxige Krystalle mit negativer Doppelbrechung. Das Axenverhältnis ist ungefähr das des Kalkspathes.

159. Dasselbe für optisch einaxige Krystalle mit positiver Doppelbrechung. Das Axenverhältnis entspricht ungefähr dem des Zinnobers.

160. Fresnel'sche Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle.
161. Ellipsoid hierzu.





162. Wellenfläche für optisch zweiaxige Krystalle in einzelnen Octanten. Dieses Modell und zugehörige Erläuterung von Rector *Böklen* in Reutlingen, die übrigen auf Veranlassung von Prof. *A. Brill* im math. Institut der techn. Hochschule München gefertigt.

282 **Modell der Wellengeschwindigkeitsfläche** von Rector **Böklen** in Reutlingen. **Math. Seminar der Univ. Tübingen.**

Bezeichnet man die 3 Hauptbrechungscoëfficienten eines zweiaxigen Krystalls mit $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, so ist

1) $$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

die Gleichung des Polarisations-Ellipsoids; errichtet man im Mittelpunkt eines Centralschnitts desselben ein Lot und trägt darauf 2 Strecken $ON = \rho$ und $On = \rho'$ ab gleich den reciproken Werten der Halbaxen des Centralschnitts, so liegen die Punkte N und n auf der Wellengeschwindigkeitsfläche (oder der Fusspunktfläche der Wellenfläche), deren Gleichung

2) $$\frac{x^2}{\rho^2-a^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z^2}{\rho^2-c^2} = 0 \qquad \left(\frac{1}{\rho^2} = x^2 + y^2 + z^2\right) \text{ ist.}$$

Betrachtet man in 2. ρ als constant, so stellt diese Gleichung ein System von confocalen Kegeln vor, deren Focallinien die wahren optischen Axen sind. Sie schneiden sich gegenseitig rechtwinklig; *zwei Paare derselben schneiden aus einem Mantel der Wellengeschwindigkeitsfläche ein Viereck aus, in welchem die Entfernungen von je 2 Gegenecken einander gleich sind.*

Mittelst dieses Satzes lässt sich, wenn das Modell der Fläche durch Schablonen hergestellt ist, jeder Punkt einer solchen Durchschnittscurve als Durchschnitt von zwei, auf dem Modell selbst gezeichneten Kreisbögen angeben, indem man von dem speciellen Viereck ausgeht, welches in den drei Hauptebenen enthalten ist.

Da die Wellengeschwindigkeitsfläche zugleich die *inverse* Fläche einer zweiten Wellenfläche ist, welche von dem *Polarisationsellipsoid* abgeleitet ist, so entsprechen den 4 Kreisen auf dem äusseren Mantel der letzteren 4 Kreise auf dem inneren Mantel der ersten, und den von Mannheim

angegebenen 8 Kreis- (Nabel-) Punkten der letzteren ebenso viele der ersten. (Schlömilch 1879 u. s. f.)

Die Wellengeschwindigkeitsfläche hat auch in der Mechanik eine Bedeutung nach dem von mir (Crelle Bd. 93 und Schlömilch 1883) veröffentlichten Satz: „Alle äusseren Aufhängpunkte für *isochrone* Schwingungen eines Körpers liegen auf oder zwischen den beiden Mänteln einer Fläche J, welche von einer Wellengeschwindigkeitsfläche durch Verlängerung ihrer Radien um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet ist. Alle Axen für isochrone Schwingungen gehen zwischen den beiden Mänteln der Grenzfläche J hindurch.

(O. Böklen.)

283 Krystallographische Axen-Modelle. Nach Angabe von Prof. **P. Groth**, Univ. München, verfertigt und ausgestellt von **Böhm & Wiedemann**, München.

Die Krystallflächen werden bestimmt durch ihre Parameter auf drei Axen, welche in den verschiedenen Krystallsystemen verschiedene Richtung und Bedeutung haben. Ist eine Axe zugleich Symmetrieaxe, so wird sie durch einen Messingstab dargestellt, — ist sie nur eine beliebige Kante des Krystalls, so wird sie durch einen schwarzen Metallstab repräsentirt. Diese Stäbe sind in Punkten, welche um rationale Teile der ganzen Länge ($^1/_4$, $^1/_3$, $^1/_2$ u. s. f.) von ihrer Mitte abstehen, durchbohrt, und durch diese Bohrungen farbige Fäden gezogen, so dass jede Krystallfläche durch ihre drei Tracen auf den Axenebenen zur Darstellung gebracht werden kann. Die Flächen der Grundform sind durch weisse Fäden bezeichnet, diejenigen der abgeleiteten Formen durch rote, grüne und gelbe.

1. *Triklines Krystallsystem:* drei zu einander schiefwinkelige Axen (beliebige Krystallkanten).

a) Hemiedrisch-triklin (weinsaures Strontium): nur einzelne Flächen mit rationalen Indices.

b) Holoedrisch (Axinit): zu jeder Fläche ist auch die parallele Gegenfläche vorhanden.

2. *Monoklines Krystallsystem* (Feldspath): zwei zu einander schiefwinkelige Axen (beliebige Krystallkanten in der Symmetrieebene), zu beiden senkrecht eine Symmetrieaxe.

3. *Rhombisches Krystallsystem* (Thenardit): drei zu einander rechtwinkelige, ungleichwertige Symmetrieaxen.

4. *Tetragonales Krystallsystem* (Anatas): eine vierzählige Symmetrieaxe (Hauptaxe), zwei zu einander und zu jener senkrechte, gleichwertige, zweizählige Symmetrieaxen (Nebenaxen).

5. *Hexagonales Krystallsystem.*

a) Rhomboedrische Abteilung (Kalkspath): drei zu einander gleich geneigte, gleichwertige Axen (Kanten des Grundrhomboeders); ausserdem ist die dreizählige Symmetrieaxe (Hauptaxe) dargestellt.

b) Hexagonale Abteilung (Beryll): eine sechszählige Symmetrieaxe (Hauptaxe), drei dazu senkrechte, gleichwertige, einander unter 60° schneidende, zweizählige Symmetrieaxen.

6. *Reguläres Krystallsystem*: drei auf einander senkrechte, gleichwertige Axen. Da hier die Zahl der Flächen einer vollständigen Form ihr Maximum erreicht, nämlich 48, so ist von einer solchen, dem Hexakisoktaeder (321) mit den Parametern $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, nur die in einem Octanten liegende Gruppe von 6 Flächen dargestellt (mit gelben Fäden), während in anderen Octanten die 24-Flächner mit roten resp. grünen Fäden bezeichnet sind.

(P. Groth.)

284 **Modell zur Erläuterung der sphärischen Projection eines Krystalls.** Nach Angabe von Prof. **P. Groth**, Univ. München, verfertigt und ausgestellt von **Böhm & Wiedemann**, München.

Die Mitte nimmt das Holzmodell eines triklin-hemiedrischen Krystalls (allgemeinster Fall) von rechtsweinsaurem Strontium (s. Axenmodell 1a) ein; durch dessen Centrum gehen Messingstäbe, welche die Normalen zu allen Flächen darstellen, bis an die Oberfläche einer Kugel und bestimmen dort die durch schwarze Scheiben bezeichneten „Pole" der Krystallflächen. Die Pole aller Flächen, welche am Krystall einander in parallelen Kanten schneiden (eine sogenannte „Zone" bilden), liegen auf einem grössten Kreise der Kugel. Diese grössten Kreise sind für alle wichtigen Zonen in Messing dargestellt. Dieselben schneiden einander in den Polen derjenigen Flächen, welche mehreren Zonen zugleich angehören und durch zwei derselben bestimmt sind. Der zwischen zwei Polen befindliche Bogen des betreffenden grössten Kreises ist gleich dem Winkel der beiden zugehörigen Krystallflächen. Die drei zwischen den Polen dreier, nicht einer Zone angehöriger, Flächen liegenden Bögen sind die Seiten des bei der Berechnung der Flächen dienenden sphärischen Dreiecks.

Das Modell lässt also alle bei der Berechnung eines Krystalls zu berücksichtigenden Zonenverhältnisse und sphärischen Dreiecke mit einem Blicke übersehen.

(P. Groth.)

285 **Modelle zur Krystalloptik.** Nach Angabe von Prof. **P. Groth**, Univ. München, verfertigt und ausgestellt von **Böhm & Wiedemann**, München.

1. *Wellenfläche eines positiven einaxigen Krystalls*, dargestellt durch Meridiancurven in Messing.

2. *Wellenfläche eines negativen einaxigen Krystalls* in gleicher Darstellung.

3. *Wellenfläche* (Strahlenfläche) *eines zweiaxigen Krystalls*, dargestellt durch Curven in Messing, welche zu den drei Hauptschnitten symmetrisch und so angeordnet sind, dass sie die Durchdringung der beiden Schalen der Fläche an den Nabelpunkten zeigen.

Die Modelle 4, 5 und 6 sollen die Dispersion der optischen Mittellinien und Axen für verschiedene Farben im triklinen und monoklinen Krystallsystem illustriren. Für drei Farben sind, entsprechend colorirt, die drei Hauptschwingungsrichtungen, die Durchschnittscurven der Wellenfläche mit den drei Hauptschnitten und die beiden (secundären) optischen Axen und zwar so dargestellt, dass die Radien der Wellenflächen der verschiedenen Farben sich verhalten, wie die Wellenlängen. Es würde daher die Ausbreitung weissen Lichtes vom Mittelpunkte des Modells aus so stattfinden, dass die Strahlen einer jeden Farbe nach Ablauf einer Schwingungsdauer je auf den entsprechend colorirten Curven in den Hauptschnitten angelangt wären.

4. *Dispersion des triklinen Krystallsystems.* Alle drei Hauptschwingungsrichtungen der verschiedenen Farben sind gegeneinander geneigt und die Grösse wie die Richtung dieser Dispersion ist an denselben eine ungleiche. Dem entsprechend liegen die optischen Axen für verschiedene Farben in verschiedenen Ebenen und gegen einander völlig unsymmetrisch orientirt.

5. *Geneigte Dispersion des monoklinen Krystallsystems.* Die Axe der mittleren optischen Elasticität fällt für alle Farben mit der Symmetrieaxe zusammen und ist daher weiss bezeichnet. Die optischen Axen liegen für sämtliche Farben in der dazu senkrechten Symmetrieebene, sind aber hier entgegengesetzt dispergirt, wegen der ungleichen Neigung der Mittellinien zu den Krystallaxen.

6. *Horizontale und gekreuzte Dispersion des monoklinen Krystallsystems.* Es fällt nur die eine der beiden Mittellinien der optischen Axen in die Symmetrieebene, die andere in die Symmetrieaxe (wie bei 5 weiss bezeichnet). Wegen der Dispersion der ersteren sind die Ebenen der optischen Axen für verschiedene Farben zwar sämtlich rechtwinkelig zur Symmetrieebene, aber ungleich gegen die Krystallaxen geneigt; in Folge dessen zeigen die Krystalle horizontale Dispersion der optischen Axen um die in der Symmetrieebene liegenden Mittellinien, gekreuzte Dispersion um die Symmetrieaxe.

(P. Groth.)

Preise der *acht krystallographischen Axenmodelle* (kleines Format auf Holzstativen) zusammen *M.* 95, einzeln je *M.* 12; grosses Format, auf eisernen Stativen *M.* 130, einzeln je *M.* 17.

Modell zur Erläuterung der sphärischen Projection eines Krystalls in kleinem Format *M.* 60, in grossem Format *M.* 80.

Modell der Wellenfläche eines positiven bezw. eines negativen einaxigen Krystalls, kleines Format je *M.* 12.50, grosses Format je *M.* 25.

Wellenfläche eines zweiaxigen Krystalls, kleines Format *M.* 48, grosses Format *M.* 70.

Drei Modelle zur Dispersion, kleines Format je *M.* 45, grosses Format je *M.* 60.

286 **Modelle optischer Elasticitätsflächen, entsprechend den 8 Modellen der Wellenflächen** (s. o.), in hartem Holze, polirt, zum Auseinandernehmen. Nach Angabe von Prof. **P. Groth**, Univ. München, verfertigt und ausgestellt von Drechslermeister **Jos. Endres**, München, Fürstenstr. 23.

1. *Elasticitätsfläche eines positiven einaxigen Krystalls*: Rotationsellipsoid mit schiefem Schnitt.

2. *Die eines negativen Krystalls:* ebenso.

3. *Die eines zweiaxigen Krystalls:* dreiaxiges Ellipsoid zum Auseinandernehmen a) nach einem Kreisschnitte, b) nach einem schiefen Schnitte, mit Angabe der grossen und kleinen Axe der Schnittellipse.

Preis (inclus. 3 gedrehten Stativen) *M.* 80.

287 **Vier Flächenmodelle zur Darstellung der elastischen Dehnungscoëfficienten** nach Prof. **Voigt**, Director des **mathematisch-physikalischen Instituts der Univ. Göttingen.**

Bezeichnen X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y die in einem elastischen Körper wirkenden Druckcomponenten, x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y die sie begleitenden Deformationsgrössen, so ist das elastische Potential der Volumeneinheit F gegeben durch

$$(1)\quad \begin{aligned} 2\,F = c_{11}\,x_x^2 + 2c_{12}\,x_x\,y_y + 2c_{13}\,x_x\,z_z + 2c_{14}\,x_x\,y_z + \ldots \\ + c_{22}\,y_y^2 + 2c_{23}\,y_y\,z_z \\ + \ldots, \end{aligned}$$

oder

$$(2)\quad \begin{aligned} +2\,F' = s_{11}\,X_x^2 + 2s_{12}\,X_x\,Y_y + 2s_{13}\,X_x\,Z_z + 2s_{14}\,X_x\,Y_z + \ldots \\ + s_{22}\,Y_y^2 + 2s_{23}\,Y_y\,Z_z + \ldots \\ + \ldots. \end{aligned}$$

Die Grössen c_{hk} heissen die *Elasticitätsconstanten*, die s_{hk} die *Elasticitätsmoduln* der Substanz; ihre Anzahl ist im allgemeinen Falle eines triklinen Krystalles 21 und specialisirt sich für diejenigen Krystallgruppen, welche Symmetrieelemente besitzen. Zwischen den Druckkräften und Deformationsgrössen bestehen die Beziehungen

$$(3)\quad \begin{aligned} -X_x = \frac{dF}{dx_x},\ -Y_y = \frac{dF}{dy_y},\ \ldots \\ -x_x = \frac{dF'}{dX_x},\ -y_y = \frac{dF'}{dY_y},\ \ldots. \end{aligned}$$

Befindet sich ein Stück eines Krystalles nur unter der Wirkung äusserer Druckkräfte, deren Componenten, auf die Flächeneinheit bezogen, X, Y, Z sein mögen, so ist zum Gleichgewicht erforderlich, dass

$$(4)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz}, \\ 0 &= \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz}, \\ 0 &= \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz}, \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} 0 &= \overline{X} + \overline{X}_x \cos(n, x) + \overline{X}_y \cos(n, y) + \overline{X}_z \cos(n, z), \\ 0 &= \overline{Y} + \overline{Y}_x \cos(n, x) + \overline{Y}_y \cos(n, y) + \overline{Y}_z \cos(n, z), \\ 0 &= \overline{Z} + \overline{Z}_x \cos(n, x) + \overline{Z}_y \cos(n, y) + \overline{Z}_z \cos(n, z), \end{aligned}$$

worin n die äussere Normale auf dem Oberflächenelement bezeichnet.

Im Falle, dass das krystallinische Stück ein Cylinder von beliebigem Querschnitt ist, dessen Axe durch die Richtungscosinus α, β, γ gegen die Coordinatenaxen bestimmt werden mag, genügt man bei alleiniger Einwirkung einer constanten Druckkraft p gegen die Einheit der Grundflächen diesen Bedingungen, indem man setzt:

$$(6)\qquad X_x = p\alpha^2,\ Y_y = p\beta^2,\ Z_z = p\gamma^2,\ Y_z = p\beta\gamma,\ Z_x = p\gamma\alpha,\ X_y = p\alpha\beta.$$

Hieraus folgt dann das System der Deformationsgrössen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} -x_x &= p\,(s_{11}\alpha^2 + s_{12}\beta^2 + s_{13}\gamma^2 + s_{14}\beta\gamma + s_{15}\gamma\alpha + s_{16}\alpha\beta), \\ -y_y &= p\,(s_{21}\alpha^2 + s_{22}\beta^2 + s_{23}\gamma^2 + s_{24}\beta\gamma + s_{25}\gamma\alpha + s_{26}\alpha\beta), \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die lineare Dilatation λ in einer beliebigen, durch α', β', γ' gegebenen Richtung ist allgemein bestimmt durch

$$\lambda = x_x\alpha'^2 + y_y\beta'^2 + z_z\gamma'^2 + 2y_z\beta'\gamma' + 2z_x\gamma'\alpha' + 2x_y\alpha'\beta'$$

und ihre Grösse längs der Cylinderaxe ist im vorliegenden Falle

$$(8)\qquad \begin{aligned} \lambda = -p\,(s_{11}\alpha^4 &+ 2s_{12}\alpha^2\beta^2 + 2s_{13}\alpha^2\gamma^2 + 2s_{14}\alpha^2\beta\gamma + 2s_{15}\alpha^2\gamma\alpha + 2s_{16}\alpha^2\alpha\beta \\ &+ s_{22}\beta^4 + 2s_{23}\beta^2\gamma^2 + \ldots \\ &+ s_{33}\gamma^4 + \ldots \\ &\ldots\ldots). \end{aligned}$$

Der Coëfficient von $-p$ heisst der *elastische Dehnungscoëfficient* (E) des betrachteten Krystalles in der Richtung der Cylinderaxe α, β, γ und kann wegen des nahen Zusammenhanges mit dem Werte (2) des elastischen Potentiales als besonders geeignet gelten, das elastische Verhalten eines Krystalles zu charakterisiren. Allerdings leistet er dies nicht vollständig, da er die im Allgemeinen 21 Elasticitätsmoduln nur in 15 unabhängigen Combinationen enthält. Das Gesetz des Dehnungscoëfficienten wird veranschaulicht, indem man seine Grösse als Länge auf der Richtung aufträgt, auf welche er sich bezieht; die so erhaltenen Flächen sind durch die Modelle für vier besonders interessante Fälle wiedergegeben.

Für die Krystalle des ***regulären Systemes*** sind, falls man die Coordinatenaxen in die Axen der Krystallformen legt, alle Moduln gleich Null, bis auf

$$s_{11} = s_{22} = s_{33}, \quad s_{23} = s_{31} = s_{12},$$
$$s_{44} = s_{55} = s_{66}.$$

Hiernach wird hier

$$(9)\quad \begin{aligned} E &= s_{11}(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) + (s_{44} + 2s_{12})(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2) \\ &= s_{12} + \tfrac{1}{2}s_{44} + (s_{11} - s_{12} - \tfrac{1}{2}s_{44})(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4). \end{aligned}$$

Der Verlauf dieser Function bei ***Flusspath*** ist durch das ***erste*** Modell wiedergegeben.

Für die Krystalle der ***holoedrischen Gruppe des hexagonalen Systems*** und die ihnen elastisch gleichwertigen bleiben, falls die Z-Axe zur Hauptaxe gewählt wird, von allen Moduln s_{hk} nur die folgenden:

$$s_{11} = s_{22},\ s_{33},\ s_{23} = s_{31},\ s_{12},\ s_{44} = s_{55},\ s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}).$$

In Folge dessen gilt hier

$$(10)\quad E = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2).$$

Den Verlauf dieser Function bei ***Beryll*** stellt das ***zweite*** Modell dar.

Für die ***rhomboedrisch-hemiedrische Gruppe*** und die ihr elastisch gleichwertigen kommen, falls die X-Axe als zweizählige Symmetrieaxe gewählt wird, zu den vorigen Moduln noch hinzu:

$$s_{14} = -s_{24} = \tfrac{1}{2}s_{56};$$

in Folge hiervon gilt jetzt

$$(11)\quad E = s_{11}(1-\gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1-\gamma^2) + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2).$$

Das ***dritte*** Modell gibt den Verlauf dieser Function für den trapezoedrisch-tetartoedrischen ***Bergkrystall.***

Bei allen ***rhombischen Krystallen*** sind, falls die Coordinatenaxen mit Krystallaxen zusammenfallen, $s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{44}, s_{55}, s_{66}, s_{23}, s_{31}, s_{12}$ von Null und von einander verschieden; es wird demgemäss

$$(12)\quad \begin{aligned} E = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2 \\ + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2. \end{aligned}$$

Für ***Baryt*** stellt das ***vierte*** Modell den Verlauf dieser Grösse dar*).

(Voigt.)

288 Fünf Modelle piëzoelektrischer Flächen, nach Proff. **Riecke** und **Voigt,** Directoren des **physikalischen Instituts der Univ. Göttingen.**

Elastische oder thermische Deformationen haben erfahrungsgemäss in isolirenden Krystallen von denjenigen Gruppen, welche kein Symmetriecentrum besitzen, ***dielektrische Polarisationen*** zur Folge, und man erhält

---

*) Das erste, dritte und vierte Modell ist nach den Beobachtungsresultaten von *W. Voigt* von Prof. *Finsterwalder* in München angefertigt.

eine mit der Beobachtung vollkommen übereinstimmende Darstellung der bezüglichen Erscheinungen, wenn man die dielektrischen Momente der Volumeneinheit a, b, c linearen Functionen der Deformationsgrössen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y gleich setzt.

In dem Ansatz

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
a &= \varepsilon_{11} x_x + \varepsilon_{12} y_y + \varepsilon_{13} z_z + \varepsilon_{14} y_z + \varepsilon_{15} z_x + \varepsilon_{16} x_y,\\
b &= \varepsilon_{21} x_x + \varepsilon_{22} y_y + \varepsilon_{23} z_z + \varepsilon_{24} y_z + \varepsilon_{25} z_x + \varepsilon_{26} x_y,\\
c &= \varepsilon_{31} x_x + \varepsilon_{32} y_y + \varepsilon_{33} z_z + \varepsilon_{34} y_z + \varepsilon_{35} z_x + \varepsilon_{36} x_y
\end{aligned}
$$

heissen die Coëfficienten ε_{hk} die *piëzoelektrischen Constanten der Substanz.*

Benutzt man die in (3) enthaltenen Beziehungen zwischen Deformationen und Drucken, so kann man hierfür auch schreiben

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
-a &= \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \delta_{13} Z_z + \delta_{14} Y_z + \delta_{15} Z_x + \delta_{16} X_y,\\
-b &= \delta_{21} X_x + \delta_{22} Y_y + \delta_{23} Z_z + \delta_{24} Y_z + \delta_{25} Z_x + \delta_{26} X_y,\\
-c &= \delta_{31} X_x + \delta_{32} Y_y + \delta_{33} Z_z + \delta_{34} Y_z + \delta_{35} Z_x + \delta_{36} X_y;
\end{aligned}
$$

die Coëfficienten δ_{hk}, welche sich leicht durch die piëzoelektrischen Constanten ε_{hk} und die Elasticitätsmoduln s_{hk} ausdrücken, heissen die *piëzoelektrischen Moduln* der Substanz.

Aus a, b, c bestimmt sich das dielektrische Moment m nach einer beliebigen Richtung α', β', γ'

$$
(15)\qquad m = a\alpha' + b\beta' + c\gamma';
$$

ist a, b, c im Innern des Krystalls constant und sind α', β', γ' die Richtungscosinus der äusseren Normalen auf einem Oberflächenelement, so hat $m = n$ zugleich die Bedeutung der elektrischen Oberflächendichte, welche mit der wirklichen Verteilung äquivalent ist. Diese Dichte ist einer der Gegenstände der Beobachtung, und ihre Messung für die Flächenpaare eines einseitig comprimirten Parallelepipedons von beliebiger Orientirung gegen die Krystallaxen gestattet die Bestimmung von a, b, c und damit die Prüfung der Theorie.

Eingehender studirt sind die piëzoelektrischen Erscheinungen bisher nur an drei, resp. vier Krystallgruppen.

Für die *tetraedrisch-hemiedrische und die tetartoedrische Gruppe des regulären Systems* reduciren sich die Formeln (14) auf

$$
(16)\qquad -a = \delta_{14} Y_z,\quad -b = \delta_{14} Z_x,\quad -c = \delta_{14} X_y.
$$

Die Anwendung der Formeln (6), die sich auf die Compression eines Cylinders parallel seiner Axe beziehen, ergibt hier

$$
(17)\qquad -a = p\delta_{14}\beta\gamma,\quad -b = p\delta_{14}\gamma\alpha,\quad -c = p\delta_{14}\alpha\beta.
$$

Das Moment nach der Cylinderaxe l folgt hieraus

$$
(18)\qquad l = -3p\delta_{14}\alpha\beta\gamma.
$$

Sein Verlauf ist durch das *erste* Modell veranschaulicht.

Das resultirende Gesammtmoment m bestimmt sich, da

$$\frac{bc}{a} = -p\delta_{14}\alpha^2, \frac{ca}{b} = -p\delta_{14}\beta^2, \frac{ab}{c} = -p\delta_{14}\gamma^2,$$

durch die Formeln:

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

(19)
$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} = -p\delta_{14},$$

$$a : b : c = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}.$$

Die zweite Gleichung (19) zeigt, dass, wenn man m auf der Richtung der elektrischen Axe als Strecke aufträgt, eine Oberfläche resultirt, die mit der *Steiner*'schen Fläche identisch ist. Das *zweite* Modell stellt sie dar; die Doppelgeraden fallen in die Krystallaxen.

Die letzte Formel (19) bestimmt den Zusammenhang zwischen der Richtung des Druckes und der elektrischen Axe. Sie sagt aus, dass, wenn man durch die Richtung des Druckes einerseits, durch die elektrische Axe andererseits die drei Ebenen legt, welche die Coordinatenaxen enthalten, deren Winkel mit derselben Coordinatenebene sich jederzeit zu $\frac{\pi}{2}$ ergänzen.

Fällt die Druckrichtung in eine Coordinatenebene, so liegt die Axe des erregten Momentes in der dazu normalen Axe.

Für die *trapezoedrisch-tetartoedrische Gruppe*, der u. a. der Quarz angehört, reduciren sich die Formeln (14), falls man die X-Axe in eine zweizählige, die Z-Axe in die dreizählige Symmetrieaxe legt, auf

(20)
$$-a = \delta_{11}(X_x - Y_y) + \delta_{14} Y_z,$$
$$+b = \delta_{14} Z_x + 2\delta_{11} X_y, \quad c = 0.$$

Die elektrische Axe liegt also stets in der XY-Ebene. Hiernach ist die Erregung durch axiale Compression eines Cylinders gegeben durch

(21)
$$-a = p(\delta_{11}(\alpha^2 - \beta^2) + \delta_{14}\beta\gamma),$$
$$+b = p(\delta_{14}\gamma + 2\delta_{11}\beta)\alpha, \quad c = 0.$$

Das Moment parallel der Cylinderaxe ist hier

(22)
$$l = p\delta_{11}\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2);$$

sein Verlauf, der unabhängig von der Substanz des Krystalles ist, wird durch das *dritte* Modell dargestellt.

Das elektrische Gesamtmoment m ist gegeben durch

(23)
$$m^2 = p^2[\delta_{11}^2(1-\gamma^2)^2 + \delta_{14}^2\gamma^2(1-\gamma^2) + 2\delta_{11}\delta_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2)];$$

da die Richtung der elektrischen Axe immer in der XY-Ebene liegt, so lässt sich m hier ***nicht*** ebenso, wie im vorigen Falle durch eine Fläche veranschaulichen.

Für die ***zweite hemimorph-tetartoedrische Gruppe,*** zu welcher der Turmalin zählt, werden die Formeln (14), falls man die Z-Axe in die dreizählige Symmetrieaxe, die YZ-Ebene in eine der Symmetrieebenen legt,

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
-a &= \delta_{15} Z_x - 2\,\delta_{22} X_y,\\
-b &= -\,\delta_{22} (X_x - Y_y) + \delta_{15} Y_z,\\
-c &= \delta_{31} (X_x + Y_y) + \delta_{33} Z_z.
\end{aligned}
$$

Für die Erregung eines Cylinders durch axialen Druck gilt demgemäss:

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
-a &= p\,(\delta_{15}\gamma - 2\,\delta_{22}\beta)\,\alpha,\\
-b &= p\,(-\,\delta_{22}[\alpha^2 - \beta^2] + \delta_{15}\beta\gamma),\\
-c &= p\,(\delta_{31}[\alpha^2 + \beta^2] + \delta_{33}\gamma^2).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt das longitudinale Moment

$$
(26)\qquad l = -\,p\,[\delta_{22}\beta\,(\beta^2 - 3\,\alpha^2) + (\delta_{31} + \delta_{15})\,\gamma\,(1-\gamma^2) + \delta_{33}\gamma^3];
$$

die beiden letzten Glieder sind rings um die Z-Axe von gleichem Wert und enthalten wesentlich den Einfluss der polaren *Hauptaxe*, das erste gibt den Einfluss der drei elektrischen *Nebenaxen*, von denen die eine in die Y-Axe fällt.

Das *vierte* Modell stellt den Verlauf von l speciell für brasilianischen Turmalin dar; der tiefste Punkt desselben ist der Pol des Coordinatensystems. Man erkennt in der Äquatorialebene die Wirkung der elektrischen Nebenaxen auf l und sieht, dass das Maximum des longitudinalen Momentes l nicht parallel der Hauptaxe stattfindet.

Durch ein *fünftes* in Gips ausgeführtes Modell wird der Verlauf des elektrischen *Gesammtmomentes* bei der zweiten hemimorph-tetartoedrischen Gruppe des hexagonalen Systems dargestellt. Dabei entspricht das Verhältnis der Moduln δ_{33} und δ_{31} den Beobachtungen am Turmalin, dagegen sind die Werte von δ_{15} und δ_{22} beträchtlich vergrössert, da die Eigentümlichkeiten der Fläche sonst kaum deutlich geworden wären.

Die auf der Fläche gezogenen Systeme von Hypocykloiden und Ellipsen lassen zwei verschiedene Erzeugungsarten erkennen, über welche Folgendes zu bemerken ist. Wenn die Grösse des Druckes bei allen möglichen Änderungen seiner Richtung constant bleibt, so beschreibt der Endpunkt des entsprechenden Vectors eine Halbkugel; den nach ihrem Pol gerichteten Halbmesser legen wir parallel der Z-Axe, die Basis parallel der XY-Ebene. Ein beliebiger Druck p, α, β, γ ist dann nach Richtung und Grösse durch einen Punkt P der Halbkugel dargestellt. Die Componenten des durch ihn erzeugten elektrischen Momentes sind durch die Formeln (25) bestimmt; dieses wird repräsentirt durch einen zweiten vom Anfangspunkt des Coordinatensystems aus gezogenen Vector, dessen Endpunkt M die piëzoelektrische Fläche erzeugt. In dem Modelle ist die XY-Ebene in die obere Fläche der tragenden Platte, der Anfangspunkt in ihren Mittelpunkt gelegt. Θ sei die Poldistanz von P, Φ seine Länge

gerechnet von der Ebene ZX aus. Es gelten dann die folgenden Beziehungen:

1) Durchläuft P einen Parallelkreis, so beschreibt M eine Hypocykloide, deren Ebene gegen die Z-Axe senkrecht steht. Der Halbmesser des Bahnkreises ist $\frac{3}{2}\,\delta_{15}\sin\Theta\cos\Theta$, der Halbmesser des rollenden Kreises gleich dem dritten Teil hievon; der Abstand des erzeugenden Punktes von dem Mittelpunkt des Rollkreises $\delta_{22}\sin^2\Theta$, die Höhe der Cykloidenebene über der XY-Ebene $\delta_{31}\sin^2\Theta + \delta_{33}\cos^2\Theta$. Einem Druck in der Richtung der Z-Axe entspricht der Pol der piëzoelektrischen Fläche, im Abstand δ_{33} vom Anfangspunkt auf der Z-Axe gelegen. Dem Basalkreise der Halbkugel entspricht ein Kreis vom Halbmesser δ_{22} in der Höhe δ_{31} über der XY-Ebene: der Basalkreis der piëzoelektrischen Fläche. Für $\Theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\delta_{15}}{2\,\delta_{22}}\right)$ ergibt sich eine gewöhnliche Hypocykloide mit 3 Spitzen. Kleineren Werten von Θ entsprechen verkürzte, grösseren verlängerte Cykloiden. Für $\Theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\delta_{15}}{\delta_{22}}\right)$ erhält man die Form eines Kleeblattes mit einem dreifachen Punkt in der Z-Axe. Bei grösseren Werten tritt ein Überschlagen der Curvenbögen ein. An dem Modelle sind die Cykloiden, welche den Parallelkreisen $\Theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ entsprechen, besonders ausgezeichnet.

2) Bewegt sich P auf einem Meridian der Halbkugel, so beschreibt M eine Ellipse. Alle Ellipsen gehen durch den Pol der piëzoelektrischen Fläche, sie schneiden die Z-Axe senkrecht und haben im Pol dieselbe Richtung, wie die entsprechenden Meridianbögen. Alle Ellipsen schneiden den Basalkreis der piëzoelektrischen Fläche und berühren seine Ebene. Das Azimuth der Schnittpunkte gegen die ZX-Ebene ist $\frac{\pi}{2} - 2\,\Phi$. Liegt der von P durchlaufene Meridian in einer Symmetrieebene, so gilt gleiches von der durch M beschriebenen Ellipse. Bewegt sich P in einem Meridiane, dessen Ebene zu einer Symmetrieebene senkrecht steht, so liegt auch die Ebene der entsprechenden Ellipse zu ihr senkrecht und die Ellipse berührt den Basalkreis in der Symmetrieebene.

Die Fläche ist von der 4. Ordnung. Sie enthält in jeder Symmetrieebene eine gerade Linie, auf welcher die Doppelpunkte der Hypocykloiden liegen.

(Voigt und Riecke.)

289 Drei Modelle für die pyroelektrische Erregung von Krystallkugeln nach Prof. **Voigt,** Direktor des **mathematisch-physikalischen Institutes der Univ. Göttingen.**

Ausser der piëzoelektrischen Erregung eines Cylinders durch longitudinale Compression eignet sich besonders *die pyroelektrische Erregung einer Kugel durch oberflächliche Erwärmung oder Abkühlung* zur graphi-

schen Darstellung. Eine Erwärmung heisst oberflächlich, wenn sie eine so dünne Schicht betrifft, dass sie keine deformirende Wirkung auf die übrigen Teile ausüben kann. Ist die oberflächliche Erwärmung rings um die Kugel constant, aber eine beliebige Function der Tiefe, so lässt sich das Problem leicht behandeln, und wenn man noch von der Veränderlichkeit der Elasticität mit der Richtung absieht, was z. B. bei Turmalin nur unbedeutenden Einfluss auf das Resultat hat, in anderen Fällen aber wenigstens das Bild nicht wesentlich fälscht, so wird das Resultat sehr einfach.

Bezeichnet man die lineare Dilatation in der Richtung α, β, γ der Normalen auf dem Oberflächenelemente mit λ, dann ist die Dichte η der Oberflächenbelegung der Kugel für die oben behandelten drei Gruppen gegeben durch

$$\eta = \lambda\, \varepsilon_{14}\, 3\, \alpha\beta\gamma,$$
$$\eta = \lambda\, \varepsilon_{11}\, \alpha\, (\alpha^2 - 3\, \beta^2),$$
$$\eta = \lambda\, [-\varepsilon_{22}\, \beta\, (3\, \alpha^2 - \beta^2) + (2\, \varepsilon_{15} + \varepsilon_{31})\, \gamma\, (1 - \gamma^2) + \varepsilon_{33}\, \gamma^2].$$

Diese Werte sind mit den oben gegebenen für die longitudinale Erregung eines Cylinders nahe verwandt. Ihr Verlauf ist in den Modellen dadurch veranschaulicht, dass auf den Kugelflächen Curven η = const. aufgetragen sind.

Bei den ersten Gruppen, wo der Verlauf von den absoluten Werten der Constanten unabhängig ist, finden sich Maxima und Minima an den Enden der polaren Axen; beim Turmalin, der wiederum als Repräsentant für die letzte Gruppe gewählt ist, sind Maxima und Minima verschiedener Grösse zu unterscheiden, *grössere* an den Enden der polaren Hauptaxe, *kleinere*, durch die polaren Nebenaxen bewirkt, die aber nicht in der Äquatorebene liegen, sondern aus ihr abweichen.

(W. Voigt.)

290 **Dreizehn Modelle elektrischer Polsysteme zur Erklärung der piëzo- und pyroelektrischen Erscheinungen** nach Prof. **Riecke,** Director des **experimental-physikalischen Instituts der Univ. Göttingen.**

Die linearen Beziehungen zwischen den Componenten des elektrischen Momentes und den Deformationsgrössen, welche in den Formeln 13—24 ausgedrückt sind, können aus den folgenden Annahmen über die Constitution der Krystalle abgeleitet werden.

Die Mittelpunkte der Krystallmolekeln bilden regelmässige Punktsysteme, welche den allgemeinen Symmetriebedingungen des betreffenden Krystallsystemes genügen. Die Molekeln selbst denken wir uns in übereinstimmender Weise umgeben von elektrischen Polen, so dass positive und negative Pole in gleicher Anzahl und Stärke vorhanden sind. Diese Polsysteme erfüllen noch die Symmetriebedingungen der speciellen Gruppe, welcher der betrachtete Krystall angehört. Durch Druck oder Temperatur-

veränderung wird eine Verschiebung und Drehung der Molekeln erzeugt; es entstehen dadurch neue elektrische Kräfte, welche auf das Innere der Krystalle wirkend die piëzo- und pyroelektrischen Momente hervorrufen.

Sämmtliche zur Erklärung der Erscheinungen notwendige Polsysteme können durch Combination von 5 Grundformen erhalten werden. Diese sind:

1. *Das einaxige Polsystem;* ein positives und ein negatives elektrisches Teilchen in den Endpunkten einer durch den Mittelpunkt der Molekel gezogenen und durch diesen halbirten Linie.

2. *Das trigonale Polsystem.* Drei positive elektrische Pole befinden sich in den Ecken eines mit der Molekel concentrischen gleichseitigen Dreiecks, die zugehörigen negativen Pole in den Punkten, durch welche jenes Dreieck zum regulären Sechseck ergänzt wird.

Als erste Hauptlage (2 A) bezeichnen wir diejenige, bei welcher der nach dem ersten positiven Pol gezogene Radius Vector der X-Axe, als zweite (2 B) die, bei welcher er der Y-Axe parallel ist.

3. *Das dihexagonale Polsystem.* Die Pole bilden ein gerades mit der Molekel concentrisches Prisma, dessen Endflächen reguläre Zwölfecke sind. Bezeichnen wir die Ecken des oberen Zwölfecks der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, . . . 12, die des unteren mit 13, 14 . . . 24, so dass 13 unter 1, 14 unter 2 . . . zu liegen kommt, so sind oben die ungeraden, unten die geraden Pole positiv. Die Endflächen des Prismas liegen parallel zu der XY-Ebene. Die Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Molekel und die Kante (1, 13) hindurchgeht, schliesst mit der ZX-Ebene den Winkel $\frac{\pi}{12}$ ein.

4. *Das tetraedrische Polsystem.* Von den beiden Tetraedern, welche durch die abwechselnden Ecken eines Würfels gebildet werden, besetzen wir das erste in den Ecken mit positiven, das zweite mit negativen Polen.

Als erste Hauptlage (4 A) des Systems bezeichnen wir diejenige, bei welcher die Seiten des Würfels den Coordinatenebenen parallel sind; als zweite Hauptlage (4 B) die, bei welcher die Ebenen ZX und XY Diagonalebenen des Würfels sind.

5. *Das ditetragonale Polsystem.* Die Pole bilden ein zu der Molekel concentrisches Prisma mit regelmässig achteckigen Endflächen; werden die Ecken in derselben Weise numerirt wie bei dem 3. Systeme, so sind wieder oben die ungeraden, unten die geraden Pole positiv. Die Endflächen liegen parallel zu der XY-Ebene; die durch den Mittelpunkt und die Kante (1, 9) gehende Ebene schliesst mit der Ebene ZX den Winkel $\frac{\pi}{8}$ ein.

Die Modelle stellen die elektrischen Polsysteme für die folgenden Symmetriegruppen des hexagonalen und quadratischen Systemes dar:

Bezeichnung der Gruppe.	Zusammensetzung des Polsystems.
	Hexagonales System.
Hemimorph-hemiedrisch	1
Trapezoedrisch-hemiedrisch	3
Hemimorph-tetartoedrisch I.	1, 3
Sphenoidisch-hemiedrisch	2 A
Sphenoidisch-tetartoedrisch	2 A, 2 B
Hemimorph-tetartoedrisch II.	1, 2 B
Trapezoedrisch-tetartoedrisch	2 A, 3
Ogdoedrisch	1, 2 B, 2 B, 3.
	Quadratisches System.
Hemimorph-hemiedrisch	1
Trapezoedrisch-hemiedrisch	5
Hemimorph-tetartoedrisch	1, 5
Sphenoidisch-hemiedrisch	4 A
Sphenoidisch-tetartoedrisch	4 A, 4 B.

(Riecke).

W. Zeichnungen und Modelle zur Thermodynamik.

291 **Curven auf der thermodynamischen Fläche des Wassers,** nach **Gibbs** und **v. d. Waals** (4 Tabellen) von **D. A. Goldhammer**, Universität Kasan.

1. Die benannte Gleichung von *v. d. Waals* lautet

$$(1) \qquad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = (1 + a)(1 - b)\alpha T,$$

worin p den Druck in Atmosphären, v das Volumen, T die absolute Temperatur, a, b die specifischen Constanten des Körpers bedeuten und $\alpha =$ v . 0,003163 ist. Dabei ist v auf das specifische Dampfvolumen (σ) bei 0^0 C. und 1 Atm Druck bezogen.

Die Gleichung (1) wollen wir auf Wasser anwenden, um die Gleichung der thermodynamischen Fläche desselben in den *Gibbs*'schen Coordinaten: Energie (ε), Entropie (η) und Volumen (v) abzuleiten. Ist nun J das mechanische Wärmeäquivalent, zu 425 kgm angenommen, und c die specifische Wärme des Wassers bei constantem Volumen, so lauten die bekannten Gleichungen von *Clausius*

$$J\,d\eta = Jc\frac{dT}{T} + \frac{dp}{dT}dv$$

$$d\varepsilon = Jc\,dT + \left(T\frac{dp}{dT} - p\right)dv,$$

worin $\frac{dp}{dT}$ und $T\frac{dp}{dT}-p$ aus (1) sich berechnen lassen; es ist nämlich

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(1+a)(1-b)\alpha}{v-b}, \quad T\frac{dp}{dT}-p = \frac{a}{v^2}$$

Nun sind p und v in den Clausius'schen Gleichungen in kgm pro Quadratmeter resp. in cbm gemessen; da 1 Atm = 10334 kg. und Volumen in cbm = $\frac{v}{\sigma}$, so folgt

$$J\,d\eta = Jc\frac{dT}{T} + \frac{10334\,\sigma\alpha\,(1+a)\,(1-b)}{v-b}\,dv$$

$$d\varepsilon = Jc\,dT + \frac{a}{v^2}\,10334\,.\,\sigma\,dv,$$

oder nach Integration zwischen T, v, η und T_0, v_0, η_0, indem man $\frac{10334\,.\,\sigma\alpha\,(1+a)\,(1-b)}{J} = R$ setzt

$$(2) \qquad T = T_0 e^{\frac{\eta-\eta_0}{c}} \left(\frac{v-b}{v_0-b}\right)^{-\frac{R}{c}}$$

$$(3) \qquad \varepsilon-\varepsilon_0 = Jc\,(T-T_0) - a\,.\,10334\,.\,\sigma\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right).$$

Da ferner die Werte von η_0, v_0, T_0, ε_0 hier vollständig unbestimmt bleiben, so nehmen wir

$$\eta_0 = 0, \quad v_0 = 1+b, \quad JcT_0 = 10334\,.\,\sigma, \quad \varepsilon_0 = 10334\,.\,\sigma - \frac{a\,.\,10334\,.\,\sigma}{1+b}$$

dadurch gehen die Gleichungen (2) und (3) über in

$$(4) \qquad JcT = 10334\,.\,\sigma\, e^{\frac{\eta}{c}}\,(v-b)^{-\frac{R}{c}}$$

$$(5) \qquad \varepsilon = JcT - \frac{10334\,.\,a\,.\,\sigma}{v};$$

die Elimination von T aus diesen Gleichungen ergibt *die Gleichung der thermodynamischen Fläche*

$$(6) \qquad \frac{\varepsilon}{10334\,.\,\sigma} = e^{\frac{\eta}{c}}\,(v-b)^{-\frac{R}{c}} - \frac{a}{v}.$$

2. Nach *v. d. Waals* ist für Wasser

$$a = 0{,}00861, \quad b = 0{,}00105;$$

nach *Zeuner* ist weiter

$$c = 0{,}3469,$$

so dass

$$R = 0{,}11049.$$

Um nun σ zu berechnen, benutzt man den folgenden Satz von *v. d. Waals*: Sind u, u_1, u_2, ... die Differenzen zwischen den specifischen Volumina

des Dampfes und der Flüssigkeit (in cbm) bei den Drucken, die gleiche Teile der entsprechenden kritischen sind, so ist für alle Körper

$$(7)\qquad \frac{u}{b\sigma} = \frac{u_1}{b_1\sigma_1} = \frac{u_2}{b_2\sigma_2} = \ldots$$

Beziehen sich nun u, b, s auf Wasser, u_1 b_1 σ_1 auf CS_2 und a_2 b_2 c_2 auf Äther, so ist

$$b = 0{,}00105,\quad b_1 = 0{,}00334,\quad b_2 = 0{,}00575;$$

ferner lassen sich aus den Ergebnissen von *v. d. Waals* und *Zeuner* auch berechnen

$$\sigma_1 = 0{,}2816 \text{ und } \sigma_2 = 0{,}3094 \text{ cbm.}$$

Wählen wir 1·Atm, 2,5, 4, 8, 12, 13,5 als Drucke für Wasser, so berechnen wir die entsprechenden Drucke für Schwefelkohlenstoff und Äther nach den kritischen, wenn derselbe für Wasser 280 Atm angenommen wird. Sind die Drucke bestimmt, so haben wir nur die denselben entsprechenden u, u_1, u_2 aus den *Zeuner*'schen Tabellen zu entnehmen. In dieser Weise berechnen wir

$\frac{u}{u_1}$ = 1,43, 1,37, 1,40, 1,41, 1,39, 1,42 im Mittel 1,40

$\frac{u}{u_2}$ = 0,70, 0,71, 0,74, 0,72 „ „ 0,72

σ = 1,25398, 1,2199 „ „ 1,237 cbm.

Um nun die Fläche mit der Gleichung (6) graphisch darzustellen, ziehen wir die Axen v, η, ε in der gebräuchlichen Weise als Axen x (nach rechts), y (vorwärts), z (nach oben). Der Coordinatenursprung ist beliebig in der Ebene v = o. In den Tabellen ist dargestellt

die Grösse b durch 0,25 mm,
die Einheit der Entropie durch 50 mm, endlich
10334 . 1,237 kgm der Energie durch 10 mm.
(Vgl. Masstab auf der Tab. 4.)

3. *Diagramm* (η v); Tab. 1.

Fig. I stellt die sog. Isodynamen, d. h. Linien der gleichen Energie in der Ebene η v dar; die Gleichung dieser Curven bekommt man aus (6) direct, wenn man darin für ε verschiedene constante Werte nimmt. Diese Werte von ε sind bei jeder Curve angegeben.

Fig. II gibt die Isothermen und Linien des gleichen Druckes (die isopiestischen Linien, nach *Gibbs*); für diese zwei Curvenarten bekommen wir die entsprechenden Gleichungen, wenn wir ε aus (5) und (6) resp. T aus (1) und (4) eliminiren. Bei den Curven sind die Temperatur und der Druck angegeben; dabei entsprechen die Punkte a, a', a'', a''', ... dem trockenen gesättigten Wasserdampf bei 100° C. und 1 Atm., 177° C. und 9,252 Atm, 277° C. und 100 Atm u. s. w. Geometrischer Ort der Punkte a, a', ... ist eine mit . . . . . bezeichnete Curve, die man als die Dampflinie

bezeichnet. Durch a ist der Schnittpunkt der Isotherme von 0° C. mit der isopiestischen Linie von 1 Atm bezeichnet; derselbe stellt den Zustand des Wasserdampfes bei 0° C. und 1 Atm Druck dar. Man kann beweisen, dass dieser Zustand ein stabiler ist.

4. *Diagramm* (ε v); Tab. 2.

Fig. III stellt die Adiabaten in der Ebene (ε v) dar, deren Gleichung sich aus (6) bei constantem η ergibt.

Fig. IV gibt die Isothermen und Linien des gleichen Druckes; die Gleichung der ersteren Curven lässt sich aus (5) bei constantem T, diejenige der letzteren Curven durch die Elimination von T aus (1) und (5) ableiten.

5. *Diagramm* (η ε); Tab. 2, Fig. V und Tab. 3 und 4.

Fig. V. Linien gleichen Volumens; die Gleichung dieser Curven leitet man aus (6) ab, wenn man darin statt v die constanten Werte einsetzt, welche auf der Figur für jede Curve angegeben sind.

Fig. VI stellt die Isothermen und die isopiestischen Linien auf der Ebene η ε dar. Die Gleichungen dieser Curven braucht man nicht abzuleiten, da man für jedes T oder p die nötigen Werte von η und ε aus den früheren Figuren entnehmen kann.

a', a'', . . . haben dieselbe Bedeutung wie früher; b', b'', b''' bezeichnen Punkte, die flüssiges Wasser, ohne Dampf, als den Übergangszustand von dem flüssigen Zustande zu der ungleichförmigen Mischung Dampf — Wasser darstellen. In allen Zeichnungen sind durch e', e'', e''' resp. d', d'', d''' Punkte bezeichnet, welche den letzten ***stabilen*** flüssigen resp. Dampf-Zustand vor den labilen Zuständen einer gleichförmigen Dampfwassermischung darstellen.

c', c'', c''' sind labile gleichförmige Mischungen von Wasser und Dampf. Jede der Isothermen wird durch die „entsprechende“ isopiestische Linie in drei Punkten, a, b, c, durchschnitten, welche für die kritischen Werte von Druck und Temperatur zusammenfallen.

Fig. VII. Bei $t = 0{,}0078^0$ C. und $p = 4{,}6021$ mm Hg kann Wasser bekanntlich in drei stabilen Zuständen existiren; dieselben sind auf der thermodynamischen Fläche durch drei Punkte dargestellt, in welchen sich die entsprechende Isotherme und isopiestische Linie durchschneiden. Diese Schnittpunkte bilden das sog. Fundamentaldreieck VLS auf dem Diagramm η ε. Die Curven (1), (3) bezw. (4) (6), bezw. (7), (9) stellen die sog. Linien der Flüssigkeit und des Dampfes, der Flüssigkeit und des Eises, resp. des Eises und seines gesättigten Dampfes dar; durch α, β sind die beiden kritischen Zustände des Wassers bezeichnet.

Wegen anderer Details müssen wir auf das russische Original oder auf die „Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie 1885“ verweisen.

(Goldhammer).

292 Serie von Isothermenflächen für die Gemenge zweier und dreier mischbarer Stoffe, von Gymnasiallehrer **A. Blümcke** in Nürnberg.

1. Isothermenfläche für zwei beliebig mischbare Stoffe für Temperaturen zwischen der Schmelztemperatur und der kritischen Temperatur beider.

Lassen sich zwei gasförmige Stoffe bei einer bestimmten Temperatur beide verflüssigen und in allen Verhältnissen beliebig mischen, so kann man für irgend ein Gemenge der „theoretischen" Isotherme eine ähnliche Form geben wie derjenigen eines einfachen Gases; in nebenstehender Figur sind die Drucke die Ordinaten, die Volumen die Abscissen (Figur 1).

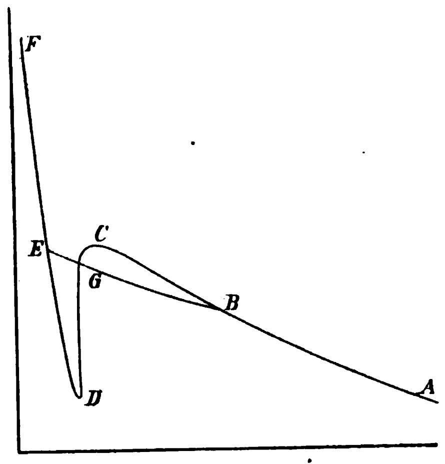


Fig. 1.

Nimmt man an, dass die Gleichung dieser Curve von der von *Natanson* gegebenen Form sei, so nähert sich die Curve den beiden Coordinaten-Axen asymptotisch. Selbstverständlich ist dieselbe nur für positive Drucke und positive Volumen von physikalischem Interesse. Die „theoretische" Isotherme entspricht den Zuständen des Gemenges bekanntlich nur so lange, als sie homogen sind, und zwar der in der Figur rechts gelegene Teil CBA den gasförmigen, der links gelegene Teil FED den flüssigen. Der Punkt B des rechts gelegenen Teils sei der Punkt der beginnenden Verflüssigung der „empirischen" Isotherme BE, so dass das Stück CB den labilen, das Stück BA den stabilen gasförmigen Zuständen entspricht. Der Punkt E des links gelegenen Teils sei der Punkt der vollständigen Verflüssigung der „empirischen" Isotherme BE, die im vorliegenden Fall eine Curve, und nicht wie bei den einfachen Gasen eine zur Volumen-Axe parallele Gerade ist. Das Stück EF der „theoretischen" Isotherme entspricht dann den stabilen, das Stück ED den labilen flüssigen Zuständen. Die „empirische" Isotherme schneidet die „theoretische" so, dass die Fläche DEG

gleich der Fläche BCG ist. Betrachtet man nun alle möglichen Gemenge der beiden Stoffe, von denen man aber jedesmal soviel zu nehmen hat, dass ihr Gesamtgewicht gleich Eins ist, und nimmt man den Anteil des ersten Stoffs als neue Variable X an, wobei die dritte Axe des Coordinatensystems rechtwinklig zu den beiden vorigen steht, so bilden sowohl alle „theoretischen" als auch alle „empirischen" Isothermen je eine Fläche, und zwar hat die Fläche der „theoretischen" Isothermen das Aussehen einer von rechts her aus dem Unendlichen kommenden Welle, welche senkrecht nach oben steigt. Von physikalischer Bedeutung ist selbstverständlich nur der zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = 1$ gelegene Teil für positive Drucke und Volumina. Die „empirische" Fläche ist, wie sich zeigen lässt (siehe Figur 2) ein Conoid, dessen Erzeugende

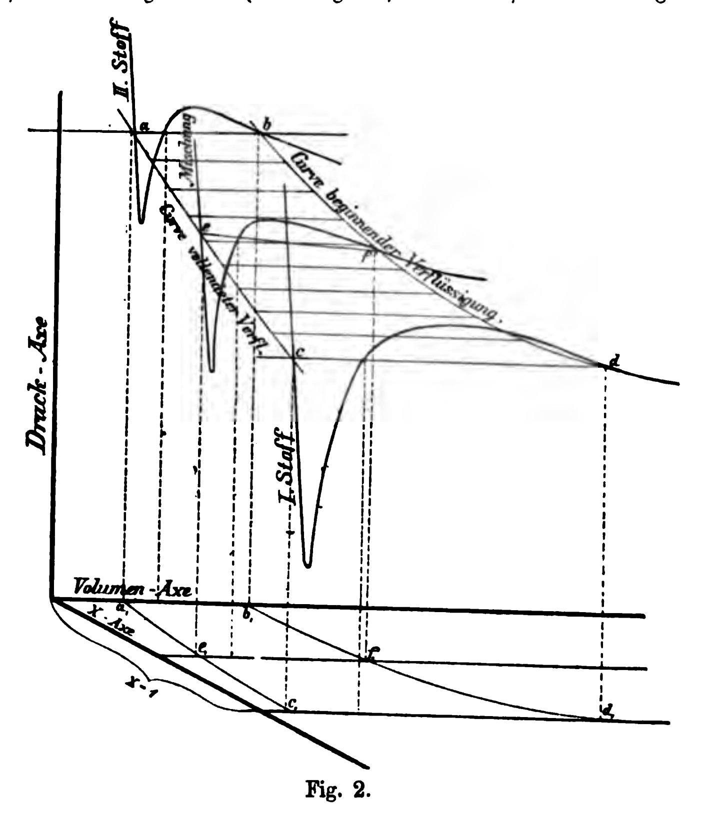


Fig. 2.

alle parallel zur XV-Ebene verlaufen; es schneidet die „theoretische" Fläche nach zwei Curven bd und ac, deren erste die Punkte beginnender, deren zweite die Punkte vollendeter Verflüssigung enthält. Im Modell ist die „theoretische" Fläche durch drei Isothermen angedeutet: durch

die des ersten Stoffs, die des zweiten Stoffs und die einer Mischung von 50% ca.

2. Isothermenfläche für zwei nicht beliebig mischbare Stoffe für Temperaturen zwischen der Schmelztemperatur und der kritischen Temperatur beider.

Sind zwei gasförmige Stoffe bei einer bestimmten Temperatur beide zu verflüssigen, lassen sie sich aber bei dem Verflüssigungsdruck des am schwersten zu verflüssigenden nicht mehr beliebig homogen mischen, so hat nur ein Teil der „theoretischen" Isothermen die in Fig. 1 abgebildete Form; sobald eine homogene Mischung nur unter stärkerem Druck, als dem Verflüssigungsdruck des am schwersten zu verflüssigenden erreicht werden kann, ist die Gestalt beiläufig die nachstehende, Fig. 3:

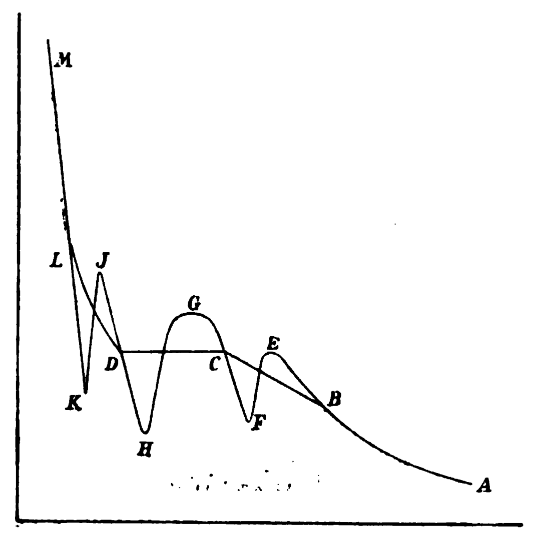


Fig. 3.

die theoretische Isotherme ist ABEFCGHDJKLM; das Stück BA entspricht stabilen gasförmigen, das Stück LM stabilen homogenen flüssigen Zuständen; die Stücke BE, CF, CG, DH, DJ, LK entsprechen verschiedenen labilen Zuständen. Die „empirische" Isotherme besteht aus den Stücken BC, CD, DL und zwar entspricht das Stück BC einem gasförmigen und einem flüssigen Zustand, das zur Volumenaxe in einem dem Verflüssigungsdruck des am schwersten zu verflüssigenden Stoffes entsprechenden Abstand parallel verlaufende Stück CD entspricht zwei flüssigen und einem gasförmigen Zustand (es wird nur der am schwersten zu verflüssigende Stoff verflüssigt, ohne dass der andere noch Teile von ihm aufnimmt.) Das Stück DL entspricht zwei flüssigen Zuständen,

einem homogenen Gemisch beider und dem noch nicht absorbirten zweiten Stoff. Entsprechend dieser Form der „theoretischen" Isothermen hat die Fläche der „theoretischen" Isothermen drei Erhebungen und Senkungen resp. drei Wellen. Die „empirische" Fläche besteht demgemäss aus drei Conoiden. Das erste schneidet die „theoretische" Fläche nach der Curve der beginnenden Verflüssigung und derjenigen der vollendeten homogenen Verflüssigung bis zu demjenigen Punkte, dessen Druckordinate gleich dem Druck des am schwersten zu verflüssigenden Stoffs ist; das zweite Conoid ist zu einer Ebene ausgeartet, welche sich an das erste anschliesst und parallel ist zur XV-Ebene, sie ist von dieser Ebene entfernt um den Betrag des Verflüssigungsdrucks des am schwersten zu verflüssigenden Stoffs; das dritte Conoid schliesst sich an diese Ebene an und hat als Leitcurven den aufsteigenden und den absteigenden Zweig der Curve der vollendeten homogenen Verflüssigung, welche sich anfangs über die vorerwähnte Ebene erhebt und dann wieder senkt bis zum Punkte der vollendeten Verflüssigung der Isotherme des am schwersten zu verflüssigenden Stoffs.

3. Isothermenfläche für zwei nicht beliebig mischbare Stoffe für eine Temperatur, bei welcher der eine sich zwischen der Schmelztemperatur und der kritischen Temperatur, der andere sich oberhalb seiner kritischen Temperatur befindet.

In diesem Fall hat die Fläche der „theoretischen" Isothermen zwei Erhebungen und Senkungen resp. Wellen, welche nicht das ganze Intervall zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = 1$ ausfüllen; die Fläche der „empirischen" Isothermen besteht nur aus zwei Conoiden, entsprechend dem ersten und dritten des vorigen Falls, das vorhin zu einer Ebene ausgeartete Conoid ist hier zu einer Geraden zusammengeschrumpft. Die Curven der beginnenden Verflüssigung und vollendeten homogenen Verflüssigung schneiden sich auf der „theoretischen" Fläche und durch ihren Vereinigungspunkt geht eine „theoretische" Isotherme, welche in diesem Punkt einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente hat. Die Form der „theoretischen" und „empirischen" Isothermen ist für jedes Mengenverhältnis leicht zu übersehen.

4. Isothermenfläche für zwei sich wie Wasser verhaltende Stoffe für eine Temperatur unterhalb des Schmelzpunktes beider.

Das Modell veranschaulicht den Fall, dass die beiden Stoffe sich im festen und flüssigen Zustand unvollkommen mischen, dass jedoch im festen Zustand die Homogenität noch bei einem Drucke erreichbar ist, welcher kleiner ist, als der Verflüssigungsdruck des am schwersten zu verflüssigenden. Die Fläche der „theoretischen" Isothermen besteht dann aus zwei sich stetig folgenden Partien, deren jede ähnlich geformt ist, wie die Fläche im zweiten Fall; die Fläche der „empirischen" Isothermen

besteht aus zwei getrennten Teilen, deren jeder ebenfalls genau ähnlich ist der „empirischen" Fläche im zweiten Fall. Der eine entspricht dem Übergang aus dem gasförmigen in den festen Zustand, der andere demjenigen aus dem festen in den flüssigen Zustand. Alle Teile der „theoretischen" Fläche sind weggelassen, da man sie nach dem Vorhergehenden überaus leicht hinzudenken kann.

5. System der Isothermenflächen für drei beliebig mischbare Stoffe für Temperaturen zwischen der Schmelztemperatur und der kritischen Temperatur jedes derselben.

Mischt man drei Stoffe auf alle möglichen Arten so miteinander, dass jedesmal das Gesamtgewicht gleich Eins ist und betrachtet man den Anteil z des dritten Stoffs als Variable, die Anteile der beiden ersten als Parameter, so erhält man in einem dreiaxigen rechtwinkligen Coordinatensystem, dessen Axen bezw. den Drucken, Volumen und dem Anteil des dritten Stoffs im Gemenge entsprechen, ein ganzes System von sowohl „theoretischen", als auch zu diesen gehörigen „empirischen" Flächen. Für jede einzelne Fläche ist das Mischungsverhältnis der beiden ersten Stoffe constant zu erhalten und vom dritten jedesmal soviel zuzusetzen, dass das Gesamtgewicht Eins ist. Alle „theoretischen" Flächen haben in der Ebene $z = 1$ die „theoretische" Isotherme des dritten Stoffs gemeinsam; die Schnitte dieser Flächen mit der Ebene $z = 0$ werden erhalten, wenn man alle „theoretischen" Isothermen in der im ersten Fall erwähnten Fläche dort auf die Ebene $x = 0$ (oder $x = 1$) projicirt und in die Ebene $z = 0$ überträgt. Alle „empirischen" Flächen sind wiederum Conoide, welche die in der Ebene $z = 1$ gelegene „empirische" Isotherme des dritten Stoffs gemeinsam haben, ihre Schnitte mit der Ebene $z = 0$ werden ganz wie bei den „theoretischen" Isothermen erhalten.

Im Modell sind die leicht zu ergänzenden „theoretischen" Flächen nicht angedeutet; von den „empirischen" ist nur ein Conoid angegeben, die beiden äussersten nur durch die Curven beginnender und vollendeter Verflüssigung angedeutet; jedes der beiden letzteren ist von genau derselben Form wie diejenige im ersten Fall.

6. System von Isothermenflächen für drei unter einander nicht beliebig mischbare Stoffe für Temperaturen zwischen der Schmelztemperatur und der kritischen Temperatur jedes derselben.

In diesem Falle bilden für alle möglichen Mischungsverhältnisse bei dem gleichen Coordinatensystem wie im vorigen Fall sowohl alle „theoretischen" als auch alle „empirischen" Flächen je ein System; die „theoretischen" Flächen haben die „theoretische" Isotherme des dritten Stoffs in der Ebene $z = 1$ gemeinsam, ihre Schnitte mit der Ebene $z = 0$ werden erhalten, indem man beim zweiten Fall alle „theoretischen" Isothermen auf die Ebene $x = 0$ (oder $x = 1$) projicirt und auf die Ebene

z = 0 überträgt. Die „empirischen“ Flächen haben die „empirische“ Isotherme des dritten Stoffs in der Ebene z = 1 gemeinsam, ihre Schnitte mit der Ebene z = 0 werden wie bei den „theoretischen“ Flächen erhalten.

Im Modell sind ebenfalls die „theoretischen“ Flächen weggelassen; von den „empirischen“ ist nur eine angegeben, welche aus sechs Unterabteilungen besteht, die jedoch leicht zu überblicken sind. Die beiden äussersten „empirischen“ Flächen sind nur durch die Curve beginnender Verflüssigung und durch diejenige vollendeter homogener Verflüssigung angedeutet; sie sind genau von der Form, wie die Fläche im zweiten Fall.

Vergleiche hiezu die Abhandlungen des Verfertigers „*Über die Änderung der empirischen und theoretischen Isothermen von Gemengen zweier Stoffe mit der Temperatur*“ und „*Über die geometrische Darstellung der Isothermenflächen von mehr als zwei Stoffen.*“ Zeitschrift für physikalische Chemie Bd. VIII, 5 und Bd. IX, 1 u. 6.

(Blümcke.)

X. Modelle und Apparate zur mechanischen Versinnlichung elektrodynamischer Vorgänge.

293 **Modell zur Veranschaulichung gewisser Eigenschaften des Äthers nach Maxwell's Theorie** von Prof. **G. Fitzgerald**, Trinity College, Dublin.

Dasselbe veranschaulicht die Eigenschaften des Äthers sowohl hinsichtlich der elektrischen als auch der magnetischen Verschiebungen und Kräfte in Übereinstimmung mit der Maxwell'schen Theorie.

Die Wirbel sind durch viele Kreise veranschaulicht, welche auf einem Brette äquidistant so angebracht sind, dass die Axen senkrecht zum Brett durch die Ecken sehr vieler darauf gezeichneter Quadrate gehen. Die Frictionsrollen Maxwells sind durch Kautschukschnüre ersetzt, die je zwei Kreisel, wie Treibriemen, verbinden. Denkt man sich auf dem Brette eine x- und y-Axe, senkrecht darauf eine z-Axe und bezeichnet mit $w = f(x, y)$ die Drehgeschwindigkeit der Kreisel, so ist $\frac{dw}{dx}$ die Spannung der der y-Axe parallelen Schnüre, $-\frac{dw}{dy}$ die der anderen. In Dielektricis sind die Schnüre an den Kreiseln befestigt, in Leitern erfahren sie Reibung. Verbindet man eine Folge von Kreiseln, die eine gerade Linie bilden, so kann man die Inductionswirkung auf Kreisel, die in einer anderen Geraden liegen, versinnlichen. Verbindet man eine Folge von Kreiseln, die in einer geschlossenen Linie liegen, so erhält man einen Strom und dessen magnetische Wirkungen innen und aussen.

Verbindet man alle Kreisel ohne Ausnahme und versetzt eine Reihe in Oscillationen, so kann man die Fortpflanzung elektrischer Schwingungen sehen.

(L. Boltzmann.)

294 **Zwei Schnellseher (Zoetropes) mit Diagrammen zur Darstellung der von einem Hertz'schen elektrischen Vibrator erregten elektrodynamischen Wellen,** von Prof. **G. Fitzgerald,** Trinity College, Dublin.

Die beiden Schnellseher stellen die Schwingungsvorgänge in zweierlei Weisen dar.

295 **Zwei Modelle zur mechanischen Versinnlichung gewisser elektrischer Vorgänge nach Maxwell's Theorie,** von Prof. **O. Lodge,** Univ. College Liverpool.

1. Modell.

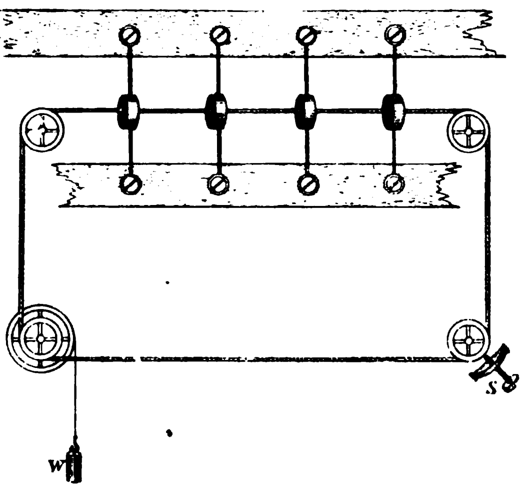


Fig. 1.

Fig. 1 versinnlicht die Art der Ätherverschiebung in einem vollkommenen Leiter, Fig. 2 in einem vollkommenen Nichtleiter (Dielektricum). Hiebei ist der Äther durch eine Schnur dargestellt, welche über drei Rollen laufend mit dem einen Ende an das Rad einer kleinen Welle festgeknüpft ist, während das andere Ende sich um die Welle schlingend ein Gewicht W trägt. Eine der Rollen lässt sich durch eine Schraube S anziehen. Die Schnur selbst ist unausdehnsam zu denken, entsprechend der Incompressibilität des Äthers. Das Gewicht W repräsentirt die elektromotorische Kraft.

Alles bisher Gesagte gilt von beiden Modellen. Während aber bei Modell 1 die Schnur durch eine Reihe von Perlen gezogen ist, ohne mit denselben fest verknüpft zu sein, geht sie bei Modell 2 zwar auch durch eine Perlenreihe, aber unter fester Verknüpfung.

Lässt man nun das Gewicht W (die elektromotorische Kraft) wirken, so wird dies bei 1 nichts anderes zur Folge haben, als dass sich die Schnur vom Wellrade zuerst mit beschleunigter, später aber — sobald die Friction, welche die Schnur beim Durchgange durch die Perlen erleidet, an Grösse der treibenden Kraft des sinkenden Gewichtes gleich geworden ist — mit gleichförmiger Geschwindigkeit abwickelt. (Analogie zum Ohm'schen Gesetze.)

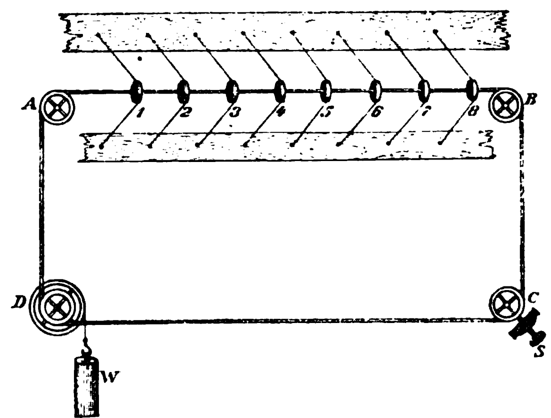


Fig. 2.

Bei 2 aber wird die Wirkung eine andere sein. Die Schnur kann sich hier wegen ihrer festen Verknüpfung mit den Perlen nicht vollständig abwickeln, sondern nur soweit, bis die elastische Kraft jener elastischen Fäden, welche die nach rechts verschobenen Perlen in ihre Ruhelage zurückzuziehen suchen, dem Gewichte W das Gleichgewicht hält. Die Schnur ist dadurch in einen Spannungszustand versetzt worden, welche dem des Dielektricums innerhalb eines geladenen Condensators entspricht. Der Elasticitätsmodul der Perlenfäden entspricht hiebei der reciproken specifischen inductiven Capacität des Dielektricums: Je dehnsamer diese Befestigungsfäden der Perlenschnüre sind, desto weiter werden sich die Perlen aus ihrer Ruhelage entfernen können. Es wird auch geschehen können, dass das Gewicht W die Elasticitätsgrenze dieser Fäden übersteigt; dann reissen sie und die Schnur wickelt sich rasch ab: — das Bild einer disruptiven Entladung. Auch erkennt man, warum die Capacität eines Luftcondensators grösser wird, wenn man etwa eine Hartgummiplatte dazwischen taucht. Denn es entspricht dies dem, dass man

die Perlenfäden plötzlich durch andere von geringerer Elasticität ersetzt, was eine grössere Verschiebung der Perlen ermöglicht.

Zweites Modell.

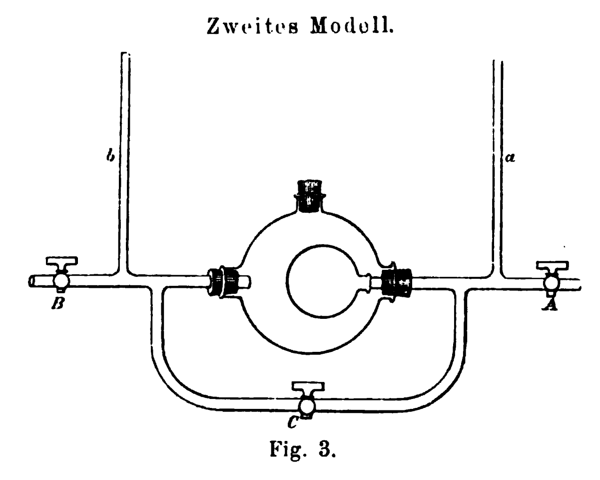


Fig. 3.

Bei dem hydraulischen Modell (Fig. 3) wird die Analogie durch Anwendung einer incompressiblen Flüssigkeit herbeigeführt. Man sieht in der Figur eine grosse hohle Glaskugel mit drei Öffnungen. In die linke ragt eine offene Glasröhre hinein; in die rechte dagegen ist eine Glasröhre geführt, deren Ende durch einen Gummibeutel verschlossen ist. Dieser Beutel, oder richtiger seine Gummimasse, repräsentirt jetzt das Dielektricum.

Man denke sich zunächst den Beutel sowie die Glaskugel (deren obere Öffnung lediglich dazu dient, der Luft hiebei einen Ausweg zu gestatten) mit Wasser vollgefüllt; der Hahn C sei hiebei offen. Dann werden die beiden Manometer a und b (welche zweien Elektroskopen entsprechen) gleichen Druck anzeigen.

Nun werde der Hahn C geschlossen. Dann entspricht dies einer ungeladenen Leydnerflasche, deren beide Belegungen von einander isolirt sind. Nun verbinden wir die linke Röhre vermittelst des Hahnes B mit einem grossen Gefässe (entsprechend der Verbindung der äusseren Belegung der Flasche mit der Erde), dagegen die rechte Röhre durch den Hahn A mit einer Druckpumpe (innere Belegung der Leydenerflasche mit einer Elektrisirmaschine). Hiedurch wird in den Gummibeutel eine Quantität Wasser gepresst, der Beutel ausgedehnt, und so eine genau gleiche Quantität Wasser aus B hinausgepresst. Dies geschieht so lange, bis die elastische Kraft des Gummibeutels, die ihn in seine ursprüngliche Form zurückzubringen sucht, an Grösse der hydraulischen Kraft der Druckpumpe gleich geworden ist (entsprechend der Gleichheit des Potentials der Leydenerflasche mit dem des Conductors der Elektrisirmaschine).

Sperrt man jetzt die Hähne A und B ab, so stellt dies eine geladene Leydnerflasche dar, deren beide Belegungen isolirt sind. Hiebei wird das Niveau im Manometer b noch immer die anfängliche Stellung einnehmen, die als Nullstellung bezeichnet werden soll, hingegen wird im Manometer a das Niveau gestiegen sein. Ein Ausgleich (die Entladung) wird erfolgen, sobald der Hahn C geöffnet wird. Wenn hiebei der Widerstand, den das Wasser beim Hindurchgange durch C findet, nicht zu gross ist, so wird nach dem Ausgleiche die Wassermasse noch hin und her schwanken (oscillatorische Entladung). Ein der disruptiven Entladung analoger Ausgleich wird eintreten, wenn entweder der Hahn C zu schwach oder die Elasticitätsgrenze des Gummibeutels zu niedrig ist im Verhältnis zum Druck der Pumpe. Auch das Phänomen, das bei abwechselnder Verbindung der beiden Belegungen einer Leydnerflasche mit der Erde eintritt, lässt sich dadurch nachahmen, dass man abwechselnd einen der beiden Hähne A und B schliesst und hiebei durch den andern die Communication mit einem grossen Gefässe herstellt.

Noch sei bemerkt, dass die ausgestellten Modelle in einigen unwesentlichen Punkten von den hier scizzirten abweichen.

(O. Lodge.)

296 Apparate zur hydromechanischen Versinnlichung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen, von Prof. **C. A. Bjerknes**, Universität Christiania.

Die Apparate teilen sich in drei Gruppen.

Die *I. Gruppe* dient zur Darstellung jener Erscheinungen, welche in Flüssigkeiten ohne Dazuthun der inneren Reibung derselben zustande kommen. Hiebei sind besonders jene scheinbaren Fernewirkungen berücksichtigt, welche den statisch-elektrischen und den magnetischen Fernwirkungen invers analog sind.

Die *II. Gruppe* bezweckt die Darstellung solcher Erscheinungen, welche in Flüssigkeiten durch die innere Reibung derselben zustande kommen, mit specieller Berücksichtigung solcher, welche den elektrodynamischen Phänomenen invers analog sind. (Anziehung und Abstossung von Stromleitern.)

Die *III. Gruppe* enthält eine Reihe von Apparaten, welche zur Darstellung von flüssigkeitsähnlichen Medien und der Erscheinungen, welche in solchen auftreten können, dienen.

Eine Reihe von Karten und Zeichnungen dient zur näheren Erläuterung der Construction und Wirkungsweise der Apparate.

Bezüglich der Litteratur zu den Bjerknes'schen Untersuchungen sei vor allem auf die fortlaufenden Berichte von Bjerknes in den „Forhandlinger i Videnskabsselskabet i Christiania“ und den „Forhandlinger ved de Skandinaviske Naturforskeres möder“ verwiesen, insbesondere auf die ausführlicheren Aufsätze aus den Jahren 1863, 68, 71, 75, 77, 80; —

ferner auf Berichte in den „Göttinger Nachrichten" 1873, 74, 76, 77; — Noten in den „Comptes rendus des séances de l'Acad. d. sc", de la „Société de Physique", Paris; dem „Journal de Physique", den „Annales Phys. et Chim.", dem „Lumière élect." aus den Jahren 1877, 79, 80, 82, 83; — Aufsätze in „Nature" und „Engegneering" 1882, 83; auf die Untersuchungen in den „Acta Mathematica" 1883; — auf die ausführlichere Zusammenstellung in der Zeitschrift „Lotos", Prag (abgedruckt in Exner's „Repertorium der Physik") 1883; — sowie endlich auf die anlässlich des „Congrès international des Électriciens" 1889 zu Paris veröffentlichten Darlegungen.

(C. A. Bjerknes.)

297 **Apparat zur mechanischen Versinnlichung des Verhaltens zweier elektrischer Ströme (Bicycle)** von Prof. **L. Boltzmann,** Univ. München.

Nach Maxwell sind zur Versinnlichung des Zusammenwirkens zweier elektrischer Ströme zwei Antriebspunkte (driving points) notwendig, die sich mit von einander unabhängigen Geschwindigkeiten u und v bewegen; letztere entsprechen den Stromstärken beider Stromkreise. Ausserdem müssen noch beliebige Massen vorhanden sein. Die Geschwindigkeit w irgend einer Masse m ist eine homogene lineare Function der beiden Stromstärken, also gleich

$$au + bv.$$

Die Bewegungsgleichungen für die beiden Antriebspunkte sind dann identisch mit den Gleichungen, durch welche die wechselseitige Induction zweier elektrischer Ströme ausgedrückt wird. $\frac{1}{2}\Sigma ma^2$ respective $\frac{1}{2}\Sigma mb^2$ spielen die Rolle der Selbstinductionscoëfficienten der beiden Stromkreise. Σmab ist der wechselseitige Inductionscoëfficient.

Der erste Apparat, an welchem diese Bedingungen mechanisch realisirt wurden*), ist von Maxwell selbst angegeben und befindet sich im Cavendish laboratory in Cambridge.

Auf einer Axe (1) (Figur 1 stellt den Durchschnitt dar), deren eines Ende eine Kurbel, deren anderes einen Zeiger trägt, sind 2 andere Axen (2) und (3) aufgesteckt. Die Axen (1) und (3) tragen conische Räder die Axe (2) einen Querstab an dessen einem Ende ein Gewicht C an einer beliebigen Stelle festgeklemmt werden kann, während das andere ein drittes conisches Rad trägt, das gleichzeitig in die beiden ersten eingreift. Ist u die Winkelgeschwindigkeit der Axe (1), v die der Axe (2), so ist die Geschwindigkeit der Masse C in der That gleich a(u + v), wenn a die doppelte Distanz der Masse C von der Drehaxe vorstellt.

Dieses Modell zeigt bloss die Induction, welche eine Veränderung der einen Stromstärke u auf die andere v ausübt, sowie deren Abhängigkeit vom wechselseitigen Inductionscoëfficienten, d. h. von der Distanz der

*) Ich lernte denselben selbst erst vor kurzer Zeit kennen, und er dürfte hier zum ersten Male beschrieben sein

Masse C von der Drehaxe. Da jedoch diese Distanz während der Bewegung nicht verändert werden kann, so kann die Induction durch Bewegung der Stromkreise im Raume, also durch Veränderung des wechselseitigen Inductionscoëfficienten ebensowenig demonstrirt werden, als die Wirkung der ponderomotorischen Kräfte.

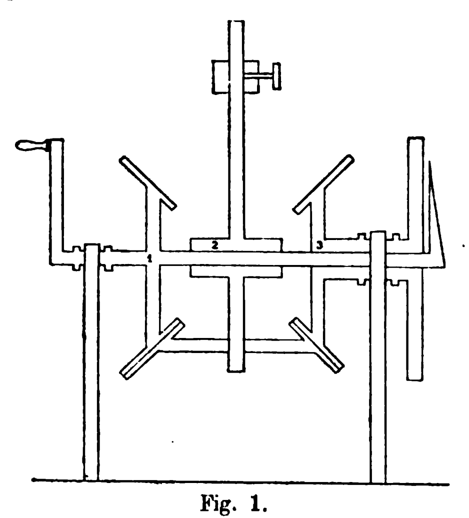


Fig. 1.

Um alle diese Erscheinungen zeigen zu können, muss mit jeder der Axen eine Masse verbunden werden, deren Distanz von der Drehaxe während

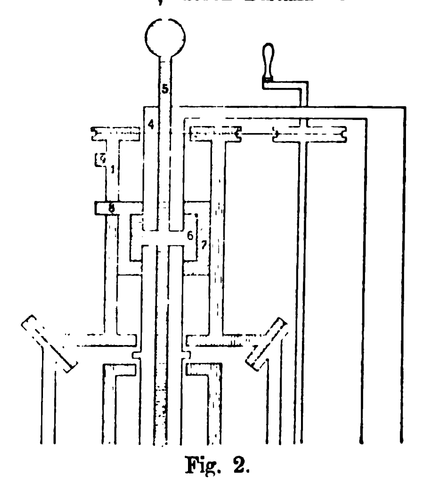


Fig. 2.

der Bewegung verändert werden kann. Dies ist an dem ausgestellten Apparat (No. 297) in folgender Weise realisirt: Die 3 Röhren (1), (2), (3),

welche genau wie beim Maxwell'schen Apparat durch conische Zahnräder so verbunden sind, dass die Winkelgeschwindigkeit der mittleren Röhre das arithmetische Mittel der Winkelgeschwindigkeiten der beiden äusseren sein muss, sind hintereinander auf eine fixe verticale Röhre (4) (Figur 2) aufgesteckt. In der Figur ist nur die obere Röhre (1) und ein kleiner Teil der mittleren sichtbar. Die Kurbel ist nicht direct an der oberen Röhre befestigt, sondern letztere ist mittelst einer Schnur mit einer zweiten Axe verkuppelt, welche die Kurbel trägt. In gleicher Weise ist auch die untere Röhre drehbar, und es kann gedreht werden: 1. die obere Röhre allein, 2 obere und untere Röhre in gleichem Sinn, 3. obere und untere Röhre in entgegengesetztem Sinn. In der Röhre (4) steckt nun ein Stab (5), welcher durch passende Zapfen einen Ring (6) trägt, der die Röhre (4) umschliesst. Letztere hat natürlich Schlitze, in denen sich die Zapfen bewegen können. Ein zweiter Ring (7) umschliesst den Ring (6), liegt aber noch immer innerhalb der Röhre (1). Ein am Ringe (7) befestigter Zapfen (8) ragt jedoch durch einen Schlitz der Röhre (1) aus dieser hervor. Dank dieser Vorrichtung kann während der Rotation der Röhre (1) der Zapfen (8) mittelst des Stabes (5) ohne Störung der Rotation auf- und abbewegt werden. Hierdurch aber wird die Distanz zweier Gewichte von der Drehaxe in folgender Weise regulirt: Der Zapfen (8) und ein mit der Röhre (1) fest verbundener Zapfen (9) sind die beiden vis-à-vis liegenden Gelenke einer Parallelogrammführung, deren Enden jene beiden Gewichte tragen, genau so wie beim Centrifugalregulator einer Dampfmaschine. (Vergl. Figur 3.)

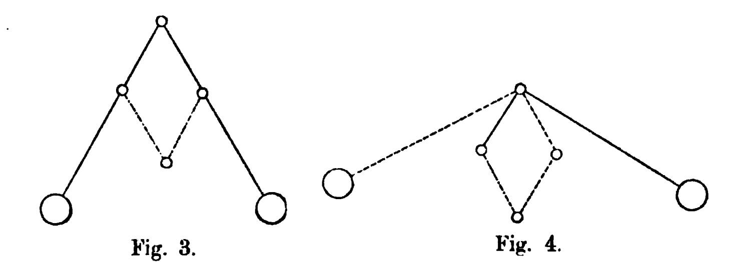


Fig. 3. Fig. 4.

Eine vollkommen analoge, an derselben Stange befestigte Vorrichtung befindet sich an den Röhren (2) und (3). Die an der Röhre (3) befindliche ist identisch gebaut. Dagegen hat die an der Röhre (2) befindliche folgende zwei Unterschiede: 1. sie trägt viermal so grosse Gewichte; 2. die Gewichte nähern sich der Axe, sobald die der anderen Parallelogrammführungen sich von der Axe entfernen, und umgekehrt. Letzteres wird dadurch bewirkt, dass die Gewichte von Armen getragen werden, welche nicht die Fortsetzung der Arme der Scharniere bilden, sondern auf letzteren senkrecht stehen. (Siehe Figur 4.) Durch Auf- und Abschieben des Stabes (5) kann während der Bewegung ohne Veränderung

der Selbstinductionscoëfficienten der wechselseitige Inductionscoëfficient geändert werden. Daher können alle Erscheinungen der Induction durch Bewegung demonstrirt werden, sobald man die obere Röhre in constanter Rotation erhält und dabei den Stab (5) aufwärts oder abwärts bewegt Den ponderomotorischen Kräften analog sind die Kräfte, welche auf den Stab (5) wirken, wenn die beiden Röhren (1) und (3) entweder im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne gedreht werden. Näheres hierüber, sowie über einen zum selben Zwecke dienenden Apparat Lord Rayleigh's siehe Boltzmann's *Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes*, Barth 1891, 6. Vorlesung.

(L. Boltzmann.)

298 Zwei Modelle zur Darstellung elektrischer Schwingungen und magnetischer Kraftlinien im Umkreis von Solenoiden. Nach Angaben von Professor **M. Möller,** ausgeführt durch den Aussteller **O. Günther,** Mechaniker der techn. Hochschule zu Braunschweig.

Beschreibung der Modelle.

Das erste Modell zeigt die im Umkreise eines einzelnen Solenoid-Ringes entstehenden Bewegungszustände; dasselbe dient auch zur Erklärung der magnetischen Abstossung entgegengesetzt verlaufender Ströme.

Das zweite Modell bietet die im Umkreise von zwei Solenoid-Ringen entstehenden Bewegungszustände; dasselbe dient auch zur Erklärung der magnetischen Anziehung parallel und in gleichem Sinne verlaufender elektrischer Ströme.

Im *Grundriss*, *Querschnitt* wie *Längenschnitt* zeigen die Modelle die im Umkreise und in der Nachbarschaft elektrischer Ströme (hier Kreisströme) statthabenden elektrischen Drehschwingungen ↻, die Gestalt der Schwingungsflächen und die Gestalt der dazu senkrecht stehenden Kraftlinien, bezw. Kraftflächen.

Die *Construction* der Schwingungsflächen geschah durch Construction der Tangentialflächen der Schwingungsbewegung für beliebig viele Punkte im Raum. Dabei wurden die von den einzelnen Punkten der Drähte ausgehenden Antriebe nach Richtung, Grösse und Drehsinn zu einer resultirenden Bewegung zusammengesetzt. In *zweiter Reihe* sind die Kraftflächen normal zu jenen Schwingungsflächen gezeichnet. — Nachträglich im elektrotechnischen Laboratorium der Hochschule zu Braunschweig ausgeführte praktische Versuche zeigten die genaue Übereinstimmung der mittelst Eisenfeilspähnen sichtbar gemachten Linien mit den Ergebnissen der Construction.

↻ Die wie neben gezeichneten, mit Pfeilen versehenen Kreise geben den Drehsinn der Schwingungen des Äthers an, welche Drehschwingungen (nicht Wirbel) im Äther entstehen, wenn seitlich davon ein

elektrischer Strom auftritt, dessen elementare Bewegungen als forteilende Wellen erkannt sind.

Es ergibt sich, wie weiter gezeigt wird, nahe dem Centrum eine Verminderung des statischen Ätherdruckes. Orte verminderten, also schwächeren statischen Ätherdrucks, verminderter Ätherdichte, sind in *heller Färbung* gehalten.

Der Gesamtdruck im Äther zerfällt in den statischen Druck und den dynamischen Druck, d. h. den Druck der Wellen beziehungsw. deren Schwingungen.

Magnetische Anziehung ergibt sich, wenn zwischen zwei Punkten A und B die Summe des statischen und des dynamischen Drucks kleiner ist als ausserhalb A und B.

$S_1 \rightarrow A\bullet \leftarrow S_{11} \rightarrow \bullet B \leftarrow S_1 \qquad\qquad S_{11} < S_1$

Magnetische Abstossung tritt dort auf, wo zwischen zwei Punkten A und B die Summe S_{11} aus dem statischen und dem dynamischen Druck grösser ist als die Summe S_1 ausserhalb A und B.

$S_1 \rightarrow \bullet A \leftarrow S_{11} \rightarrow \bullet B \leftarrow S_1 \qquad\qquad S_{11} > S_1$

Modell I zeigt die zwischen gegenüberliegenden Ringelementen, d. h. zwischen entgegen gerichteten Stromteilen bestehende Abstossung. Hier ist im Mittelpunkt des Ringes der statische Druck ungeschwächt; dazu tritt in der Ringebene der dynamische Druck, so dass ein Überdruck entsteht.

Modell II zeigt die zwischen gleich gerichteten Strömen bestehende Anziehung, als Folge verminderten statischen und geringen dynamischen Drucks zwischen den sich anziehenden Ringelementen. Für den neutralen Punkt X ist letzterer sogar gleich Null.

Theorie.

Das Buch: ***Räumliches Wirken und Wesen der Elektricität und des Magnetismus*** von ***M. Möller*** — mit 3 Tafeln und 8 Figuren — Preis *M.* 3.50 — Verlag von ***Manz & Lange***, Hannover-Linden bietet Ableitung und Erklärung der an den Modellen dargestellten Vorgänge. — Hier sei nur Folgendes erwähnt:

Es ist zweckmässig, ja notwendig, den Versuch zu wagen, die gewöhnlichen, für Flüssigkeiten erkannten Bewegungsgesetze, soweit sie sich verallgemeinern lassen, auch auf die Bewegung des Äthers anzuwenden. — Es ergibt sich alsdann eine interessante Perspective von Erkenntnissen über das Wesen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Kurz mitgeteilt, sind folgende Punkte von Bedeutung:

1. Ausser der Wärmebewegung, welche zugleich Ursache aller materiellen Druckarten, und deren Wechsel, z. B. auch Träger der Schallwellen ist, besteht im Weltall eine ätherische Bewegung; das ist eine Bewegung höherer, feinerer Art.

2. Wie die chaotische Grundbewegung der Materie, die Wärme, den materiellen Druck, d. h. den molekularen Druck, z. B. den Luftdruck erzeugt oder bedingt, so ist die chaotische ätherische Grundbewegung Ursache eines statischen Ätherdrucks.

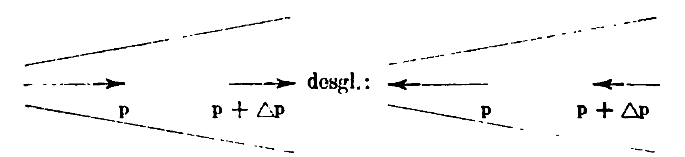
3. Alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen sind dem Schall und seinen mechanischen Wirkungen verwandt, sie sind der Ausdruck von Schwingungserscheinungen ätherischer Art, d. h. eines Wechsels im Ätherdruck.

4. In einem geschlossenen Gefäss erzeugte Wellen bedingen eine Vermehrung des Drucks in dem das Gefäss erfüllenden elastischen Mittel.

5. Die Druckwirkung der Wellen ist eine dynamische; sie tritt nicht nach allen Seiten gleichmässig auf, wie statischer Druck, sondern nur zumal oder einzig nur in Richtung der Schwingung.

6. Wellen erzeugen durch die Schwingung eine Polarisation des Drucks; d. h. es herrscht in Richtung der Schwingung die Gesamtsumme aus statischem und dynamischem Druck, quer dazu einzig oder fast nur statischer Druck.

7. Von *höchster Wichtigkeit* ist das Studium der bei ***Ausbreitung von Wellen*** statthabenden Vorgänge. Hier treten Erscheinungen ein, welche den bei Ausbreitung von Flüssigkeits-Strömungen in conischen Röhren sich ergebenden Erscheinungen verwandt sind. Nach aussen hin tritt im äusseren Rohrteil an Stelle des dynamischen Drucks ein Zuwachs Δp an statischem Druck.



Der grössere statische Druck findet sich dort, wo die Bewegung bezw. Strömung oder Schwingung am kleinsten ist, das heisst in dem weiteren Rohrquerschnitt, oder verallgemeinert, entfernt vom Centrum.

8. Es ist Aufgabe des theoretischen Studiums, alle zwischen statischem und dynamischem Druck der Wellen bestehenden Beziehungen zu betrachten, bezw. aufzufinden Alle Naturkräfte lassen sich auf das Zusammenwirken der statischen und dynamischen Druckarten verschiedener Ordnung zurückführen.

9. Von einem Centrum radial ausstrahlende Energie oder Schwingung reflectirt an den unendlichen Massen entferntester Kugelschalen und vermag daher nur im Moment einer Steigerung der Energie am Centrum von diesem aus radial in den Raum hinaus zu entweichen. Aus diesem Grunde isolirt der mit freier ätherischer Bewegung erfüllte Raum alsbald, während im Moment einer Spannungsänderung Elektricität aus einem Draht normal in den Raum hinaus entweicht. — Näheres vergl. das angezogene Buch.

(M. Möller.)

Dritter Abschnitt. Verschiedene technische Anwendungen.

Y. Geodätische, nautische und meteorologische Instrumente.

299 **Logarithmischer Tachymeter**, von **Tichy & Ott**; ausgestellt von dem math.-mech. Institut von **A. Ott**, Kempten.

Den wichtigsten Teil dieser zumeist auf Präcisions-Tachymetrie abzielenden neu construirten Universalinstrumente bildet der bereits 1878 von Ingenieur *A. Tichy* erfundene logarithmische Entfernungsmesser in seiner neuesten Form.

Die Neuerung besteht darin, dass, während bisher das Fernrohr mit einem Ocular-Filar-Schrauben-Mikrometer versehen sein musste, um die optisch gemessene Entfernung in Form des *vierstelligen* gemeinen Logarithmus zu erlangen, bei der neuesten Construction das obenerwähnte Mikrometer entbehrlich wird, und zwar durch folgende Einrichtung:

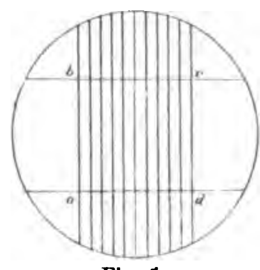


Fig. 1.

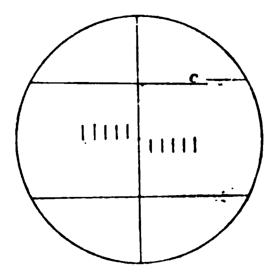


Fig. 2.

Fig. 1 stellt das mit dem Fadennetze bespannte Gesichtsfeld eines Theodolith-Fernrohres mit astronomischem Ocular dar, dessen optische Kraft zu einer 25 bis 30maligen Vergrösserung gut hinreichen muss.

Der Faden ad ist horizontal, bc unter einem Winkel von $1^0\,18'\,16''$ gegen ad geneigt. In der Praxis darf dieser Neigungswinkel, ohne einen merklichen Fehler zu verursachen, um $\pm\,10''$ ungenau sein. a ist der Nullpunkt des Fadennetzes hinsichtlich der Entfernungsmessung. Der Abstand ab entspricht der Constanten 100 nach *Reichenbach*'scher Definition und es ist ab = ad. Die 11 Verticalfäden, wovon der mittlere auffallend dünner ist als alle übrigen, haben unter einander gleiche Abstände und kreuzen rechtwinklig mit dem Faden ad, auf welchen das Libellensystem des Instrumentes bezogen ist. Ferner ist $cd = ab - \frac{ab}{43.9315}$; d. h. cd ist um den Wert einer logarithmischen Einheit der zweiten Decimalstelle kleiner als ab.

Die logarithmische Lattenteilung (Fig. 3) hat am oberen Ende eine horizontale Nullmarke, welche um den Wert der additionellen Constanten c teilungeinwärts gerückt ist. Von hier an sind 10 cm — c ungeteilt und dann beginnt die Scala von Einheit zu Einheit der zweiten logarithmischen Decimalstelle des Metermasses in Form von schwarz mit weiss abwechselnden schiefen Feldern, deren Neigung jener des Fadens bc entspricht. Die noch messbare grösste Entfernung ist durch die Lattenlänge begrenzt und reicht bei den üblichen drei Kategorien bis 200, 250 und 300 m.

Wird der horizontale Faden ad auf die Nullmarke der fix und vertical stehenden Latte derart eingestellt dass der verticale Faden ab die Mittellinie deckt, so muss der schiefe Faden bc (eine unpassende, d. h. zu kleine, oder zu grosse Entfernung ausgeschlossen) irgendwo zwischen zwei Marken am Bilde der logarithmischen Lattenteilung zu liegen kommen und der Beobachter hat nur mehr die Einstellschraube der Alhidade des Horizontalkreises in der Richtung des Pfeiles (Fig. 1) solange wirken zu lassen, bis der schiefe Faden die nächst innere Marke genau erreicht, während der Horizontalfaden der Höhe nach unverändert auf die Nullmarke gerichtet bleibt, insofern das Instrument horizontirt war und und die in Anwendung gekommene Einstellschraube durch ihre Bewegung den Stand der Verticalaxe des Instrumentes nicht im geringsten beunruhigt. Ist die Einstellung des schiefen Fadens in der angegebenen Weise bewirkt, so hat man nachzusehen, um welches Mass sich der Verticalfaden ab von der Mittellinie des Lattenbildes nach links entfernt hat. Die ersten 2 Stellen vom Logarithmus der Entfernung sind die vom schiefen Faden durchschnittenen beiden Ziffern, welche an der Latte geschrieben stehen, die dritte Stelle wird an den zwischen ab und der Lattenmitte in Vorschein gekommenen Verticalfäden ausgezählt und die vierte ergibt sich durch Zehntelschätzung zwischen der Lattenmitte und dem links nächststehenden Verticalfaden.

Dieses vom Ingenieur Tichy unter dem Namen *„der optische Messkeil“* eingeführte Princip ist einer ungemein genauen Pointirung der Lattenteilung sehr günstig*).

Schon aus Rücksicht darauf, dass das Schadhaftwerden auch nur eines einzigen Fadens gleichbedeutend wäre mit dem Zugrundegehen des ganzen Netzes hat man sich bei der Ausführung anstatt der Spinnenfäden für die Anwendung eines Glasmikrometers mit eingeritztem Netz entschieden, wodurch es auch möglich geworden ist, den optischen Messkeil so auszugestalten, wie dies in Fig. 2 dargestellt ist.

---

*) Nebst Voraussetzung normaler atmosphärischer Verhältnisse hängt der in der Praxis erreichbare Genauigkeitsgrad von nichts so sehr ab, als von dem Geübtsein des Beobachters im scharfen Einstellen der beiden Fäden des optischen Keiles auf die Marken der Lattenteilung und es erreicht erfahrungsgemäss der *wohlgeübte* Beobachter gar nicht schwer den Genauigkeitsgrad von $+\frac{1}{4000}$ bis $+\frac{1}{5000}$ der gemessenen Entfernung.

Die Latte ist in ⌉⌈ Form construirt. Behufs der sehr notwendigen Fixirung und genauer Verticalstellung ist die Latte mit stativfussähnlichen Stützstreben und mit Kreuzlibellen versehen.

Der normale Tachymeter-Theodolith

hat ein durchschlagbares Fernrohr und liefert eine 30malige Vergrösserung. Das Fädennetz ist nach Fig. 2 auf einem 0,2 mm dicken Planglase eingeritzt und entspricht der Constanten 100. Der schiefe Faden setzt nach Überschreitung des Punktes c ab und ist sodann nach Massgabe der vollen Constanten 100 horizontal fortgesetzt. Diese Fortsetzung dient zu allenfallsigem Gebrauche nach Reichenbachs Methode.

Das Instrument hat einen repetirenden Horizontalkreis von 15 cm und einen Vertical-Bogen von 13 cm Teilungsdurchmesser. Die Winkelteilung ist zwar nach 360 gradigem System, jedoch mit decimaler Unterteilung des Grades ausgeführt. Die Ablesung geschieht sowohl am Horizontalkreise, als am Höhenbogen mit nur je *einem* kleinen Mikroskope, in dessen Bildebene auf einem Glasmikrometer durch eingeritzte Striche ein Gradintervall in Zehntel geteilt ist, so dass in dem durch diese Unterteilung entstehenden, scheinbar 2 mm breiten Zehntelgrad-Intervall eine *ganz zuverlässige* Lesung des stehenden Hundertelgrades durch Ocularschätzung ermöglicht ist. Jeder dritte Gradstrich, der bloss auf ganze Grade ausgeführten Teilung am Limbus ist beziffert und da reichlich 4 Gradintervalle in das Gesichtsfeld des Mikroskopes fallen, so ist auch die Bezifferung stets im Mikroskope direct ablesbar.

Die Bezifferung der Winkelteilung des Verticalbogens ist so angeordnet, dass einer auf den Horizontalfaden des Fernrohres bezogenen horizontalen Visur bei einspielender Blase der Alhidadenlibelle des Verticalbogens die Lesung 0° am langen Indexstrich des Mikroskopes entspricht. Von dieser Nullstellung aus ist der zum Vollkreise ergänzt gedachte Bogen in *einem* Sinne bis 360° beziffert, und zwar so, dass die Lesungen 0° bis 45° den Höhenwinkeln, die Lesung 315° bis 360° den Tiefenwinkeln entsprechen.

Parallel zur Gradteilung des Höhenbogens und derselben direct corspondirend ist auch noch eine logarithmische Teilung, vom Nullpunkte beiderseits aufgetragen. Dieselbe liefert das Element a zur Reduction der logarithmisch gemessenen schiefen Distanz auf den Horizont und ist nach der Formel

$$a = \log \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha \, (1 + 0{,}01 \, \operatorname{tang} \alpha)} \right)$$

construirt, worin α den Neigungswinkel der auf den Horizontalfaden bezogenen, nach dem Nullpunkte der vertical stehenden Latte gerichteten Visur des Fernrohres bedeutet. Die Lesung dieser logarithmischen Teilung geschieht am Indexstrich des fix stehenden Mikroskopes, da dieselbe samt ihrer Bezifferung in dasselbe Gesichtsfeld wie die Gradteilung fällt. Sie gibt an, wieviel logarithmische Einheiten der vierten Decimalstelle von

Fig. 8.

der Lattenlesung jeweilig abzuziehen sind, um als Rest den Logarithmus der horizontalen Entfernung zu erhalten. Von 0 nach beiden Seiten sind die ersten 10 Einheiten direct aufgetragen, dann weiter Einheiten der dritten Stelle, in deren Intervallen jene der vierten Stelle durch Zehntelschätzung erlangt werden. So oft, als es sich nicht zugleich auch um die Bestimmung von Höhenunterschieden handelt, braucht der Verticalwinkel behufs Reduction der schiefen Entfernung auf den Horizont gar nicht abgelesen zu werden und wird die Berechnung der horizontalen Entfernung eine überraschend einfache, da sie sich lediglich auf die Subtraction der beiden Beobachtungselemente und *eventuell* schliesslich auf das Ausheben der Zahl zum Logarithmus in einer vierstelligen Logarithmentafeln beschränkt. Weil bei einem solchen Instrumente auf eine exacte Axenrotation ungemein viel ankommt, so ist dasselbe nicht blos mit ganz ungewöhnlich langen Verticalaxen construirt, sondern auch noch mit einigen neuartigen Klemm- und Einstellvorrichtungen bedacht.

Das Libellensystem des Instrumentes besteht aus einer zur optischen Axe parallel corrigirbaren grossen und einer ebenfalls mit dem Fernrohr fix verbundenen, jedoch wieder zu dessen Horizontalaxe parallel corrigirbaren kleinen Reversionslibelle, welche zugleich zur ersten Horizontirung des Instrumentes dient, dann aus einer gewöhnlichen Libelle an der Alhidade des Höhenbogens, welche jedesmal unmittelbar vor dem Ablesen des Bogens zum Einspielen gebracht werden soll.

Zum Zwecke der Beseitigung des Collimationsfehlers ist das Objectiv durch Seitwärtsrückung corrigirbar eingerichtet. Da der Excentricitätsfehler des Horizontalkreises unter 24″ gebracht werden kann, so ist die einfache Ablesung am Horizontalkreise gerechtfertigt.

Der Tachymeter-Theodolith mit diametralen Schraubenmikroskopen

ist nach denselben Hauptgrundsätzen construirt, wie der vorher beschriebene, nur mit jenen Unterschieden, wie solche die Prätension von 0,001° bezüglich Feinheit der Winkelmessung erheischt.

Als (*zugehöriges*) Bureau-Instrument dient der neu erfundene Auftragapparat (Fig. 4) samt eigens dazu construirtem Arbeitstisch.

Dieses Instrument dient zur maschinellen Auftragung der am Felde nach der Polarmethode tachymetrisch aufgenommenen Detailpunkte auf den Plan von den vorher im Constructionswege aufgetragenen Instrumenten-Standpunkten aus, über welchen der Auftragapparat centrisch aufzustellen kommt, um sonach nach den im Feldmanuale eingeschriebenen Richtungswinkeln und horizontalen Entfernungen die Detailpunkte zu markiren.

Die Construction beruht auf dem Princip, dass ein mit seiner Mantellinie auf eine horizontale starre Ebene gelegter regelrechter Kegel, in wälzende Bewegung versetzt, einen genauen Kreis beschreiben muss. In der vorliegenden constructiven Anordnung sind 3 identische abgestutzte Kegel, jeder in einem eigenen Rahmen zwischen 2 mit Gegenmuttern

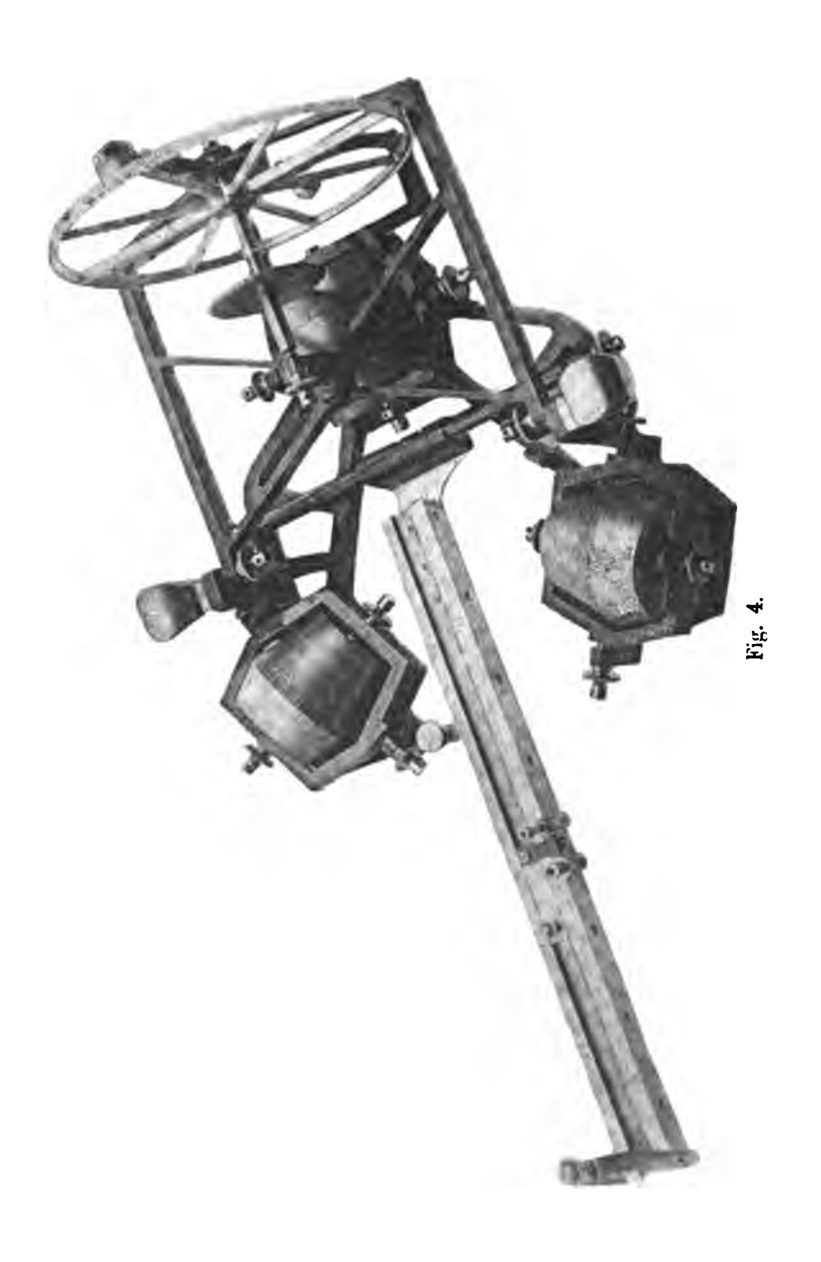


Fig. 4.

versehenen Spitzschrauben axial und corrigirbar gehalten, in einem gemeinsamen grossen Hauptrahmen gelenkig und derart montirt, dass die 3 Kegelaxen um ungefähr je 120° in ihrer horizontalen Projection auseinander stehen und sich in *einem* Punkte am Plane, dem „Pol" des Instrumentes genau schneiden. Infolge dessen muss der exact rectificirte Apparat constant um den Pol rotiren, ohne dass es notwendig ist, denselben, wie dies bei anderen bekannten Constructionen geschieht, an den Pol mechanisch festzunageln.

Zum Auftragen der Entfernungen und zugleich als Führungshebel zur Handhabung der rotirenden Bewegung, sowie als Mittel zur Hemmung derselben dient ein reichlich 30 cm langes schweres Lineal, welches am Hauptrahmen gelenkig, mit seitlicher Correction zwischen 2 Spitzschrauben derart eingehängt ist, dass die Piquirnadel des am Lineale in Falz und Nuth laufenden Indexschiebers ungehindert bis in den Pol, ja selbst noch ein wenig über diesen hinaus eingestellt werden kann. Am Lineal ist einerseits der Nuth eine Millimeterteilung, anderseits eine der letzteren correspondirende logarithmische Längenteilung angebracht. Der Indexschieber trägt einerseits einen Nonius von 10 : 9 dessen Nullstrich nach der anderen Seite hin ganz durchgezogen ist, um zugleich zur Einstellung auf die logarithmische Scala zu dienen.

Zum Einstellen der Richtungswinkel dient ein zart ausgeformter Speichenkreis von 18 cm Durchmesser, welcher eine Stirnteilung auf 100 gleiche Teile trägt. Die Axe dieses Kreises ist mit einem fixen Rotationsscheibchen versehen und das Ganze in einem eigenen Rahmen abermals zwischen Spitzschrauben corrigirbar gehalten. Dieser Rahmen ist wieder mittelst eines Spitzschraubenpaares am Hauptrahmen gelenkig und derart anmontirt, dass das Rotationsscheibchen auf den im negativen Sinne abgedrehten Absatz des in der verlängerten Richtungslinie des Lineals liegenden Kegels zu ruhen kommt, während der Kreis über den Kegel frei hinausragt. Das Scheibchen hat die Aufgabe, die Wälzung des Kegels auf den geteilten Kreis zu übertragen und ist im Verhältnis zum Kegel so dimensionirt, dass es sich samt dem Kreise 3,6 mal umdrehen muss, während der Gesamtapparat einen vollen Kreis um den Pol herum beschreibt, wodurch ein Teilungs-Intervall am Kreise genau den Wert eines Grades erlangt. Da der Umdrehungskörper, worauf das Scheibchen ruht, ein Kegel ist, so muss der Winkelindicator durch Correction in der Richtung seiner eigenen Rotationsaxe genau auf 360,00° justirbar sein.

Wird das Lineal am äusseren Ende erfasst und ein wenig gehoben, so kann damit der Apparat im Kreise gedreht werden. Diese Bewegung erscheint sofort gehemmt, als man das Lineal in dem Momente, wo der Winkelindicator das verlangte Gradmass zeigt, auf den Plan sinken lässt. Damit die führende Hand keinen schädlichen Zug oder Schub in radialer Richtung üben könne, ist das äussere Linealende mit einem gelenkigen Handhabebügel versehen.

(Tichy.)

300 **Himmelsuhr** nach Geh. R. Prof. **Reuleaux**, technische Hochschule Berlin-Charlottenburg.

301 **Zwei Dromoskope**, von **Garbich** und von **Paugger**, zur Berechnung der Compassdeviation. Ausgestellt von der **Seewarte Hamburg**, Director Geh. Adm.-Rat **Neumayer**.

302 **Apparate zur Umwandlung der Kurse; Sphärogramm von Volbers; Navisphère** von Kap. **De Magnac**. Ausgestellt von der **Seewarte Hamburg**, Director Geh. Adm.-Rat **Neumayer**.

303 **Meteorograph nach Neumayer.** Ausgestellt von der **Seewarte Hamburg**, Director Geh. Adm.-Rat **Neumayer**.

Der Apparat dient zum Registriren von Meteoren und zarten Lichterscheinungen, wie des Zodiakallichtes, am Himmel.

304 **Apparat zur Bestimmung der Höhe und Geschwindigkeit der Wolken**, von Lieut. Gen. **Strachey**, London.

Zur Bestimmung der Höhe von Wolken werden Photographien auf zwei Stationen gleichzeitig aufgenommen; zur Bestimmung der Geschwindigkeit aber auf derselben Station in Zwischenräumen von einigen Minuten. Der ausgestellte Apparat dient dazu, aus diesen Photographien die gewünschten Grössen zu ermitteln.

Die Stationen A, B liegen im Park von Kew (wo sich die meteorologische Hauptstation Englands befindet) in einer Entfernung von 2400 Fuss.

Ursprünglich waren die Camera's theodolitenartig aufgestellt, so dass die Axen beide auf denselben Punkt des Himmels gerichtet werden konnten. Bedeuten nun A und B die Azimuthe und Z_a, Z_b die Zenithentfernungen eines Punktes in einer Wolke, an den Stationen A und B bestimmt, β die Entfernung der Stationen, D_a, D_b die horizontalen Entfernungen der Stationen von dem Punkte, welcher senkrecht unter dem beobachteten Wolkenpunkte liegt, und H die Höhe der Wolke, so hat man

$$H = \beta \frac{\sin B}{\sin (A - B) \tan Z_a} = \beta \frac{\sin A}{\sin (A - B) \tan Z_b}.$$

Zur raschen Berechnung dieser Werte dient der unter Nr. 15 (vergl. pag. 144) ausgestellte Rechenschieber. Derselbe enthält zwei nebeneinander liegende Schieber. Der feste Stab enthält dem oberen Schieber gegenüber eine Einteilung nach log sinus, gegenüber dem unteren aber nach den Logarithmen der Zahlen, und zwar steht dem log sin 90° der Logarithmus der Basislänge, also log 2400 gegenüber. Der obere Schieber enthält die Logarithmen der sinus kleiner Winkel. Auf demselben ist ein Index I markirt, welcher dem log sin 5° 44′ 27″ (= 9·00000) oder dem log sin 0° 34′ 23″ (= 8·00000) entspricht.

Der untere Schieber ist nach log tan Z eingeteilt; der als Index II markirte Punkt gibt log tan 45°.

Zur Anwendung stellt man Index I auf den Winkel A der oberen festen Einteilung ein und den Index II auf den Winkel A — B des ersten Schiebers. Dem Index II gegenüber liest man dann auf der unteren Einteilung die Entfernung D_b ab und dem Winkel Z_b des zweiten Schiebers die Höhe der Wolke in Fussen.

Hat man auf dieselbe Weise D_a bestimmt, so kann man graphisch die Lage des Punktes A in der Horizontalebene bestimmen, welcher unterhalb eines beobachteten Wolkenpunktes liegt. Macht man kurze Zeit später eine ähnliche Bestimmung für denselben Wolkenpunkt, so erhält man graphisch die Verschiebung der Wolke während des Zeitintervalles der beiden Bestimmungen und daraus sofort die Geschwindigkeit der Wolke.

Die hiebei benutzten Wolkenpunkte werden auf den Photographien ausgesucht. Da jedoch wegen der unbestimmten und fortwährend wechselnden Formen der Wolken solche Punkte schlecht zu finden sind, gab diese Methode nur wenig befriedigende Resultate. Im Jahre 1890 ward daher eine andere Methode in Anwendung gebracht.

Die Camera's sind beide auf den Zenith gerichtet. Auf den Platten sind den Seiten parallel zwei Linien markirt, die sich in den Mittelpunkten M_a, M_b schneiden. Je eine dieser Linien liegt in der Basis AB.

Ist nun f die Brennweite der Linsen, so werden deren optische Mittelpunkte F_1 F_2 in den Entfernungen f über den Mittelpunkten der Platten liegen. Nehmen wir nun in der Wolke den Punkt P, welcher im Zenith des Mittelpunktes der Basis AB liegt, so werden dessen Bilder P_a, P_b auf eine Linie der Platten fallen und zwar beide ausserhalb der Punkte M_a, M_b in gleichen Abständen von letzteren. Die Punkte P_a, P, P_b bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie P_a, $P_b = \beta$ und der Höhe h gleich der zu bestimmenden Wolkenhöhe. Verschiebt man aber die Platten in ihrer Ebene längs der Basis, bis ihre Mittelpunkte M_a, M_b und daher auch die Punkte F zusammenfallen, so erhält man ein ähnliches Dreieck $P_a F P_b$ mit der Basis $P_a P_b = p$ und der Höhe f. Es ist daher $hp = \beta f$. Misst man daher p, so ergiebt sich die Wolkenhöhe sofort, da β und f Constante sind. Diese Messung von p ist natürlich auf obige Weise nicht ausführbar, da weder der Punkt P noch irgend ein anderer Punkt der Wolke scharf markirt ist. Legt man aber die Platten so aufeinander, dass deren Basis und die Punkte P_a, P_b zusammenfallen, so wird $M_a M_b = p$. Zugleich werden alle Punkte der einen Platte mit den entsprechenden der anderen zusammenfallen. Mit anderen Worten, man legt die entwickelten Platten so aufeinander, dass die Wolkenbilder coincidiren; die Entfernung der Mittelpunkte beider giebt dann das p.

Praktisch geschieht diese Messung in folgender Weise. Ein hölzerner Kasten, welcher an einer Seite sowie oben offen ist, trägt oben Schienen,

auf denen ein Rahmen hin und her geschoben werden kann. Über diesem liegt ein zweiter Rahmen, der rechtwinkelig zum ersten verschiebbar ist. In diese Rahmen werden die zwei photographischen Platten gelegt und sind dann leicht in eine solche Lage gebracht, dass ihre Bilder zusammenfallen. Zum richtigen Einstellen ist über den Scheiben ein verticales Rohr angebracht, durch welches man senkrecht auf die Bilder blickt. Zur Erleuchtung der Bilder dient eine gegen die offene Seite des Kastens geneigte weisse Fläche. Wenn die Bilder zusammenfallen, misst man mit einem Zirkel die Entfernung der Mittelpunkte beider Platten, also das p. Um hieraus das x, die gewünschte Wolkenhöhe zu finden, ist die Hyperbel $h\,p = \beta\,f$ verzeichnet, deren Basis passend eingeteilt ist. Sucht man also mit dem Zirkel die dem y gleiche Ordinate, so liest man die Höhe h sofort ab.

Hiebei ist zu bemerken, dass in dem Aufsatz: „*Cloud Photography conducted under the Meteorological Council at the Kew Observatory*"; by Lieut.-General *R. Strachey*, R. E, F. R. S., and *G. M. Wimple*, Superintendant of the Observatory, die Gleichung der Curve nicht als $p\,h = \beta f$, sondern in der Form

$$h = \beta \cot \pi$$

gegeben ist. Da aber $\cot \pi = \frac{f}{p}$ ist und auf der Basis der Curve nicht die Winkel π, sondern wirklich die h abgetragen sind, so ist die Curve die angegebene Hyperbel.

Es bleibt noch übrig, die Geschwindigkeit der Wolken zu bestimmen. Werden zwei Photographien auf derselben Station t Secunden nach einander aufgenommen und die erhaltenen Bilder auf die beschriebene Weise zur Deckung gebracht, so wird die Entfernung $\delta = M_a\,M_b$ der Plattenmittelpunkte den während der Zeit von t Secunden in der Camera zurückgelegten Weg angeben. Da nun die Wolken und ihr Bild ähnliche Figuren sind mit dem Ähnlichkeitsverhältnis $\frac{h}{f} = \frac{\beta}{p}$, so ist der von der Wolke beschriebene Weg durch $\delta . \frac{\beta}{p}$ gegeben und die Geschwindigkeit V durch

$$V = \frac{\delta}{p}\,\frac{\beta}{t}.$$

Um diese in Meilen per Stunde anzugeben, ist der Ausdruck noch durch 5280 (der Anzahl Fusse in der englischen Meile) zu dividiren und mit 3600 zu multipliciren. Dies giebt

$$V = \frac{\delta}{p}\,\frac{\beta}{5280}\,\frac{3600}{t}.$$

Auch dieser Ausdruck wird graphisch ermittelt. Zu diesem Zwecke sind

auf einem Cartonbogen ausser der besprochenen Hyperbel noch zwei weitere Figuren gedruckt. Die eine besteht aus zwei Parallellinien, die von einer Senkrechten in den Punkten M und N geschnitten werden, wo nach einem beliebigen Masstabe $MN = \beta$. Trägt man nun von M und N nach derselben Seite hin $MN = NQ = \delta$ ab und von M nach N hin $MR = p$, so wird die Gerade PR die zweite Parallele NQ in einem Punkte S schneiden, so dass $QS = \frac{\beta\delta}{p}$. Um hieraus V zu finden, dient die dritte Figur. Auf einer horizontalen Geraden sind gleiche Abstände, Secunden repräsentirend, abgetragen von 0 bis 120 und durch die Teilpunkte werden Senkrechte gezogen. Auf derjenigen durch den Teilpunkt 60 wird eine Strecke abgetragen, deren Länge einer Meile gleicht, wenn sie auf dem Masstab gemessen wird, auf dem die in letzter Figur die Basis β repräsentirende Länge MN 2400 Fuss angiebt. Diese Strecke wird in 60 gleiche Teile geteilt und die Teilpunkte werden mit dem Nullpunkt der Secunden durch Gerade verbunden und von unten an nummerirt. In der Figur sind diese Linien nun zwischen den Senkrechten von von 60 bis 120 Secunden gezogen, weil diese Zeiten allein in Betracht kommen. Nimmt man nun die Strecke $QS = \frac{\beta\delta}{p}$, wie sie oben bestimmt wurde, zwischen die Zirkelspitzen und setzt den Zirkel auf der Senkrechten, die dem Zeitintervalle t entspricht, an, so giebt die Nummer derjenigen geneigten Geraden, welche durch den Endpunkt geht, die Geschwindigkeit in Meilen per Stunde an.

Wegen weiterer Details wird auf die citirte Arbeit verwiesen.

(O. Henrici.)

Vergleiche zu diesem Abschnitte noch die in Abtlg. I unter Nr. 82, 83, 84, 87, 93, 94 aufgeführten Instrumente.

Nachtrag zur II. Abtheilung.

185a. **Regelfläche vierter Ordnung** von **B. v. Tötössy**, technische Hochschule Budapesth.

Specialfall der Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt. Selbstberührung längs einer Geraden; eine Rückkehrerzeugende.

Namenregister.*)

*) Die beigesetzten Zahlen sind Seitenzahlen.

Sachregister.*)

*) Die beigesetzten Zahlen sind Seitenzahlen.



